METODOLOGIA DELLA FISICA

Parte I

Metodi matematici di base

Indice

1 *Numeri complessi* 7

1.1 *Algebra* 7

1.2 *Geometria* 10

1.3 *La formula di Eulero* 11

1.4 *Aritmetica e trigonometria* 13

1.5 *Funzioni complesse* 13

1.6 *Il teorema fondamentale dell'algebra* 15

1.7 *Visualizzazione delle funzioni complesse* 16

1.8 *Funzioni analitiche* 16

PROBLEMI 18

SOLUZIONI 20

2 *Vettori e operatori* 29

2.1 *Spazi vettoriali* 29

2.2 *Basi e dimensione* 31

2.3 *Matrici* 33

2.4 *Cambiamenti di base* 35

2.5 *Operatori lineari* 36

2.6 *Spazi dotati di prodotto scalare e norma* 38

2.7 *Basi ortonormali* 40

2.8 *Forme lineari e spazio duale* 43

COMPLEMENTI 46

3 *Autovalori e autovettori* 49

3.1 *Operatori autoaggiunti e unitari* 49
3.2 *Autovalori e autovettori* 51
3.3 *Teorema spettrale per operatori autoaggiunti* 56
3.4 *Teorema spettrale per operatori normali* 58
3.5 *Funzione di un operatore* 59
3.6 *Assi principali di inerzia* 62
3.7 *Rotazioni e decomposizione di un operatore lineare* 63

4 *Successioni e serie* 67

4.1 *La nozione di limite di una successione* 67
4.2 *La nozione di successione di Cauchy* 68
4.3 *Serie infinita di numeri complessi* 69
4.4 *Successioni e serie di funzioni* 70
4.5 *Convergenza uniforme e scambio di limiti* 73
4.6 *Serie di potenze complesse* 75
4.7 *Funzioni complesse definite da serie di potenze* 78
4.8 *Raggio di convergenza e singolarità* 81
4.9 *L'esponenziale e le funzioni intere* 82

PROBLEMI 84
SOLUZIONI 86
COMPLEMENTI 91

5 *Derivate e integrali* 99

5.1 *La nozione di derivata* 99
5.2 *Derivate di trasformazioni non-lineari* 102
5.3 *Applicazioni ai sistemi dinamici* 105
5.4 *La nozione di integrale* 110

5.5 *Integrali di linea, di superficie e di volume* 112
5.6 *Integrali impropri* 115
5.7 *Convergenza uniforme di integrali impropri* 118
5.8 *Derivazione sotto il segno di integrale* 119
5.9 *Integrali di gaussiane* 120
COMPLEMENTI 124

6 *Fisica ed equazioni alle derivate parziali* 131
6.1 *Introduzione* 131
6.2 *Equazioni di Maxwell* 131
6.3 *Equazione di continuità* 132
6.4 *Equazione di Laplace* 133
6.5 *Equazione delle onde* 134
6.6 *Equazione del calore* 136
6.7 *Equazione di Navier-Stokes* 137
6.8 *Equazione di Hamilton-Jacobi* 138
6.9 *Equazione di Schrödinger* 140

1
Numeri complessi

Indice

1.1 *Algebra* 7
1.2 *Geometria* 10
1.3 *La formula di Eulero* 11
1.4 *Aritmetica e trigonometria* 13
1.5 *Funzioni complesse* 13
1.6 *Il teorema fondamentale dell'algebra* 15
1.7 *Visualizzazione delle funzioni complesse* 16
1.8 *Funzioni analitiche* 16
Problemi 18
Soluzioni 20

1.1 *Algebra*

Non sono state le equazioni quadratiche $ax^2 + bx + c = 0$, la cui formula risolutiva è nota sin dall'antichità,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

a portare ai numeri complessi. Il valore negativo del discriminante $b^2 - 4ac$ non fu mai considerato come segnale dell'esistenza di un nuovo tipo di numeri, per i quali $\sqrt{-1}$ ha senso. Fu invece sempre interpretato come un'indicazione che la parabola $y = ax^2$ e la retta $y = -bx - c$ non hanno punti di intersezione. Occorre tenere presente che fino all'800 si son sempre cercate soluzioni reali o positive delle equazioni algebriche.

Furono invece le equazioni cubiche a portare ai numeri complessi. In breve, la storia è questa. Girolamo Cardano, basandosi sui lavori

Girolamo Cardano (1501–1576?) è stato un matematico italiano. Parte della soluzione dell'equazione cubica, che pubblicò nella sua opera *Ars Magna* gli era stata comunicata da Tartaglia. Cardano sostenne di averne pubblicato il testo solo quando era venuto a sapere che Tartaglia avrebbe appreso la soluzione da Scipione Del Ferro.

di Niccolò Tartaglia e Scipione Del Ferro, pubblica nel suo *Ars Magna* del 1545) la formula

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \tag{1.1}$$

per l'equazione di terzo grado

$$x^3 = 3px + 2q\,.$$

La formula (1.1) non era nota nell'antichità. Pochi decenni dopo la scoperta di Cardano, Raffaele Bombelli si rese conto che c'era qualcosa di strano e paradossale riguardo a questa formula. Bombelli considerò l'equazione $x^3 = 15x + 4$, per cui la formula di Cardano fornisce

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}\,,$$

(con la notazione moderna $i \equiv \sqrt{-1}$ introdotta da Leonard Euler circa duecento anni dopo Bombelli). Ma Bombelli sapeva che $x = 4$ è soluzione dell'equazione. Come metter d'accordo questo con la formula di Cardano?

La congetturare ardita di Bombelli fu che $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + ni$ e $\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - ni$, dove n è un numero da determinarsi. Se fosse così, $x = 4$ sarebbe conseguenza della formula di Cardano. Ma quali devono essere le regole algebriche di manipolazione per "numeri" del tipo $A = a + i\tilde{a}$, in modo che sia davvero così? Le seguenti:

(1) $A + B = (a + i\tilde{a}) + (b + i\tilde{b}) = (a + b) + i(\tilde{a} + \tilde{b})$.

(2) $AB = (a + i\tilde{a})(b + i\tilde{b}) = ab + i(a\tilde{b} + \tilde{a}b) + i^2\tilde{a}\tilde{b}$
$= (ab - \tilde{a}\tilde{b}) + i(a\tilde{b} + \tilde{a}b)$.

(avendo usato $i^2 = -1$). Se si utilizzano queste regole si può mostrare facilmente che $(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ (esercizio).

A questo proposito Richard Feynman scrisse: lo sviluppo di più grande importanza per la matematica in Europa fu la scoperta di Tartaglia che si può risolvere un'equazione cubica: sebbene di poco uso in sé stessa, questa scoperta deve essere stata meravigliosa da un punto di vista psicologico. Aiutò molti nel Rinascimento a liberarsi dall' intimidazione che provavano verso gli antichi.

L'ALGEBRA
OPERA
DI RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Aritmetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori

Raffaele Bombelli (1526–1572) è stato un matematico e ingegnere italiano. La sua opera fondamentale, *L'algebra*, fu pubblicata nel 1572.

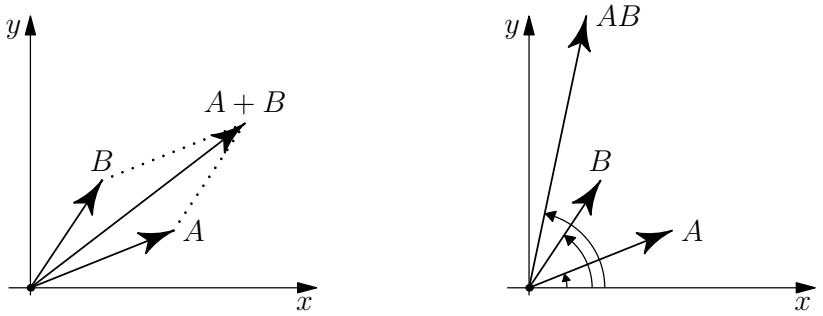


Figura 1.1: Somma e prodotto di numeri complessi, visti come vettori nel piano $\mathbb{R}^2$.

Il lavoro di Bombelli fu importante perché contribuì a far maturare la consapevolezza che problemi, formulati completamente nell'ambito dei numeri reali e di cui si cercavano soluzioni reali, per

essere risolti richiedevano comunque un'aritmetica complessa come strumento di calcolo, basata sulle regole algebriche (1) e (2).

Tuttavia, questa nuova aritmetica rimase abbastanza misteriosa fino a che, con Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss, non si diede una rappresentazione geometrica nei numeri complessi come punti del piano $\mathbb{R}^2$ per i quali le operazioni di somma e prodotto hanno un chiaro significato geometrico. Si vedano le figure 1.1 e 1.2.

La figura 1.1 mostra che la somma di due numeri complessi A e B è data dall'usuale regola del parallelogramma per la somma dei vettori corrispondenti. Dalla regola algebrica (2), si dimostra facilmente (esercizio) che il prodotto AB è il numero complesso che forma un angolo con l'asse reale pari alla somma degli angoli di A e B e la cui lunghezza è il prodotto delle lunghezze di A e B.

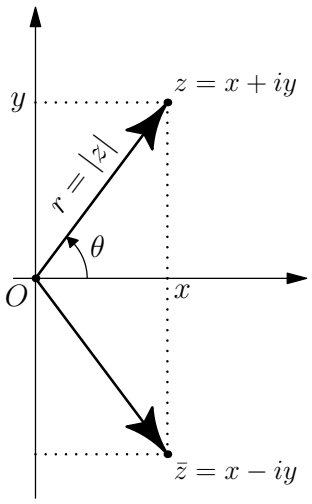


Figura 1.2: Rappresentazione geometrica dei numeri complessi; $\overline{z} = x - iy$ è il complesso coniugato di $z = x + iy$ ed è la riflessione di z rispetto all'asse reale

TERMINOLOGIA E NOTAZIONI Con riferimento alla figura 1.2, terminologia e notazioni per i numeri complessi sono riassunte dalla seguente tabella:

Nome	Significato	Notazione
modulo di z	lunghezza r di z	$\lvert z\rvert$
argomento (o fase) di z	angolo θ di z	$\arg(z)$
parte reale di z	coordinata x di z	$\mathrm{Re}\,(z)$
parte immaginaria di z	coordinata y di z	$\mathrm{Im}\,(z)$
numero immaginario	multiplo reale di i	
asse reale	insieme dei numeri reali	
asse immaginario	insieme dei numeri immaginari	
piano complesso	insieme dei numeri complessi	$\mathbb{C}$
complesso coniugato di z	riflessione di z rispetto all'asse reale	$\overline{z}$

La figura figura 1.2 mostra che il numero complesso $z = x + iy$ può essere anche rappresentato in termini delle sue coordinate polari r e θ. Per esprimere questo simbolicamente, scriviamo

$$z = r\angle\theta\,,$$

dove il simbolo $\angle$ serve a ricordare che θ è l'angolo di z (con l'asse reale). In questa rappresentazione polare, la regola del prodotto risulta particolarmente semplice:

$$(r\angle\theta)(R\angle\phi) = rR\angle(\theta+\phi)\,.$$

Prima di continuare, si raccomanda vivamente di fare un po' di pratica con l'aritmetica complessa. Ci si convinca, ad esempio, della validità dei seguenti fatti, con ragionamenti sia algebrici sia geometrici:

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) \qquad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan(\arg(z)) = \frac{\mathrm{Im}\,(z)}{\mathrm{Re}\,(z)} \qquad z\overline{z} = |z|^2 \qquad r\angle\theta = r(cos\theta + i\sin\theta)$$

Definito $(1/z)$ come quel numero complesso tale che $(1/z)z = 1$, ne segue che

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r\angle\theta} = \frac{1}{r}\angle(-\theta)\,.$$

Ecco altre formule su cui fare pratica:

$$\frac{R\angle\phi}{r\angle\theta} = \frac{R}{r}\angle(\phi-\theta) \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$(1+i)^4 = -4 \qquad (1+i)^{13} = -2^6(1+i) \qquad (1+i\sqrt{3})^6 = 2^6$$

$$\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i)^2} = -4i \qquad \frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2} = -\sqrt{2}\angle(-\pi/12) \qquad \overline{r\angle\theta} = r\angle(-\theta)$$

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2} \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2} \qquad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}\,.$$

Infine, la disuguaglianza triangolare generalizzata:

$$|z_1+z_2+\ldots z_n| \le |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|\,.$$

Esercizio: quando si ha uguaglianza?

1.2 *Geometria*

Una traslazione del piano complesso è data dalla trasformazione $z \mapsto z+b$, dove b è un numero complesso. Per ogni complesso a, la trasformazione $z \mapsto az$ rappresenta uno "stiramento" del piano di un fattore $|a|$ (compressione o espansione a seconda se $|a| < 1$ o $|a| > 1$), combinata con una rotazione del piano di un angolo pari ad $\arg(a)$ (si osservi che sia la dilazione sia la rotazione sono centrate nell'origine). Potremmo chiamare $z \mapsto az$ una *stiro-rotazione*; si veda la figura 1.3

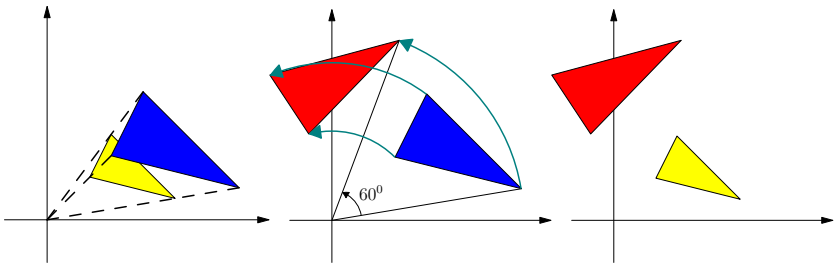


Figura 1.3: Stiro-rotazione: Il triangolo giallo è prima dilatato nel triangolo blu e quest'ultimo è ruotato di 60^o.

Nel disegnare la figura, abbiamo scelto $a = 1.5\angle(60^0)$. Consideriamo l'azione di $z \mapsto az$ su un triangolo. La prima figura a sinistra rappresenta la dilatazione (con fattore di scala 1.5), rispetto all'origine, che trasforma il triangolo di partenza giallo nel triangolo blu. La figura nel centro rappresenta la rotazione di 60^0 di quest'ultimo, sempre rispetto all'origine. Il triangolo rosso è l'effetto finale della

trasformazione. Si osservi che dilatazioni e rotazioni commutano: avremmo potuto prima ruotare e poi dilatare e saremmo comunque arrivati allo stesso risultato. E la ragione è chiara: il prodotto tra numeri complessi ha l'usuale proprietà commutativa del prodotto tra numeri.

OPERAZIONI VETTORIALI La seguente definizione

$$a \bullet b = \overline{a} b \,. \tag{1.2}$$

fornisce una buona nozione di prodotto scalare tra numeri complessi che si riduce all'usuale quadrato del modulo quando $a = b$ (e quindi alla norma usuale per i numeri complessi). Si osservi l'invarianza del prodotto scalare (1.2) per rotazioni: $u = e^{i\theta}$ produce una rotazione di un angolo θ attorno all'origine, e quindi

$$(ua) \bullet (ub) = \overline{ua}(ub) = \overline{u}\overline{a}ub = (\overline{u}u)\overline{a}b = \overline{a}b = a \bullet b \,.$$

È interessante osservare che il prodotto scalare complesso contiene informazione sia sul prodotto scalare reale sia sul prodotto vettore dei vettori **a** e **b** associati ai numeri complessi a e b. Si ha infatti

$$a \bullet b = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \,, \tag{1.3}$$

dove $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ è l'area (con segno) del parallelogramma definito dai due vettori (la sua direzione è ortogonale al piano, si veda la figura 1.4).

Notare che a differenza dell'usuale prodotto scalare reale, $a \bullet b \neq b \bullet a$. Si ha infatti, $b \bullet a = \overline{b}a = \overline{a \bullet b}$. Il prodotto scalare complesso è l'esempio più semplice di forma hermitiana o sesquilineare.

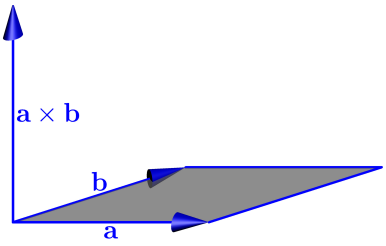


Figura 1.4: Il prodotto vettore è l'area (con segno) del parallelogramma definito dai due vettori ed è nella direzione ortogonale al piano.

1.3 *La formula di Eulero*

Una delle formule più importanti dell'algebra complessa è la formula

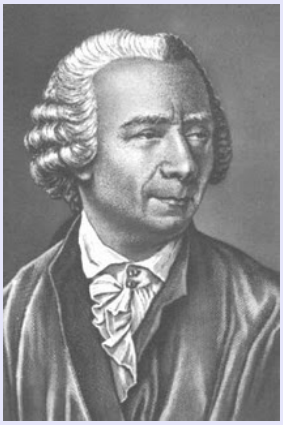
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \tag{1.4}$$

scoperta da Eulero intorno al 1740. Con questa formula la moltiplicazione dei numeri complessi diventa ovvia. Da essa si ha infatti $z = r\angle\theta = re^{i\theta}$, da cui, usando le proprietà dell'esponenziale

$$\left(re^{i\theta}\right)\left(Re^{i\phi}\right) = rRe^{i(\theta+\phi)}$$

Per spiegare la formula di Eulero, occorre in primo luogo domandarsi: *che cosa significa il simbolo "$e^{i\theta}$" ?* Le regole dell'algebra (somma e prodotto di numeri complessi), infatti, non ci dicono nulla su che cosa si debba intendere con il simbolo "$e^{i\theta}$".

L'approccio moderno è di considerare la (1.4) una *definizione* di "$e^{i\theta}$". Da un punto di vista logico, questo modo di procedere è ineccepibile. Ma, da un punto vista concettuale, ne risulta una carenza nella *comprensione* della formula. Comprendere la formula,



Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero (1707–1783), è stato un matematico e fisico svizzero. È noto per essere tra i più prolifici di tutti i tempi ed ha fornito contributi cruciali in svariate aree: analisi infinitesimale, funzioni speciali, meccanica razionale, meccanica celeste, teoria dei numeri, teoria dei grafi.

significa capirne il senso e in che modo può essere *giustificata* (non dimostrata!). Dopo tutto, la (1.4) fu per Eulero una *scoperta* e non semplicemente una definizione!

Una prima giustificazione si basa sul noto sviluppo di Taylor dell'esponenziale reale,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se supponiamo che questa formula continui a valere per immaginari puri e sostituiamo $x = i\theta$, otteniamo

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots .$$

Se adesso usiamo le proprietà algebriche dell'elevazione a potenza dell'unità immaginaria $i^2 = -1$, $i^3 = i \times i^2 = -i$, $i^4 = i \times i^3 = 1$, $i^5 = i \times i^4 = i$, ... e raggruppiamo i termini nello sviluppo di Taylor, otteniamo

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) .$$

Riconosciamo la prima parentesi come lo sviluppo in serie del coseno e la seconda come quella del seno. Quindi,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta .$$

C'è un'altra giustificazione della formula, che è particolarmente interessante perché basata su un ragionamento cinematico: si assuma che $Z = Z(t) = e^{it}$ descriva l'orbita di un punto nel piano, con condizione iniziale $Z_0 = Z(0) = 1$. Allora la velocità del punto è $V = ie^{it} = iZ$. Questo significa che Z soddisfa l'equazione

$$\frac{dZ}{dt} = iZ . \tag{1.5}$$

Per quanto visto nella sezione precedente, la moltiplicazione per i equivale ad una rotazione antioraria di 90^0, il che vuol dire che la velocità del punto è pari al raggio vettore del punto ruotato di 90^0. Tenuto conto della posizione iniziale, la velocità iniziale è allora $V_0 = i$. C'è un solo movimento che ha queste caratteristiche: *il moto circolare uniforme di raggio 1 con velocità angolare unitaria*. Questo fatto è illustrato dalla figura 1.5. La legge oraria dell'orbita è dunque

$$Z(t) = \cos t + i \sin t$$

e la formula di Eulero risulta così giustificata.

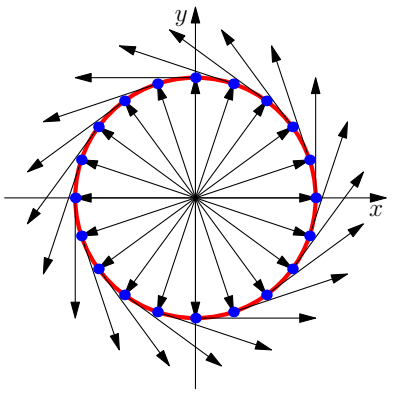


Figura 1.5: Formula di Eulero e moto circolare uniforme di raggio 1 con velocità angolare unitaria.

1.4 *Aritmetica e trigonometria*

L'utilità dei numeri complessi in aritmetica e trigonometria può essere apprezzata facendo i seguenti eserizi.

ESERCIZIO 1.1. Poiché è una formula di aritmetica che utilizzeremo spesso, si chiede di dimostrare che la somma di una progressione geometrica è data dalla formula

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \tag{1.6}$$

ESERCIZIO 1.2. Sia $z = re^{it}$, $r < 1$. Dimostrare che

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t - \theta) + r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}\right). \tag{1.7}$$

ESERCIZIO 1.3. Dimostrare che

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\,.$$

Soluzione di 1.3. Per brevità, si ponga $C \equiv \cos\theta$, $S \equiv \sin\theta$ e si consideri

$$\begin{aligned} e^{i3\theta} &= \cos 3\theta + i\sin 3\theta = (C + iS)^3 \\ &= \left(C^3 - 3CS^2\right) + i\left(3C^2S - S^3\right) \end{aligned}$$

Usando $C^2 + S^2 = 1$ e uguagliando parte reale e parte immaginaria, si ottiene

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= 4C^3 - 3C \\ \sin 3\theta &= -4S^3 + 3S \end{aligned}$$

La seconda formula è un bonus. □

ESERCIZIO 1.4. Una formula trigonometrica molto utile è

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{\sin\left[(n + \frac{1}{2})\theta\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{1.8}$$

e la sua dimostrazione è lasciata per esercizio (problema 1.9). Oltre alla formula di Eulero, si usi anche la (1.6).

1.5 *Funzioni complesse*

Nella sezione 1.2 abbiamo incontrato le funzioni lineari $z \mapsto az + b$, che possono essere interpretate come trasformazioni del piano complesso (traslazioni, rotazioni e stiramenti). Subito dopo, in ordine di difficoltà, c'è la funzione quadratica $z \mapsto z^2$, illustrata nella figura 1.6 e poi l'elevazione ad una potenza intera e positiva,

$$z \mapsto w = z^n\,. \tag{1.9}$$

Scrivendo $z = re^{i\theta}$, la (1.9) diventa $w = r^n e^{in\theta}$, per cui l'effetto della trasformazione è di elevare all'n-esima potenza la distanza e di moltiplicare per n l'angolo. La figura 1.6 intende rendere vivido questo fatto, mostrando l'effetto della trasformazione su alcuni raggi e archi centrati nell'origine (per $n = 2$).

Passiamo adesso ad un fatto elementare di algebra complessa che può essere compreso in maniera semplice dal punto di vista delle

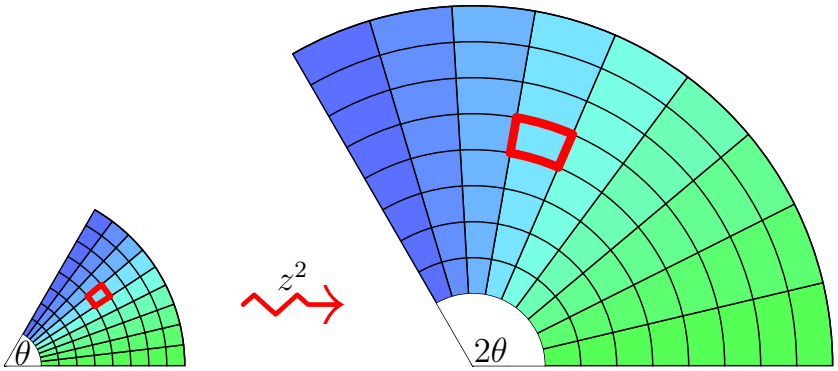


Figura 1.6: Illustrazione del tipo di trasformazione operato dalla funzione $z \mapsto w = z^n$, nel caso particolare di $n = 2$. Il fatto che un quadratino piccolo mantenga la forma di un quadratino, come mostrato in figura, appare, al momento solo una curiosità. In verità, è un fatto molto importante che, come vedremo nel seguito, è la caratteristica saliente delle *funzioni analitiche*.

funzioni complesse viste come trasformazioni.

Le soluzioni dell'equazione
$$z^n = 1$$
sono i vertici dell'ennagono regolare iscritto nel cerchio unitario con uno dei vertici nel punto 1. (1.10)

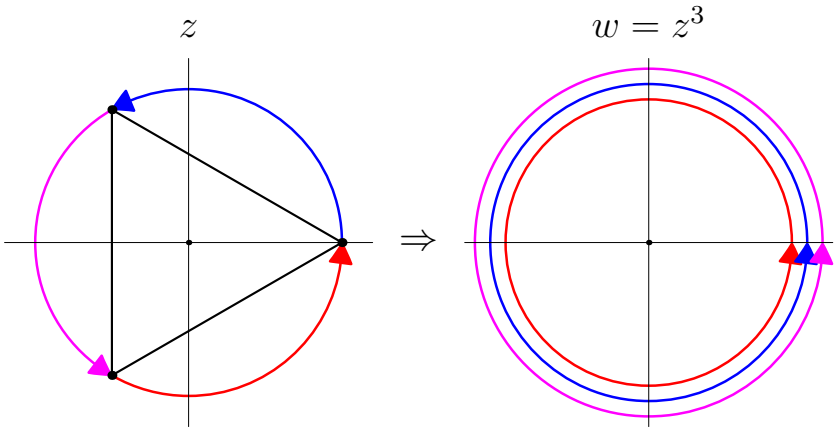


Figura 1.7: Poiché la particella nel piano-w ha una velocità 3 volte maggiore, quando essa compie un angolo giro, la particella z ha solo percorso $1/3$ della circonferenza (arco blu); quando la particella nel piano-z percorre il successivo $1/3$ di circonferenza (arco magenta), la particella nel piano-w ha fatto un altro giro completo, e lo stesso accade nell'ultimo tratto (arco rosso). I tre punti terminali dei tre archi formano un triangolo equilatero. Il ragionamento si estende ad un n qualunque. Risulta così dimostrato che le soluzioni di $z^n = 1$ sono i vertici dell'ennagono regolare iscritto nel cerchio unitario con uno dei vertici nel punto 1.

Preliminarmente, osserviamo che se $w = f(z) = z^n$, allora le soluzioni di $z^n = 1$ sono i punti del piano-z che sono trasformati da f nel punto $w = 1$ del piano-w. Se consideriamo una particella che si muove lungo il cerchio unitario nel piano-z, poiché $1^n = 1$ anche la particella immagine nel piano-w si muoverà lungo il cerchio unitario $|w| = 1$, ma con una velocità angolare che è n volte quella della particella nel piano-z (in quanto, sul cerchio unitario, $w = e^{in\theta}$). La (1.10) segue da questa semplice osservazione, come illustrato in figura 1.7 per $n = 3$.

Dopo le potenze intere, la classe più semplice di funzioni complesse è quella dei *polinomi*, cioè funzioni del tipo

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots + c_n z^n \,,$$

dove c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ sono costanti complesse.

1.6 Il teorema fondamentale dell'algebra

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un *campo* numerico. Gli elementi di un campo numerico sono solitamente chiamati *scalari*.

Un campo è una struttura algebrica con le stesse caratteristiche dell'algebra dei numeri reali: sono definite due operazioni, *addizione* e *moltiplicazione*, per quali valgono le usuale proprietà associative e distributive. Esiste un elemento neutro per entrambe le operazioni (0 per l'addizione e 1 per la moltiplicazione) ed esistono gli inversi rispetto ad entrambe le operazioni, eccetto per l'elemento neutro dell'addizione che non ha inverso rispetto alla moltiplicazione. I complessi sono un campo, così come lo sono i razionali $\mathbb{Q}$ e i reali $\mathbb{R}$.[1] A differenza di quest'ultimi non sono un *campo ordinato*, vale a dire, non è possibile definire una relazione d'ordine che sia compabile con addizione e moltiplicazione (in un campo ordinato, il quadrato di ogni elemento è necessariamente positivo, cosicché $i^2 = -1$ preclude questa possibilità). Come i reali, i complessi sono *chiusi*, cioè senza "buchi": tutte le successioni di Cauchy di numeri complessi convergono ad un numero complesso, così come accade per i reali, ma non per i razionali che hanno dei "buchi" (e questi buchi si riempiono passando ai reali). A differenza dei reali, i numeri complessi sono *algebricamente chiusi*, intendendo con questo che ogni polinomio ha radici complesse.

Quest'ultima caratteristica è davvero notevole. La chiusura algebrica dei complessi è stabilita da uno dei teoremi più importanti dell'algebra chiamato *teorema fondamentale dell'algebra*:

> Ogni equazione $P_n(z) \equiv c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n = 0$, a coefficienti c_k complessi o reali ($c_n \neq 0$), possiede almeno una radice in $\mathbb{C}$. (1.11)

Si osservi che dalla (1.11) segue che $P_n(z)$ ha n radici (magari alcune coincidenti). Infatti, se z_1 è la radice di $P_n(z)$ la cui esistenza è garantita dal teorema, allora $P_n(z)$ fattorizza nel prodotto di $(z - z_1)$ per un polinomio $P_{n-1}(z)$ di grado $n - 1$. Applicando il teorema a $P_{n-1}(z)$ e iterando la procedura, si conclude che esistono numeri complessi $z_1, \ldots, z_n$, eventualmente coincidenti,[2] che (posto $c_n = 1$,

[1] Ci sono anche campi con un numero finito di elementi. Per esempio, i numeri interi da 0 a $p - 1$, dove p è un numero primo, formano un campo con addizione e moltiplicazione modulo p.

Évariste Galois (1811–1832) è stato un matematico francese. Giovanissimo, determinò un metodo generale per scoprire se un'equazione è risolvibile o meno con operazioni quali somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione di potenza ed estrazione di radice.

[2] Ma non esiste un algoritmo generale per determinarli, quando $n > 4$, come dimostrò Galois.

senza perdita di generalità) forniscono la fattorizzazione completa del polinomio,

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \,. \tag{1.12}$$

1.7 *Visualizzazione delle funzioni complesse*

È difficile visualizzare una funzione da un piano ad un piano. Un modo è quello che abbiamo già usato: data la funzione $w = f(z)$, fare un disegno di come certe figure nel piano-z si trasformano nel piano-w, come i triangoli che nella sezione 1.2 abbiamo usato per visualizzare $z \mapsto az$, o i raggi e archi centrati nell'origine che abbiamo usato in figura 1.6 per mostrare l'effetto della trasformazione $z \mapsto z^2$.

Un secondo modo è quello di fare un grafico del modulo della funzione $f(z)$, come nella figura 1.8 per $f(z) = z^2$. La superficie così ottenuta è detta *superficie modulare* di $f(z)$. Naturalmente, rappresentando così una funzione, si perde informazione sulla sua fase. Un terzo modo consiste nel disegnare le curve di livello della parte reale $u = \mathrm{Re}\,(w)$ e della parte immaginaria $v = \mathrm{Im}\,(w)$ di $w = f(z) = u + iv$. Posto $z = x + iy$, u e v sono funzioni reali delle variabili x e y,

$$u = u(x, y) \,, \qquad v = v(x, y) \,.$$

Ad esempio, per $w = z^2$ si ha

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

e quindi

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned} \tag{1.13}$$

Le curve di livello di queste due funzioni sono mostrate in figura 1.9. Questo modo di visualizzare una funzione complessa è molto utile perché ci mostra quali regioni del piano-z si trasformano nei rettangoli della "griglia cartesiana" del piano-w, come mostrato in figura 1.10. Le figure che si ottengono sono esteticamente piacevoli, come, ad esempio, in figura 1.11. Ma ciò che è rilevante da un punto di vista matematico è che sia in figura 1.9 sia in figura 1.11 le curve di livello delle u e delle v sono ortogonali. Questo ha fatto implicazioni molto importanti, che approfondiremo nella terza parte.

Infine, c'è un quarto modo di visualizzzare le funzioni complesse, in termini di campi vettoriali ad esse associati. È un modo molto efficace e interessante di cui ci occuperemo nella terza parte.

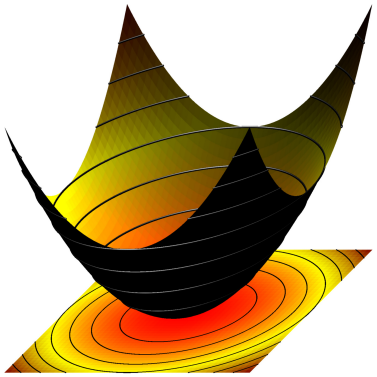


Figura 1.8: Superficie modulare di $w = z^2$. In figura sono mostrate le curve di livello e la loro proiezione sul piano complesso. Colori uguali nel piano, caratterizzano numeri z che hanno la stessa distanza dal centro.

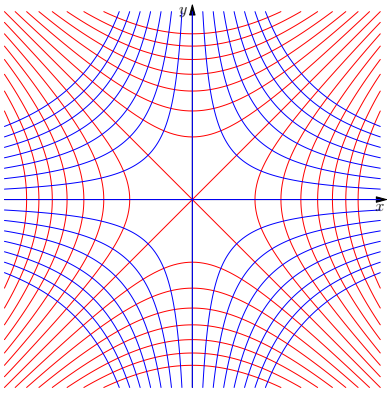


Figura 1.9: Curve di livello $u(x, y) =$ cost. (in rosso) e $v(x, y) =$ cost. (in blu) di $w = u + iv = (x + iy)^2$.

1.8 *Funzioni analitiche*

Le funzioni complesse si costruiscono a partire dai mattoni di base: operazioni algebriche, come in $z^2 + z$, uso del complesso coniugato,

come in $\bar{z}z^3$ e via discorrendo in tutte le combinazioni algebriche possibili. Più avanti, vedremo come si possa passare a combinazioni algebriche infinite, come la serie di potenze

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots \tag{1.14}$$

(essendo il limite di una progressione geometrica, la serie sopra può già essere studiata senza aspettare la teoria generale delle serie complesse, si veda il problema 1.7).

Esplicitando la dipendenza da z e $\bar{z}$, scriviamo una generica funzione complessa come $f(z, \bar{z})$. Una *funzione analitica* è semplicemente una funzione che non dipende da $\bar{z}$, cioè tale che

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0\,. \tag{1.15}$$

dove $z = x + iy$ e per $\partial/\partial\bar{z}$ si intende l'operatore

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\,. \tag{1.16}$$

Sorprendentemente, la (1.15) ha conseguenze molto interessanti per le parti reali e immaginarie della funzione f. Scriviamo $f = u + iv$ e, tendendo conto della (1.16), sostituiamola nella (1.15). Si ottiene (osservando che $i^2 = -1$)

$$0 = \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\,.$$

Ma un numero complesso è nullo, se sono nulle le sue parti reali e immaginarie. Quindi,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1.17}$$

Queste equazioni sono dette *equazioni di Cauchy-Riemann* e sono il "marchio di fabbrica" delle funzioni analitiche.

N.B. Nel dare la definizione di funzione analitica, e non ci siamo curati di essere matematicamente rigorosi. Lo saremo un po' di più nella terza parte. Qui si voleva solo mostrare quanto semplice e naturale sia la nozione di funzione analitica.

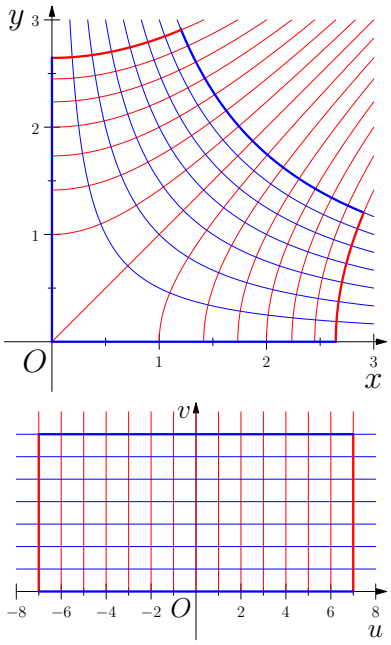


Figura 1.10: La regione del piano (xy), racchiusa dalle linee rosse e blu in grassetto (sopra) è trasformata da $w = z^2$ nel rettangolo col bordo rosso e blu in grassetto (sotto).

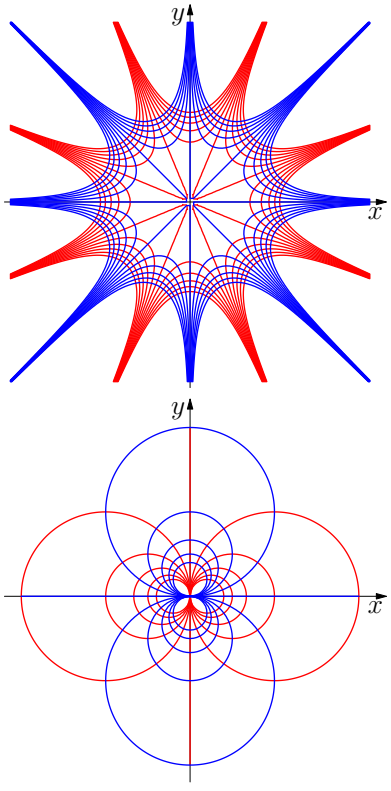


Figura 1.11: Sopra: curve di livello per $w = z^4$ Sotto: curve di livello per $1/z$. (In entrambe le figure, u = cost., in rosso e v = cost., in blu).

Problemi

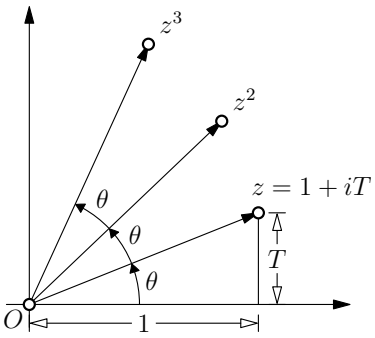
Problema 1.1. □ Utilizzando l'algebra complessa e la formula di Eulero, dimostrare le seguenti identità trigonometriche:

(a) $\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$

(b) $\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$

(c) $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

Per il problema (c) è utile far riferimento alla figura sotto, dove $T \equiv \tan\theta$.



Problema 1.2. □ Sia $z = re^{it}$, $r < 1$. Dimostrare che

$$\frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-\theta)+r^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right).$$

Problema 1.3. □ Per determinare la formula risolutiva dell'equazione cubica $x^3 = 3px + 2q$, procedere nel modo seguente:

(i) Fare la sostituzione $x = s + t$, e dedurre che x risolve la cubica se $st = p$ e $s^3 + t^3 = 2q$.

(ii) Eliminare t in queste due equazioni e ottenere un'equazione quadratica in s^3.

(iii) Risolvere la quadratica per ottenere i due possibili valori di s^3. Per simmetria, quali sono i possibili valori di t^3?

(iv) Dato che $s^3 + t^3 = 2q$, dedurre la formula (1.1).

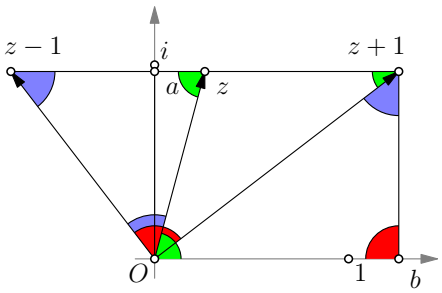
Problema 1.4. □ Un fatto di base nella teoria dei numeri è questo: *se due interi possono essere espressi come somma di due quadrati, allora lo stesso vale per il loro prodotto.* Sottinteso che ogni simbolo seguente denoti un intero, questo significa che se $M = a^2 + b^2$ e $N = c^2 + d^2$, allora $MN = p^2 + q^2$. Dimostrare questo fatto considerando $|(a+ib)(c+id)|^2$.

Problema 1.5. □ Siano A, B, C, D quattro punti sul cerchio unitario. Se $A + B + C + D = 0$, mostrare che i punti devono formare un rettangolo.

Problema 1.6. □ Se $z = e^{i\theta} \neq -1$, allora

$$z - 1 = \left(i\tan\frac{\theta}{2}\right)(z+1).$$

Dimostrare questo sia con il calcolo diretto sia geometricamente facendo un disegno (si veda la figura sotto).



[Si osservi che il triangolo $[O, z+1, z]$ è isoscele perché i lati $[O, z]$ e $[z+1, z]$ sono di lunghezza 1 (essendo z sul cerchio unitario).]

Problema 1.7. □ Poiché se ne farà gran uso, dimostrate che la somma di un progressione geometrica complessa è

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Quindi rispondete alle seguenti domande:

(a) In quale regione di $\mathbb{C}$ deve stare z affinché la serie infinita $1 + z + z^2 + \ldots$ converga?

(b) Se z sta in questa regione, a quale punto del piano la serie infinita converge?

(c) Aiutandovi con un calcolatore, fate un disegno della serie infinita nel caso $z = (1/2)(1+i)$ e verificate che converge al punto previsto in (b).

Problema 1.8. □ Sia

$$S = \cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta.$$

Dimostrare che

$$S = \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$$

o, equivalentemente,

$$S = \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin\theta}$$

PROBLEMA 1.9. □ Dimostrare che

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

PROBLEMA 1.10. □ Servirsi di un disegno per mostrare che se a e b sono dati numeri complessi, allora $|z-a| = |z-b|$ è l'equazione di una retta.

PROBLEMA 1.11. □ Si consideri l'equazione

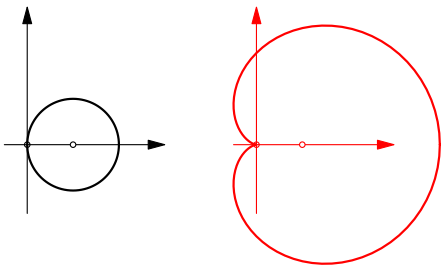
$$(z-1)^{10} = z^{10}\,.$$

(a) Senza tentare di risolvere l'equazione, mostrare geometricamente che tutte e nove le soluzioni (perché non dieci?) devono stare sulla retta verticale $\mathrm{Re}\,(z) = 1/2$ (si veda il problema 1.10).

(b) Dividendo ambo i membri dell'equazione per z^{10}, l'equazione assume la forma $w^n = 1$, dove $w = (z-1)/z$. Risolvere quindi l'equazione iniziale.

PROBLEMA 1.12. □ Disegnare il cerchio $|z-1| = 1$. Trovare l'equazione polare dell'immagine di questo cerchio rispetto alla trasformazione $z \mapsto z^2$ e darne una rappresentazione grafica.

La curva così ottenuta è detta *cardioide*. L'effetto della trasformazione $z \mapsto z^2$ sul cerchio unitario centrato in $(1,0)$ (in nero) è mostrato nella figura sotto.



PROBLEMA 1.13. □ Si consideri la famiglia di trasformazioni complesse

$$Z \mapsto M_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z - 1}$$

(i) Dimostrare che $M_a[M_a(z)] = z$. In altra parole M_a è *idempotente*.

(ii) Dimostrare che M_a trasforma il cerchio unitario in se stesso.

(iii) Mostrare che se $|a| < 1$, allora M_a trasforma il disco unitario in se stesso.

Aiuto: Usare $|q|^2 = q\bar{q}$ per verificare che

$$|\bar{a}z - 1|^2 - |z-a|^2 = (1-|a|^2)(1-|z|^2)\,.$$

PROBLEMA 1.14. □ Dimostrare che la famiglia di trasformazioni

$$z \mapsto M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad ad - bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.
Aiuto: $\alpha|z|^2 + \beta(z+\bar{z}) + i\gamma(z-\bar{z}) + \delta = 0$ è l'equazione di un cerchio o di una linea in $\mathbb{C}$. Investigate $f(z) = \frac{1}{z}$ e scrivete

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d}\,.$$

PROBLEMA 1.15. Convincersi di quanto riprodotto in figura 1.5, risolvendo numericamente la (1.5) con l'algoritmo di Eulero che, in linguaggio moderno, è espresso dal seguente pseudo-codice:

```
define V(Z)= I*Z
input  t0=0 and Z0=1
input step size, h and the number of steps, n
for j from 1 to n do
V0 = I
Z1 = Z0 + h*V0
t1 = t0 + h
Print t1 and Z1
t0 = t1
Z0 = Z1
end
```

Soluzioni

Problema 1.1. □

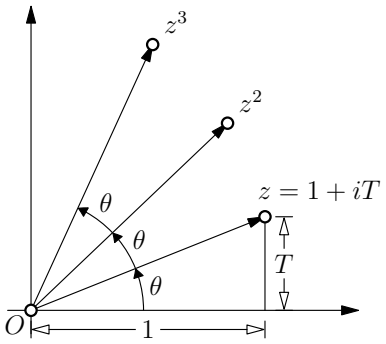
(a) Bonus dell'esempio 1.3.

(c) $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$, da cui

$$\begin{aligned} 2^4 \cos^4\theta &= \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^4 \\ &= \left(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}\right) + 4\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right) + 6 \\ &= 2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6 \end{aligned}$$

$$\implies \quad \frac{1}{8}\left(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3\right)$$

(d) $T \equiv \tan\theta$. Si rappresenti $z = 1 + iT$ come nella figura a lato. Poiché z ha angolo θ, z^3 ha angolo 3θ. Quindi,



$$\tan 3\theta = \frac{\operatorname{Im} z^3}{\operatorname{Re} z^3}$$

$$z^3 = (1+iT)^3 = (1-3T^2) + i(3T - T^3) \quad \implies \quad \tan 3\theta = \frac{3T^2 - T^3}{1 - 3T^2}\,.$$

Problema 1.2. □

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(e^{i\theta}+z)(e^{-i\theta}-\bar{z})}{|e^{i\theta}-z|^2}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$$

Problema 1.3. □

$x = s + t$ nella cubica $x^3 = 3px + 2q = 0$:

$$\implies \quad (s+t)^3 = 3p(s+t) + 2q \quad \implies \quad s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 = 3ps + 3pt + 2q$$

Se

$$\begin{cases} st & = p \\ s^3 + t^3 & = 2q \end{cases}$$

allora x risolve la cubica. Eliminando t dal sistema

$$s^3 + \frac{p^3}{s^3} = 2q \quad \implies \quad (s^3)^2 - 2q(s^3) + p^3 = 0 \quad \implies \quad s^3 = \begin{cases} q + \sqrt{q^2 - p^3} \\ \\ q - \sqrt{q^2 - p^3} \end{cases}$$

Per simmetria

$$t^3 = \begin{cases} q + \sqrt{q^2 - p^3} \\ \\ q - \sqrt{q^2 - p^3} \end{cases}$$

Dato che $s^3 + t^3 = 2q$, se s^3 è la radice di sopra, t^3 è quella di sotto. Quindi,

$$x = s + t = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

PROBLEMA 1.4. □

$$|(a+ib)(c+id)|^2 = |(a+ib)|^2\,|(c+id)|^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv MN$$

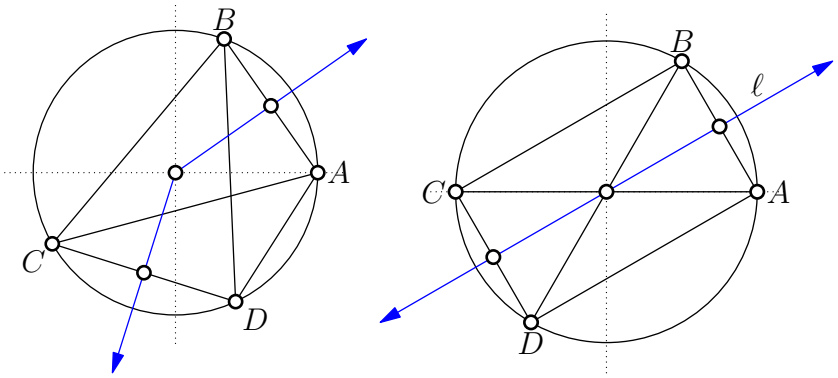
ma si ha anche

$$MN = |(a+ib)(c+id)|^2 = |(a+ib)(c+id)|^2 = (ac+bd)^2+(bc-ad)^2 = p^2+q^2\,.$$

PROBLEMA 1.5. □ Ci sono molti modi per risolvere questo problema. Si vuole mostrare che se i punti sono sul cerchio unitario e

$$A+B+C+D=0 \tag{1.18}$$

allora non si ha la configurazione a sinistra, ma quella a destra, della figura sotto:



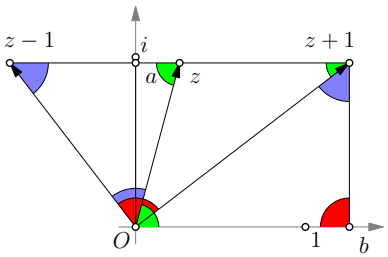
La condizione (1.18) può essere riscritta come $A+B=-(C+D)$ e significa, geometricamente, che i vettori congiungenti l'origine con i punti medi delle corde AB e CD stanno sulla stessa retta ℓ (i vettori formano tra loro un angolo di 180^0). Poiché questi vettori sono sempre perpendicolari alle corde AB e CD (figura a sinistra), ne segue che, quando (1.18) è soddisfatta, AB e CD sono paralleli tra loro, perché ortogonali alla retta ℓ. Il caso di un trapezio isoscele non può presentarsi perché (1.18) implica la stessa condizione per la congiungente le mediane di BC e DA, in quanto (1.18) può essere anche riscritta come $B+C=-(A+D)$.

Naturalmente, è possibile anche una soluzione completamente algebrica. Qual è più facile?

Si osservi che, da un punto di vista fisico, (1.18) significa che il centro di massa dei punti (di massa uguale) è nell'origine. E se i punti stanno su un cerchio e inizialmente formano un rettangolo, come nella figura sopra a destra, non possono essere spostati lungo il cerchio e formare una configurazione come quella a sinistra, *se si vuole mantenere il centro di massa nell'origine*. Con questo vincolo, i

punti possono formare un altro rettangolo, ma non il quadrilatero irregolare della figura a sinistra.

PROBLEMA 1.6. □ Per una soluzione geometrica, si veda la figura a lato. Si osservi che il triangolo $[O, z+1, z]$ è isoscele perché i lati $[O, z]$ e $[z+1, z]$ sono di lunghezza 1 (essendo z sul cerchio unitario). Allora per il teorema di una retta che interseca due parallele, l'angolo $[1, O, z+1]$ è metà dell'angolo $\theta = \arg(z)$. Anche il triangolo $[O, z-1, z]$ è isoscele; ragionando sugli angoli si conclude che l'angolo $[z, O, z+1$ è retto. Allora $z - 1 = i\alpha(z+1)$.



Si tratta adesso di determinare α. Ragionando sui trangoli rettangoli simili $[z-1, O, z+1]$ e $[z+1, b, O]$, si ha la proporzione

$$|z-1| : |z+1| = |z+1|\sin(\theta/2) : |z+1|\cos\theta/2\,,$$

da cui $|z-1|/|z+1| = \tan\theta/2$. Dunque,

$$z - 1 = i\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)(z+1)\,.$$

Il calcolo algebrico è immediato

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = i\tan\frac{\theta}{2}\,.$$

PROBLEMA 1.7. □

$$s_n \equiv 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}\,, \quad zs_n = z + z^3 + \ldots + z^n = s_n - 1 + z^n$$

$$\Longrightarrow \quad 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

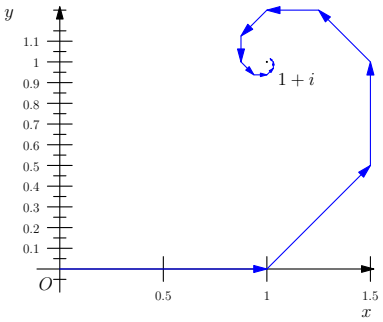
(a) $|z| < 1$

(b)

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$$

(c)

$$\left.\frac{1}{1-z}\right|_{z=(1/2)(1+i)} = 1 + i$$



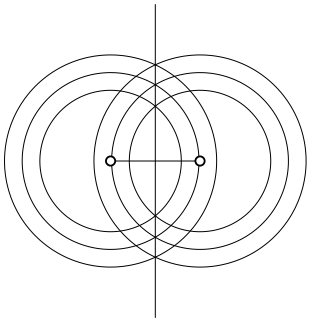
PROBLEMA 1.8. □

$$\begin{aligned}
S &= \cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{i\theta} + e^{i3\theta} + e^{i5\theta} + \ldots + e^{i(2n-1)\theta}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\left[1 + \left(e^{i2\theta}\right) + \left(e^{i2\theta}\right)^2 + \ldots + \left(e^{i2\theta}\right)^{n-1}\right]\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\left[\frac{e^{i2n\theta}-1}{e^{i2\theta}-1}\right]\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\left[\frac{e^{in\theta}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)}{e^{i\theta}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}\right]\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{e^{in\theta}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right\} \\
&= \frac{\sin n\theta \cos n\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 1.9. □

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right] \\
&= e^{-in\theta} + \ldots + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{in\theta} \\
&= e^{-in\theta}\left[1 + \ldots + e^{i(n-1)\theta} + e^{in\theta} + e^{i(n+1)\theta} + \ldots + e^{i2n\theta}\right] \\
&= e^{-in\theta}\left[\frac{e^{i(2n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right] \\
&= \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-1} \\
&= \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left[e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}\right]}{e^{i\theta}-1} \\
&= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 1.10. □ Luogo dei punti equidistanti da due punti dati. Vedere la figura a lato.



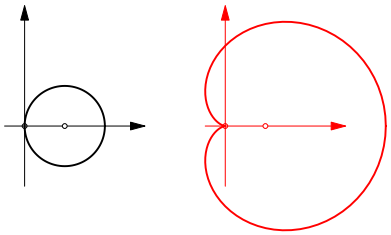
PROBLEMA 1.11. □

(a) Sulla retta perpendicolare al segmento tra $(0,0)$ e $(1,0)$ e passa a metà (vedere problema precedente, l'identità deve vale anche per i moduli). Nove radici perchè z^{10} compare da ambo i membri e l'equazione si abbassa il grado.

(b) $\quad w^{10} = 1 \quad \Longrightarrow \quad w_1 = 1\,, \quad w_2 = e^{2\pi i \frac{1}{10}}\,, \ldots, \quad w_{10} = e^{2\pi i \frac{9}{10}}$

$$z_n = \frac{1}{1 - w_n}\,, \quad n = 2, 3, \ldots, 10 \quad \text{(N.B. } w_1 \text{ va esclusa)}\,.$$

Problema 1.12. □



L'effetto della trasformazione $z \mapsto z^2$ sul cerchio unitario centrato in $(1, 0)$ (in nero) è mostrato nella figura a lato. Le equazioni della cardioide (in rosso), sono

$$|z^2 - 1| = 1$$

Poiché le equazioni parametriche del cerchio di partenza sono

$$z = 1 + e^{it}$$

quelle della cardioide saranno

$$z = (1 + e^{it})^2 = 1 + 2e^{it} + e^{i2t}$$

Raccogliendo e^{it} a secondo membro,

$$z = e^{it}(e^{-it} + 2 + e^{it}) = 2e^{it}(1 + \cos t)\,,$$

da cui segue immediatamente l'equazione in coordinate polari:

$$r = 2(1 + \cos\theta)\,.$$

Problema 1.13. □

(i) Sia

$$w = M_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

L'idempotenza segue dal calcolo algebrico elementare:

$$\begin{aligned} M_a(M_a(z)) = M_a(w) &= \frac{w - a}{\bar{a}w - 1} = \frac{\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - a}{\bar{a}\frac{z-a}{\bar{a}z-1} - 1} \\ &= \frac{z - a - a\bar{a}z + a}{\bar{a}z - \bar{a}a - \bar{a}z + 1} = \frac{z(1 - a\bar{a})}{1 - \bar{a}a} \\ &= z \end{aligned}$$

(ii) Consideriamo il modulo di $M_a(z)$

$$|M_a(z)| = \left|\frac{z - a}{\bar{a}z - 1}\right| = \frac{|z - a|}{|\bar{a}z - 1|}$$

Per i quadrati di numeratore e denominatore si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} |z - a|^2 &= |z|^2 - \bar{a}z - \bar{z}a + |a|^2 \\ |\bar{a}z - 1|^2 &= |a|^2|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z + 1 \end{aligned}$$

Se $|z| = 1$, queste due quantità sono uguali e quindi $|M_a(z)| = 1$. Il cerchio $|z| = 1$ è trasformato in sè stesso.

(iii) Si verifica infine che se $|a| < 1$, M_a rappresenta il disco unitario in sè stesso. Sottraendo membro a membro i quadrati di numeratore e denominatore, si ottiene

$$|z-a|^2 - |\bar{a}z-1|^2 = (1-|a|^2)(|z|^2-1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z|<1, |a|<1\,.$$

Quindi $|z-a| < |\bar{a}z-1|$, da cui

$$|M_a(z)| = \frac{|z-a|}{|\bar{a}z-1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z|<1, |a|<1\,.$$

e quindi $M_a(z)$ sta dentro il disco unitario.

PROBLEMA **1.14.** □

Le trasformazioni

$$z \mapsto M_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad ad-bc \neq 0$$

svolgono un ruolo importante in geometria e analisi complessa e sono dette *trasformazioni di Möbius* (che ne studiò per primo le proprietà). Nel seguito, per brevità, ometteremo di indicare i quattro parametri reali e scriveremo semplicemente M.

Per dimostrare che

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad ad-bc \neq 0$$

trasforma linee e cerchi in linee e cerchi, facciamo il calcolo per un caso particolare e poi argomentiamo che fare questo è suffciente.

Se $c = 0$ allora

$$z \mapsto (a/d)z + (b/d)$$

è la moltiplicazione per un numero complesso,

$$z \mapsto w = (a/d)z\,,$$

(una *stiro-rotazione*, secondo la terminologia introdotta nella sezione 1.2) seguita da una traslazione

$$w \mapsto w + (b/d)\,.$$

È quindi geometricamente chiaro che linee e cerchi vanno in linee e cerchi.

Se $c \neq 0$, scriviamo

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d}\,.$$

Questa trasformazione è la composizione di 5 trasformazioni:

$$z \overset{(1)}{\longmapsto} w_1 = cz \overset{(2)}{\longmapsto} w_2 = w_1 + d \overset{(3)}{\longmapsto} w_3 = \frac{1}{w_2} \overset{(4)}{\longmapsto} w_4 = -\frac{ad-bc}{c} w_3 \overset{(5)}{\longmapsto} w_5 = w_4 + \frac{a}{c}$$

(1) stiro-rotazione

(2) traslazione

(3) inversione complessa

(4) stiro-rotazione

(5) traslazione

Le stiro-rotazioni e le traslazioni trasformano linee e cerchi in linee e cerchi, se mostriamo che lo stesso vale per l'inversione complessa siamo a posto.

L'equazione di un cerchio è

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta x - 2\gamma y + \delta = 0$$

e per $\alpha = 0$ si ha l'equazione di una linea retta. In notazione complessa l'equazione diventa

$$\alpha |z|^2 + \beta(z + \overline{z}) + i\gamma(z - \overline{z}) + \delta = 0$$

Poniamo $w = 1/z$ e sostituiamo

$$\alpha \frac{1}{|w|^2} + \beta(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}) + i\gamma(\frac{1}{w} - \frac{1}{\overline{w}}) + \delta = 0$$

Moltiplichiamo per $|w|^2 = \overline{w}w$ e otteniamo

$$\alpha + \beta(w + \overline{w}) - i\gamma(w - \overline{w}) + \delta|w|^2 = 0$$

che è ancora l'equazione di un cerchio (dove si è spostato il centro? come è variato il raggio?).

Facciamo il punto sulle trasformazioni di Möbius

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}\,, \qquad ad - bc \neq 0\,.$$

Ciascuna di esse è la composizioni delle seguenti trasformazioni:

(i) stiro-rotazione = moltiplicazione per il numero complesso a, $S_a(z) = az$

(ii) traslazione = somma del numero complesso b, $T_b(z) = z + b$

(iii) inversione complessa $I(z) = 1/z$

Allora

$$M = T_{(a/c)} \circ S_{[-(ad-bc)/c]} \circ I \circ T_d \circ S_c$$

dove, come di consueto, "$\circ$" denota la composizione di funzioni.

NOTA La trasformazione

$$\mathscr{I} : z \mapsto \frac{1}{\overline{z}}$$

è usualmente detta *inversione geometrica* o *trasformazione per raggi vettori reciproci nel piano* o semplicemente *inversione*. Come si vede facilmente, anch'essa trasforma linee e cerchi in linee e cerchi.

2
Vettori e operatori

Indice

2.1 ***Spazi vettoriali*** 29
2.2 ***Basi e dimensione*** 31
2.3 ***Matrici*** 33
2.4 ***Cambiamenti di base*** 35
2.5 ***Operatori lineari*** 36
2.6 ***Spazi dotati di prodotto scalare e norma*** 38
2.7 ***Basi ortonormali*** 40
2.8 ***Forme lineari e spazio duale*** 43
COMPLEMENTI 46

2.1 *Spazi vettoriali*

Uno *spazio vettoriale* o *lineare* $\mathcal{V}$ è una struttura algebrica che consiste di elementi, chiamati *vettori*, e di due operazioni: la somma di vettori e la moltiplicazione dei vettori per un numero. Questa struttura è regolata dalle seguenti proprietà per vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ e numeri (scalari) $\mu, \lambda \in K$, dove K è un campo numerico (usualmente, il campo dei reali $\mathbb{R}$ o quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$).[1]

[1] Se si considerasse un campo finito come quello della nota a pagina 15, si avrebbe uno spazio con un numero finito di punti. L'argomento è affascinate, ma esula dai nostri scopi.

Leggi di somma

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (legge commutativa)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b}) + \mathbf{c})$ (legge associativa)
3. Se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono due vettori, allora c'è uno e un solo vettore $\mathbf{x}$ per cui vale l'equazione $\mathbf{b} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$. È chiamato la differenza di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e si denota con $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ (Possibilità della sottrazione).

Leggi di moltiplicazione per un numero

4. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (prima legge distributiva)
5. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$ (legge associativa)
6. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
7. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (seconda legge distributiva)

Si osservi che da 3 discende l'esistenza del vettore nullo $\mathbf{0}$.

Gli spostamenti rigidi o traslazioni dell'usuale spazio euclideo tridimensionale E^3 formano uno spazio vettoriale. Ad esempio, il vettore $\mathbf{a}$ che descrive lo spostamento illustrato in figura 2.1 è una traslazione di tutti i punti dello spazio nella direzione $\mathbf{a}$ di un tratto di lunghezza a. Tale azione di solito si denota così

$$Q = P + \mathbf{a}\,, \tag{2.1}$$

il che suggerisce $Q - P$ come un modo di rappresentare il vettore che sposta il punto P nel punto Q. Che gli spostamenti rigidi di E^3 formino uno spazio vettoriale sui reali è reso evidente dalla figure a margine.

Inoltre, lo spazio euclideo n-dimensionale E^n in cui è stato fissato un punto O (origine) è uno spazio vettoriale i cui elementi sono gli spostamenti $P - O$, dove P è un punto arbitrario di E^n. Questo fatto segue immediatamente dall'esempio sopra. Si osservi che E^n in quanto tale (cioè privo di un punto privilegiato) non è uno spazio lineare, bensì uno spazio affine.

Lo spazio euclideo n-dimensionale è un esempio di spazio affine. Uno spazio A è detto affine se:

1. Ogni coppia (ordinata) di punti P e Q in A determina un vettore $\mathbf{a}$, simbolicamente espresso come $\mathbf{a} = Q - P$ (oppure $\overrightarrow{PQ}$).
2. Se P è un qualunque punto in A e $\mathbf{a}$ un qualunque vettore, esiste uno e un solo punto Q in A tale che $Q = P + \mathbf{a}$.
3. Se $Q - P = \mathbf{a}$ e $R - Q = \mathbf{b}$, allora $R - P = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

(Si osservi da queste proprietà segue che $Q - P = \mathbf{0}$ se e sole se i punti Q e P coincidono.) Le nozioni geometriche usuali, come rette e piani, sono derivate da questo sistema. La geometria affine è più generale di quella euclidea: come nella geometria euclidea, il parallelismo tra rette è una nozione assoluta e si possono confrontare le lunghezze dei segmenti lungo una retta o lungo rette parallele, ma nella geometria affine non è definita alcuna nozione di distanza tra punti o di angolo tra direzioni, e non è possibile confrontare le lunghezze di vettori lungo rette non parallele.

Come si può verificare facilmente, i seguenti insiemi sono esempi di spazi lineari.

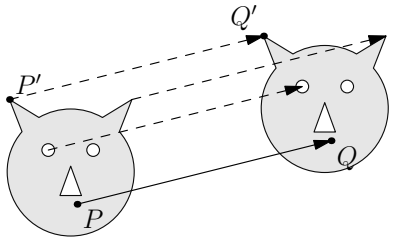


Figura 2.1: Spostamento di un corpo rigido rappresentato dal vettore

$$\mathbf{a} = Q - P = Q' - P'$$

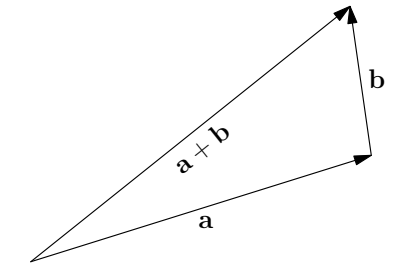


Figura 2.2: Somma di due spostamenti.

Figura 2.3: Moltiplicazione per 2 di uno spostamento.

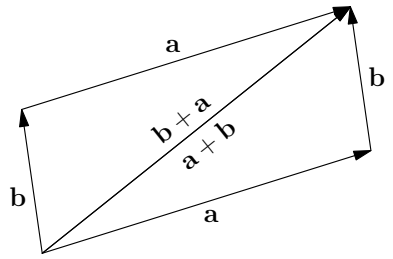


Figura 2.4: La regola del parallelogramma per sommare i vettori non è altro che un'espressione della commutatività degli spostamenti rigidi.

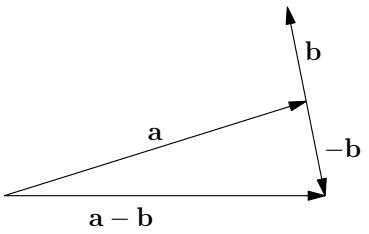


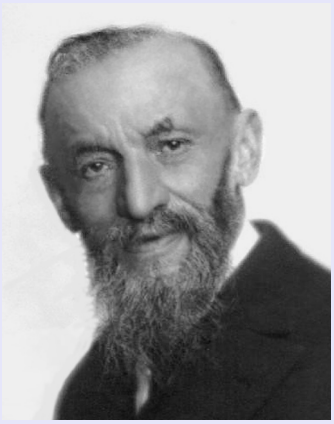
Figura 2.5: Differenza di due spostamenti rigidi.

ESEMPIO 2.1. Sia K un campo numerico (ad esempio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). L'insieme di tutte le n-nuple di elementi di K, con l'addizione e la moltiplicazione per un numero definite da $(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n) = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$ e $\alpha(a_1,\dots,a_n) = (\alpha a_1,\dots,\alpha a_n)$, dove a_i, b_i e $\alpha \in K$ è uno spazio vettoriale su K. Questo spazio è denotato usualmente con K^n. Il vettore nullo in K^n è $(0,\dots,0)$.

ESEMPIO 2.2. L'insieme $K^{m\times n}$ di tutte le matrici (Si veda la sezione 2.3) $m \times n$ con elementi di un campo K arbitrario è uno spazio vettoriale su K rispetto alle operazioni di addizione di matrici e moltiplicazione per un numero in K.

ESEMPIO 2.3. L'insieme di tutti i polinomi $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots a_n t^n$, con coefficienti a_i in un campo K, è uno spazio vettoriale su K rispetto alle usuali operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione per un numero in K.

ESERCIZIO 2.1. Sia K un campo arbitrario, e X un qualsiasi insieme non vuoto. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{V}$ di tutte le funzioni da X in K è uno spazio lineare.



Giuseppe Peano (1858–1932) è stato un matematico e logico italiano. Peano fornì il primo esempio di una curva che riempie una superficie (la curva di Peano, uno dei primi esempi di frattale). Diede una definizione assiomatica dei numeri naturali, i famosi assiomi di Peano, i quali vennero ripresi da Russell e Whitehead nei loro Principia Matematica. Uno dei grandi meriti dell'opera di Peano sta nella ricerca della chiarezza e della semplicità. *La prima definizione moderna e precisa di spazio vettoriale fu introdotta da Peano nel 1888.*

Soluzione di 2.1. La somma di due qualsiasi funzioni $f, g \in \mathcal{V}$ è la funzione $f+g \in \mathcal{V}$ definita da

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

e il prodotto di un numero $\alpha \in K$ per una funzione $f \in \mathcal{V}$ è la funzione αf definita da

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

Allora $\mathcal{V}$, rispetto a tali operazioni, è uno spazio vettoriale su K. Il vettore nullo è la funzione $\mathbf{0}$ in $\mathcal{V}$ che trasforma ogni $x \in X$ in $0 \in K$. Inoltre, per ogni funzione $f \in X$, $-f$ è quella funzione in $\mathcal{V}$ per la quale $(-ff)(x) = -f(x)$, per ogni $x \in X$. □

2.2 *Basi e dimensione*

Passiamo adesso in rassegna tre definizioni molto importanti riguardanti un insieme di n vettori $\mathbf{v}_1,\dots\mathbf{v}_n$ in un generico spazio lineare $\mathcal{V}$ su K.

L'insieme dei vettori
$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n\,,$$
al variare di $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$, si chiama *span* dei vettori $\mathbf{v}_1,\dots\mathbf{v}_n$ e si denota con $\text{span}(\mathbf{v}_1,\dots\mathbf{v}_n)$. (2.2)

Si dimostra facilmente che lo span di un dato insieme di vettori è uno spazio vettoriale. Tale spazio è anche detto lo *spazio generato* dal dato insieme di vettori ed è un sottospazio di $\mathcal{V}$. Per esempio, due vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{V}$ generano uno spazio vettoriale bidimensionale. Si veda la figura a margine. In $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$\mathbf{i} = (1,0,0)\,, \quad \mathbf{j} = (0,1,0)\,, \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$. Lo span di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ è il piano dei vettori $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, dove $x, y \in \mathbb{R}$.

I vettori $\mathbf{v}_1,\dots\mathbf{v}_n$ sono detti *linearmente indipendenti* se la sola soluzione dell'equazione
$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$
è $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Altrimenti, i vettori sono detti *linearmente dipendenti*. (2.3)

Per esempio, in $\mathbb{R}^3$ i vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sono linearmente indipendenti, infatti

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{0}\,, \text{ cioè } (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

se e solo se $x = y = z = 0$. I vettori i $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{e} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ non sono linearmente indipendenti, infatti l'equazione

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + w\mathbf{e} = \mathbf{0}\,, \text{ cioè } (x + w, y + w, 0) = (0, 0, 0)$$

oltre alla soluzione nulla ha anche la soluzione $x = y = -w$.

Si dice che i vettori $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ sono una *base* in $\mathcal{V}$ se sono linearmente indipendenti e $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n) = \mathcal{V}$. Il numero n è detto *dimensione* di $\mathcal{V}$ e si scrive $\dim \mathcal{V} = n$. (2.4)

Una base $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ sarà denotata compattamente $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n)$.

Esercizio 2.2. Nello spazio sui reali dei polinomi, l'insieme $\{1, x, 2 + x, x^2\}$, dove x è una variabile reale, è linearmente indipendente?

Esercizio 2.3. L'insieme $\mathbb{C}^{2\times 2}$ delle matrici 2×2 con elementi complessi è uno spazio vettoriale sui complessi di dimensione 4 (prima di svolgere l'esercizio, si veda la sezione 2.3). Per stabilire questo si mostri che le matrici

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti. Queste matrici costituiscono la base naturale in $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Esercizio 2.4. Con riferimento all'esercizio 2.1, sia $K = \mathbb{R}$ e X l'intervallo chiuso $[a, b]$ sulla retta reale ($a < b$). Si consideri l'insieme $C[a, b]$ delle funzioni continue su $[a, b]$. Mostrare che questo insieme è uno spazio lineare e che la sua dimensione è infinita.

I vettori di uno spazio lineare di dimensione finita possono essere "coordinatizzati". Vale infatti il seguente teorema:

Ogni spazio lineare $\mathcal{V}$ su K di dimensione n è isomorfo a K^n. (2.5)

La dimostrazione, riportata a margine, segue facilmente dall'osservazione che, fissata una base $\mathbf{e}$ in $\mathcal{V}$, ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere espresso come

$$\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i\,. \tag{2.6}$$

I numeri $v_1, \dots, v_n$ in (2.6) sono detti le *coordinate* di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{e}$. Quando si vuole mettere in evidenza che le coordinate del vettore dipendono dalla base, si scrive $\mathbf{v} = \sum_i v_i^{\mathbf{e}} \mathbf{e}_i$.

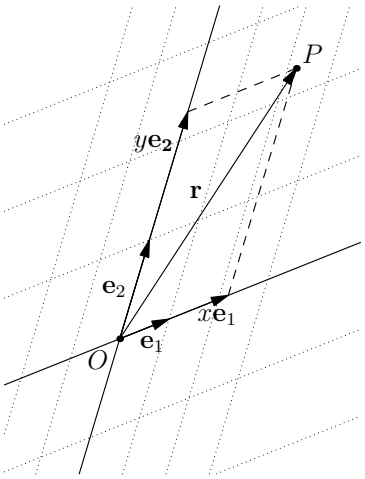


Figura 2.6: Piano definito dal punto O e da due vettori $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$.

Soluzione di 2.2. La più generale combinazione lineare degli elementi dell'insieme è

$$y = a_1 + a_2 x + a_3(2 + x) + a_4 x^2\,.$$

Ora $y = 0$ per tutti gli x non implica $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ perché se scegliamo $a_1 + 2a_2 = 0$, $a_2 + a_3 = 0$ e $a_4 = 0$, allora $y = 0$ (ad esempio, la combinazione $a_1 = 1$, $a_3 = -1/2$, $a_2 = 1/2$ e $a_4 = 0$). Perciò l'insieme non è linearmente indipendente. □

Soluzione di 2.4. L'insieme è uno spazio vettoriale in quanto la somma di funzioni continue è continua e la funzione ottenuta moltiplicando per un numero una funzione continua è continua. Le funzioni x, x^2, …, x^n sono tutte elementi di $C[a, b]$ e formano un insieme linearmente indipendente per n arbitrariamente grande. Ne segue che $C[a, b]$ non può essere di dimensione finita. □

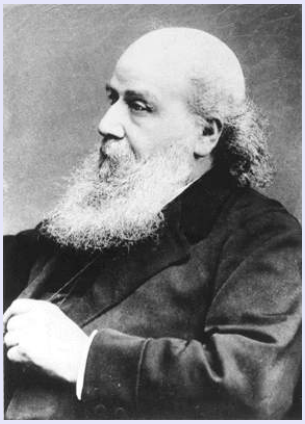
Dimostrazione di (2.5). Per la (2.6), al vettore $\mathbf{v}$ corrisponde il vettore $(v_1, \dots, v_n) \in K^n$. Viceversa, scelta una base $\mathbf{e}$ in $\mathcal{V}$, ad un qualunque vettore $(u_1, \dots, u_n) \in K^n$ si associa il vettore $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$ in $\mathcal{V}$. Come si verifica facilmente, tale associazione stabilisce una corrispondenza tra $\mathcal{V}$ e K^n che preserva la struttura di spazio vettoriale, nel senso che se $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$ corrisponde a $(v_1, \dots, v_n)$ e $\mathbf{u} = \sum_i u_i \mathbf{e}_i$ corrisponde a $(u_1, \dots, u_n)$, allora a $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ corrisponde a $(v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) = (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n)$ e $\alpha\mathbf{v}$ corrisponde a $\alpha(v_1, \dots, v_n)$. □

2.3 *Matrici*

Un insieme ordinato rettangolare di numeri di un campo K della forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

è detto *matrice* con m righe e n colonne. Viene anche indicata con $[a_{ij}], i = 1, \dots n,\ j = 1, \dots m$, o semplicemente con $[a_{ij}]$. I numeri a_{ij} sono chiamati *elementi* della matrice e talvolta si scrive $a_{ij} = [A]_{ij}$.
N. B. Siamo interessati alle matrici $n \times n$, dette *quadrate*. Nel seguito, salvo avviso contrario, con "matrice" intenderemo una matrice quadrata. Assumeremo inoltre che gli elementi della matrice siano numeri complessi.



James Sylvester (1814– 1897) è stato un matematico inglese. Diede contributi fondamentali alla teoria delle matrici e degli invarianti, alla teoria dei numeri e al calcolo combinatorio. Nel 1848 introdusse il termine "matrice".

Per le matrici è definita la somma in modo ovvio, $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$, e il prodotto per una scalare, $\alpha[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}]$. Dunque le matrici formano uno spazio vettoriale. Tra matrici A e B è definito un prodotto, detto righe per colonne, $[AB]_{ij} = \sum_k [A]_{ik}[B]_{kj}$. Dunque le matrici formano un'*algebra* con le due operazioni di somma e prodotto. La matrice con tutti zeri è l'elemento neutro rispetto alla somma, mentre la matrice con tutti 1 lungo la diagonale e gli altri elementi nulli è la matrice *identità* I, ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto di matrici. Si scrive $[I]_{ij} = \delta_{ij}$, dove δ_{ij} è la delta di Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$). Si osservi che a differenza del prodotto tra numeri, in generale il prodotto tra matrici è non commutativo, $AB \neq BA$.

La *trasposta* di una matrice A è denotata A^t e i suoi elementi sono ottenuti trasponendo le righe e le colonne di A, $[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$. Un importante proprietà dell'operazione di trasposizione è che $(AB)^t = B^t A^t$. L'*aggiunta* (o trasposta coniugata) di una matrice A^*, oltre alla trasposizione, richiede che si prenda il complesso coniugato: $[A^*]_{ij} = \overline{[A_{ji}]}$. Anche in questo caso si ha $(AB)^* = B^* A^*$ Una matrice è detta *hermitiana* o *auto-aggiunta* se $A^* = A$ e *anti-hermitiana* se $A^* = -A$.

Una matrice con una colonna, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$ è chiamata *vettore colonna* e una matrice con una riga $\mathbf{v}^t = \begin{bmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ è chiamata *vettore riga*. I vettori riga e i vettori colonna si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i vettori di $\mathbb{C}^n$ nel modo ovvio; con abuso di terminologia, diremo che i vettori riga o i vettori colonna sono elementi di $\mathbb{C}^n$. In questo senso, una matrice agisce in modo naturale su $\mathbb{C}^n$ trasformando un vettore in $\mathbb{C}^n$ in un altro vettore

mediante il prodotto righe per colonne. Se $\mathbf{v}$ è un vettore colonna, allora $A\mathbf{v}$ è un altro vettore colonna, con componente i-esima $\sum_k [A]_{ik} v_k$. Equivalentemente, A agisce sui vettori riga, $\mathbf{v}^t A$, producendo il vettore riga con componente i-esima $\sum_k v_k [A]_{ki}$. Poiché $A(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{v} + \beta A\mathbf{u}\,,\ \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n\,, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (analogamente per l'azione sui vettori riga), A realizza una trasformazione lineare su $\mathbb{C}$.[2]

Una qualunque matrice A può essere espressa nella forma

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

dove $\mathbf{a}_i$ sono vettori colonna con componenti $[A]_{ji}$, $j = 1, \dots n$.[3] Il *rango* di una matrice è il numero massimo di vettori colonna $\mathbf{a}_i$, o di vettori riga $\widetilde{\mathbf{a}}_i$, linearmente indipendenti (si può dimostrare che i due numeri coincidono).

Una matrice S è detta *invertibile* se esiste una matrice, denotata S^{-1} e chiamata inversa di S, tale che $SS^{-1} = S^{-1}S = I$. Si può dimostrare che una matrice è invertibile se e solo se il suo rango è pari a n, la dimensione di $\mathbb{C}^n$. Dunque, scritta S nella forma (2.7),

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

i vettori $\mathbf{v}_1, \dots \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti e quindi sono una *base* in $\mathbb{C}^n$. Se un esiste un un vettore $\mathbf{v}$ diverso dal vettore nullo tale che $M(\mathbf{v}) = 0$, la matrice M è detta *singolare*. Questo non può mai accadere per una matrice invertibile, che è quindi anche detta *non singolare* o *regolare*. Per l'inverso di un prodotto di matrici vale la regola $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (esercizio: dimostrare questa regola).

Una matrice $B = S^{-1}AS$, per una qualche matrice S invertibile, è detta *simile* a A; equivalentemente, si dice che B è ottenuta da A mediante una *trasformazione di similitudine*. Particolarmente importanti sono le proprietà di una matrice che sono invarianti per trasformazioni di similitudine, tra queste il suo *determinante* e la sua *traccia*.

Ricordiamo che il determinante di una matrice $A = [a_{ij}]$ è così definito

$$\det(A) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}\,, \tag{2.9}$$

dove la somma è su tutte le permutazioni σ dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ e $\operatorname{sgn}(\sigma)$ è il segno dell permutazione (che vale 1 se la permutazione è pari e -1 se essa è dispari). Dalla definizione sopra segue che

$$\det(AB) = \det A \det B\,. \tag{2.10}$$

La traccia $\operatorname{Tr} A$ di una matrice A è la somma dei suoi elementi diagonali,

$$\operatorname{Tr} A = \sum_k A_{kk}\,. \tag{2.11}$$

[2] Le trasformazioni lineari e gli operatori verrano trattati nella sezione 2.5.

[3] Equivalentemente, può essere espressa come

$$A = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{a}}_1 \\ \dots \\ \widetilde{\mathbf{a}}_n \end{bmatrix}$$

dove $\widetilde{\mathbf{a}}_i$ sono vettori riga con componenti $[A]_{ij}$, $j = 1, \dots n$.

Lo studio dell'algebra lineare e delle matrici emerse dallo studio dei determinanti, che erano usati per risolvere sistemi di equazioni lineari. I determinanti erano già usati da Leibniz (1646–1716) nel 1693 e successivamente furono usati nel 1750 da Cramer (1704–1752) per risolvere sistemi lineari. In seguito, Gauss (1777–1855) sviluppò la teoria della soluzione dei sistemi lineari usando il metodo di eliminazione, detto di Gauss.

La traccia è una funzione lineare sulle matrici e gode della proprietà

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)\,. \tag{2.12}$$

Dalle (2.10) e (2.12) segue facilmente che determinante e traccia sono invarianti per trasformazioni di similitudine. Infatti, essendo $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$, si ha che $\det(S^{-1}AS) = \det(ASS^{-1}) = \det A$, essendo $SS^{-1} = I$, la matrice identità. Quindi il determinante è invariante per trasformazioni di similitudine. Per la traccia si procede in modo analogo. Osserviamo che

> Il determinante di una matrice è nullo se e solo se la matrice è singolare. (2.13)

2.4 *Cambiamenti di base*

Siano $\mathbf{e}$ e $\mathbf{f}$ due basi in $\mathcal{V}$. Allora ciascun elemento della base $\mathbf{f}$ può essere espresso come combinazione lineare degli elementi della base $\mathbf{e}$,

$$\mathbf{f}_i = \sum_j S_{ji}\mathbf{e}_j\,, \quad i = 1, \dots n\,. \tag{2.14}$$

Risulta così definita la matrice di cambiamento di base S con elementi di matrice S_{ij}. Sia

$$\mathbf{f}_i^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} S_{1i} \\ \dots \\ S_{ni} \end{bmatrix}$$

il vettore colonna i cui elementi sono le componenti di $\mathbf{f}_i$ rispetto alla base $\mathbf{e}$. Allora

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{\mathbf{e}} & \dots & \mathbf{f}_n^{\mathbf{e}} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

La matrice S è invertibile, essendo le due basi formate da vettori linearmente indipendenti che generano tutto lo spazio. Allora si può "tornare indietro" con la matrice S^{-1} e riottenere la base $\mathbf{e}$ dalla base $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{e}_i = \sum_j [S^{-1}]_{ji}\mathbf{f}_j\,, \quad i = 1, \dots n\,. \tag{2.16}$$

Poiché un qualunque vettore $\mathbf{v}$ può essere espresso in termini di entrambe le basi, deve valere l'uguaglianza $\mathbf{v} = \sum_i v_i^{\mathbf{e}}\mathbf{e}_i = \sum_i v_i^{\mathbf{f}}\mathbf{f}_i$. Ma

$$\sum_i v_i^{\mathbf{f}}\mathbf{f}_i = \sum_i v_i^{\mathbf{f}} \sum_j S_{ji}\mathbf{e}_j = \sum_j v_j^{\mathbf{f}} \sum_i S_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_i \left(\sum_j S_{ij} v_j^{\mathbf{f}} \right) \mathbf{e}_i\,.$$

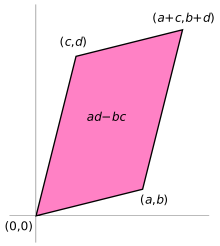
Quindi,

$$v_i^{\mathbf{e}} = \sum_j S_{ij} v_j^{\mathbf{f}} \tag{2.17}$$

Significato geometrico del determinante

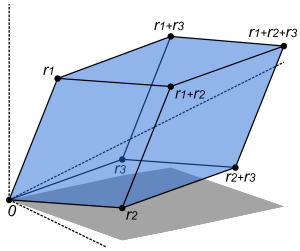
La definizione algebrica (2.9) è abbastanza oscura e nasconde il significato geometrico del determinante, che è il seguente.

Sia A una matrice scritta nella forma (2.7), $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$, allora $\det(A)$ è il volume (o area, per $n = 2$) (con segno) del parallelepipedo con spigoli di base $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$. Per esempio, per $n = 2$, sia $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, allora $\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$ è l'area del paralleogramma in figura:



Per la dimostrazione, si veda la figura 1.4. Si osservi che il segno è quello del prodotto vettore, cioè quello fissato dalla regola della mano destra.

Similmente, per $n = 3$ e $A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$, $\det(A)$ è il volume del parallelepipedo mostrato in figura:



L'interpretazione geometrica rende molto più trasparenti le proprietà del determinante, ad esempio la (2.13) (se la matrice è singolare i vettori $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n$ non sono linearmente indipendenti e se non lo sono, almeno più di due di essi sono complanari e quindi il volume è nullo). Il segno del determinante dipende dall'orientamento del parallelepipedo: se è concorde con quella dei vettori di base $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$, il segno è positivo, altrimenti è negativo.

è come si trasformano le coordinate di un vettore in conseguenza del cambiamento di base (2.14). Si osservi che sebbene S sia chiamata la matrice di transizione dalla vecchia base $\mathbf{e}$ alla nuova base $\mathbf{f}$, il suo effetto è di trasformare le coordinate di un vettore nella nuova base nelle coordinate del vettore relative alla vecchia base.

ESEMPIO 2.4. Si consideri il cambiamento in $\mathbb{R}^2$ dalla base $\mathbf{e} = (\mathbf{i}, \mathbf{j})$ alla base $\mathbf{f} = (\mathbf{i}', \mathbf{j}')$ ruotata rispetto alla prima di un angolo θ in senso antiorario, $\mathbf{i}' = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$, $\mathbf{j}' = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$. Allora

$$S = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Per un vettore $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = x'\mathbf{i}' + y\mathbf{j}'$ si ha

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ \sin\theta x' + \cos\theta y' \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta x + \sin\theta y \\ -\sin\theta x + \cos\theta y \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.5. Un altro esempio di cambiamento di base rilevante per la fisica è quello dalle matrici E_i dell'esercizio 2.3 alle matrici, dette di Pauli,

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando questa base, mostrare che le matrici hermitiane 2×2 formano uno spazio vettoriale *reale* di dimensione 4.

2.5 *Operatori lineari*

Siano $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ due spazi vettoriali sullo stesso campo K. Una funzione $\mathscr{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ è detta *trasformazione lineare* se

$$\mathscr{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathscr{A}(\mathbf{v}) + \beta\mathscr{A}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},\ \alpha, \beta \in K \tag{2.19}$$

Se $\mathcal{U}$ coincide con $\mathcal{V}$, la trasformazione lineare $\mathscr{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ è usualmente detta *operatore lineare*. Nel seguito ci occuperemo di operatori lineari e assumeremo che $\mathcal{V}$ sia di dimensione finita n.

La prima importante proprietà degli operatori lineari è la seguente.

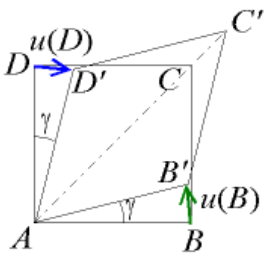
Un operatore lineare $\mathscr{A}$ è completamente definito dalla sua azione sugli elementi di una base. (2.20)

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DETERMINANTE (continua dalla pagina precedente)

Una formula molto utile che collega determinante e traccia è

$$\det(I + \epsilon A) = 1 + \epsilon\,\mathrm{tr}(A) + O(\epsilon^2) \tag{2.18}$$

Il significato fisico di questa formula è in termini di una deformazione elastica lineare $I + \epsilon A$ applicata ad un corpo, come mostrato in figura



Allora $\epsilon\,\mathrm{tr}(A)$ è una misura della variazione percentuale di volume in conseguenza della deformazione.

Infatti, se $\mathbf{v} = \sum_i v_i \mathbf{e}_i$, dove $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n)$ è una base in $\mathcal{V}$, per linearità si ha

$$\mathbf{u} = \mathscr{A}(\mathbf{v}) = \mathscr{A}\left(\sum_i v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_i v_i \mathscr{A}(\mathbf{e}_i)\,, \tag{2.21}$$

per cui, assegnati i vettori $\mathbf{a}_i = \mathscr{A}(\mathbf{e}_i)$, l'azione di $\mathscr{A}$ risulta fissata su tutto lo spazio. Per linearità, questi vettori possono essere espressi come combinazione lineare dei vettori della base,

$$\mathscr{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_i A^{\mathbf{e}}_{ij} \mathbf{e}_i\,. \tag{2.22}$$

Per cui l'operatore lineare risulta completamente determinato dalla matrice $A^{\mathbf{e}} = (A^{\mathbf{e}}_{ij})$. L'apice "$\mathbf{e}$" (che quando non c'è ambiguità verrà omesso) sta a ricordare che questa matrice dipende dalla base: essa *rappresenta* l'operatore lineare $\mathscr{A}$ nella base $\mathbf{e}$. Passando alle componenti dei vettori, dalle (2.21) e (2.22) segue che

$$u^{\mathbf{e}}_i = \sum_j A^{\mathbf{e}}_{ij} v^{\mathbf{e}}_j\,. \tag{2.23}$$

Se si cambia base, l'operatore è rappresentato da una differente matrice. Ad esempio, nella base $\mathbf{f} = \sum_j Sji \mathbf{e}_j$ l'operatore $\mathscr{A}$ è rappresentato dalla matrice $A^{\mathbf{f}}$ definita dalla relazione

$$\mathscr{A}(\mathbf{f}_i) = \sum_j A^{\mathbf{f}}_{ji} \mathbf{f}_j\,.$$

Esercizio 2.6. Dimostrare che

$$A^{\mathbf{f}} = S^{-1} A^{\mathbf{e}} S \tag{2.24}$$

Ricordando che due matrici A e B sono *simili* se esiste una matrice invertibile S tale che $A = S^{-1}BS$, allora:

Due matrici rappresentano lo stesso operatore se e solo se sono simili. (2.25)

Poiché usualmente un operatore è specificato da una matrice in una data base, il criterio (2.25) è importante per caratterizzare le sue proprietà intrinseche, cioè quelle proprietà che sono *invarianti* per cambiamenti di base. Per quanto visto alla fine della sezione 2.3, tra queste ci sono il determinante $\det(\mathscr{A})$, definito come il determinante di una rappresentazione matriciale dell'operatore $\mathscr{A}$ e la sua traccia $\mathrm{Tr}(\mathscr{A})$, definita come la traccia di una sua rappresentazione matriciale.

Sottolineiamo infine che, fissata una base in $\mathcal{V}$, la corrispondenza tra operatori e matrici è una corrispondenza biunivoca di algebre: $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ corrisponde a $A + B$, $\mathscr{A} \circ \mathscr{B}$ (dove $\circ$ denota la composizione di funzioni) corrisponde a AB e $\mathscr{A}^{-1}$ (se esiste) corrisponde a A^{-1}.

Nucleo e immagine di una trasformazione lineare

$$\mathscr{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$

L'immagine è

$$\mathrm{Im}\ \mathscr{A} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : \mathscr{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{ per } \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$$

Il nucleo è

$$\mathrm{Ker}\ \mathscr{A} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathscr{A}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Immagine e nucleo sono sottospazi lineari di $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ rispettivamente.

Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono di dimensione finita, vale l'importante teorema

$$\dim \mathcal{V} = \dim\ (\mathrm{Ker}\ \mathscr{A}) + \dim\ (\mathrm{Im}\ \mathscr{A})\,.$$

2.6 *Spazi dotati di prodotto scalare e norma*

Sia $\mathcal{V}$ lo spazio lineare $\mathbb{C}^n$ con base naturale $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \ldots,$ $\mathbf{e}_n = (0,\ldots,0,1)$. Considerati due vettori qualunque in $\mathcal{V}$, $\mathbf{u} = \sum_{k=1} u_k \mathbf{e}_k$ e $\mathbf{v} = \sum_{k=1} v_k \mathbf{e}_k$, si definisce il loro prodotto scalare come il numero

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \sum_k \overline{u_k} v_k \equiv \langle \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v} \rangle \,. \tag{2.26}$$

N. B. Nella definizione del prodotto scalare (2.26) è convenzionale richiedere la linearità rispetto al primo o al secondo argomento. Nella letteratura matematica, la linearità è rispetto al primo argomento. I fisici tendono a seguire la convenzione opposta e qui non faremo eccezione.

La norma, o lunghezza di un vettore $\mathbf{v}$ è definita come

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\langle \mathbf{v}\,,\, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\sum_k \overline{v_k} v_k}\,. \tag{2.27}$$

Queste definizioni vanno intese come le naturali generalizzazioni delle familiari nozioni euclidee in $\mathbb{R}^3$. Lo spazio $\mathbb{C}^n$, dotato del prodotto scalare (2.26), è lo *spazio euclideo complesso n-dimensionale*.[4] Analogamente, $\mathbb{R}^n$, con il prodotto scalare (2.26), è lo *spazio euclideo reale n-dimensionale*.

[4] A rigore, lo spazio euclideo è lo spazio affine associato, e quindi privo di un punto privilegiato. I vettori in $\mathbb{C}^n$ sono le differenze di punti in questo spazio e la struttura di prodotto scalare è definita per queste differenze.

La struttura euclidea è più rigida della struttura di $\mathbb{C}^n$ o $\mathbb{R}^n$, quando questi sono intesi solo come spazi lineari, nel senso che la classe di trasformazioni che la preserva, è più ristretta della classe di tutte le trasformazioni lineari invertibili (che sono quelle che preservano la struttura di spazio lineare). La struttura di uno spazio di prodotto scalare $\mathcal{V}$ è lasciata invariata dalle trasformazioni invertibili di $\mathcal{V}$ che non cambiano il prodotto scalare tra vettori, cioè dalle trasformazioni rappresentate da matrici invertibili U tali che

$$\langle U\mathbf{u}\,,\, U\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}\,,\, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{2.28}$$

Una matrice U che soddisfa la (3.3) rappresenta una *rotazione* dello spazio ed è detta *matrice ortogonale* o *unitaria*. Talvolta si riserva il nome di rotazione al caso di spazi reali, mentre per spazi complessi si parla di trasformazione unitaria o di operatore unitario. Una matrice ortogonale deve essere tale che[5]

$$U^{-1} = U^* \,. \tag{2.29}$$

[5] Per caratterizzare una matrice di rotazione, sviluppiamo il prodotto scalare a primo membro nella (2.28),

$$\begin{aligned} \langle U\mathbf{u}\,,\, U\mathbf{v} \rangle &= \sum_i \overline{\left(\sum_k U_{ik} v_k \right)} \left(\sum_j U_{ij} v_j \right) \\ &= \sum_k \sum_j \left(\sum_i \overline{U_{ik}} U_{ij} \right) \overline{u_k} v_j \,. \end{aligned}$$

Poichè questo deve essere uguale a $\sum_i \overline{u_i} v_i$, si deve avere (ricordando la definizione di matrice aggiunta)

$$\sum_i \overline{U_{ik}} U_{ij} \sum_i U^*_{ki} U_{ij} = \delta_{kj} \quad \text{cioè} \quad U^* U = I \,.$$

Ma U è invertibile e dunque $U^{-1}U = UU^{-1}$, quindi la (2.29)

Nello spazio euclideo la nozione di similitudine o di invarianza rispetto ad una trasformazione di similitudine va ristretta alle rotazioni o trasformazione unitarie. Sono queste che lasciano invariata la struttura euclidea e quindi tutte le proprietà intrinseche che non dipendono dalla scelta di una base. Si osservi che la nozione di matrice autoaggiunta non è in generale invariante per trasformazioni di similitudine, ma è invariante per rotazioni. Se $A = A^\star$, allora anche $(U^{-1}AU)^*$ lo è; infatti $(U^{-1}AU)^* = U^*A^*(U^{-1})^* = U^{-1}AU$. Lo stesso vale per la nozione di matrice ortogonale.

ESERCIZIO 2.7. Dimostrare che il prodotto scalare (2.26) e la norma (2.27) soddisfano rispettivamente le proprietà

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ (simmetria coniugata)

(ii) $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ (linearità nel secondo argomento)

(iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ (= 0 se e solo se $\mathbf{x} = 0$) (positività)

(a) $||\mathbf{x}|| > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

(b) $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha| \, ||\mathbf{x}||$

(c) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (disuguaglianza triangolare)

SPAZI DI PRODOTTO SCALARE Si dice che uno spazio lineare $\mathcal{V}$ è uno *spazio dotato di prodotto scalare* se su di esso è definita una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che ha le stesse proprietà del prodotto scalare in uno spazio euclideo (esercizio 2.7).

N.B. La definizione (2.30) è valida per spazi a dimensione finita o infinita.

Sia $\mathcal{V}$ uno spazio lineare reale o complesso. Un prodotto scalare è un'operazione tra due elementi di $\mathcal{V}$ il cui risultato è un numero (reale o complesso). Questo numero è denotato con $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ e ha le seguenti proprietà:

(i) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}$ (simmetria coniugata)

(ii) $\langle \mathbf{u}, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ (linearità nel secondo argomento)

(iii) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$ (= 0 se e solo se $\mathbf{x} = 0$) (positività)

(2.30)

Si osservi che (i) e (ii) implicano $\langle \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle + \overline{\beta} \langle \mathbf{y}, \mathbf{u} \rangle$. Il prodotto scalare è dunque una forma definita su coppie di vettori che è lineare in un argomento e antilineare nell'altro. Una forma di questo tipo è anche detta *hermitiana* o *sesquilineare*. I prodotti scalari forniscono una ricca sorgente di proprietà. Per esempio, $\langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0$, per ogni vettore $\mathbf{x}$, o $\langle \alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} \rangle = |\alpha|^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

SPAZI NORMATI Si dice che uno spazio lineare è *normato* se su di esso è definita una funzione $||\cdot||$ che ha le stesse proprietà della norma euclidea (esercizio 2.7).

Sia $\mathcal{V}$ uno spazio reale o complesso. Una norma su $\mathcal{V}$ è una funzione che assegna ad ogni elemento di $\mathcal{V}$ un numero reale positivo. Questo numero è denotato con $||\mathbf{x}||$ e ha le seguenti proprietà:

(a) $||\mathbf{x}|| > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

(b) $||\alpha\mathbf{x}|| = |\alpha|\,||\mathbf{x}||$

(c) $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ (disuguaglianza triangolare)

(2.31)

N.B. La definizione (2.31) è valida per spazi a dimensione finita o infinita.

Logicamente, la nozione di norma è indipendente da quella di prodotto scalare, ma, in molti casi, come per lo spazio euclideo, c'è un collegamento tra le due nozioni. In uno spazio di prodotto scalare è sempre possibile definire la seguente norma:

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle} \tag{2.32}$$

Per questa norma vale un'importante disuguaglianza, detta di Cauchy- Schwartz, la cui dimostrazione è riportata a margine.

Disuguaglianza di Cauchy- Schwartz. Sia $\mathcal{V}$ uno spazio reale o complesso con prodotto scalare. Allora per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ si ha

$$|\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle| \leq ||\mathbf{x}||\;||\mathbf{y}|| \tag{2.33}$$

Dimostrazione di (2.33). Se $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle = 0$, la disuguaglianza è banalmente verificata. Assumiamo allora $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle = z \neq 0$, dove z è in generale complesso. Incominciamo con l'ovvia disuguaglianza

$$||\mathbf{x} - \bar{z}\lambda\mathbf{y}|| \geq 0\,,$$

dove λ è un qualunque numero reale. Ora,

$$\begin{aligned} 0 \leq ||\mathbf{x} - \bar{z}\lambda\mathbf{y}||^2 &= \langle \mathbf{x} - \bar{z}\lambda\mathbf{y}\,,\,\mathbf{x} - \bar{z}\lambda\mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle - \bar{z}\lambda\,\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle - z\lambda\,\langle \mathbf{y}\,,\,\mathbf{x}\rangle \\ &\quad + |z|^2\lambda^2\,\langle \mathbf{y}\,,\,\mathbf{y}\rangle \\ &= ||\mathbf{x}||^2 - 2|z|^2\lambda + |z|^2\lambda^2\,||\mathbf{y}||^2 \end{aligned}$$

Essendo λ qualunque, la disuguaglianza vale in particolare per $\lambda = 1/\,||\mathbf{y}||^2$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||\mathbf{x}||^2 - 2\frac{|z|^2}{||\mathbf{y}||^2} + \frac{|z|^2}{||\mathbf{y}||^2} \\ &= ||\mathbf{x}||^2 - \frac{|z|^2}{||\mathbf{y}||^2}\,, \end{aligned}$$

ovvero

$$0 \leq ||\mathbf{x}||^2\,||\mathbf{y}||^2 - |z|^2\,.$$

Ricordando che $z = \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle$, si ottiene

$$|\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle|^2 \leq ||\mathbf{x}||^2\,||\mathbf{y}||^2\,,$$

da cui, prendendo la radice quadrata di ambo i membri, si perviene alla disuguaglianza richiesta. □

Esercizio 2.8. Verificare che che (2.32) è davvero una norma, cioè che sono soddisfatte le proprietà (2.31).

Esercizio 2.9. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^{n\times n}$ delle matrici $n \times n$. Mostrare che

$$\langle A\,,\,B\rangle = \mathrm{Tr}(A^*B)\,,$$

è un prodotto scalare in questo spazio e che la la disuguaglianza di Cauchy- Schwartz è soddisfatta.

2.7 *Basi ortonormali*

Una proprietà importante associata allo spazio euclideo è l'ortogonalità. Questa idea porta alla seguente coppia di definizioni.

Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori in uno spazio lineare $\mathcal{V}$ con prodotto scalare. Se $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle = 0$ i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono detti ortogonali.

(2.34)

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ vettori in uno spazio lineare $\mathcal{V}$ con prodotto scalare e sia $\langle \mathbf{e}_i \, , \, \mathbf{e}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$. Allora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ è detto insieme (o sistema) ortogonale di vettori. (2.35)

Inoltre, un vettore $\mathbf{v}$ in $\mathcal{V}$ tale che $||\mathbf{v}|| = 1$ è detto *unitario* e se un insieme ortogonale è formato da vettori unitari, l'insieme è chiamato *ortonormale*. Per un insieme ortonormale, si ha dunque

$$\langle \mathbf{e}_i \, , \, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij} \, . \tag{2.36}$$

In uno spazio di prodotto scalare è definita la nozione di proiezione ortogonale di un vettore su un altro: se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori allora $\langle \mathbf{u} \, , \, \mathbf{v} \rangle \, / \, ||\mathbf{u}||$ è la *proiezione* di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$ e

$$\mathscr{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{v} = \left\langle \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} \, , \, \mathbf{v} \right\rangle \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = \frac{\langle \mathbf{u} \, , \, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{u}||^2} \, , \tag{2.37}$$

per ogni $\mathbf{v}$ in $\mathcal{V}$, definisce l'operatore $\mathscr{P}_{\mathbf{u}}$ di *proiezione ortogonale* su $\mathbf{u}$. Si osservi che $\mathscr{P}_{\mathbf{u}}$ è un *operatore lineare*, cioè

$$\mathscr{P}_{\mathbf{u}}(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha \mathscr{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} + \beta \mathscr{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{y}$$

per ogni $\alpha, \beta \in K$ e $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Si ossservi l'importanza dell'ordine di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ nella (2.37): se si fosse definita la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$ come $\langle \mathbf{v} \, , \, \mathbf{u} \rangle / \, ||\mathbf{u}||^2$, l'operatore di proiezione non sarebbe stato lineare, ma antilineare. Si osservi inoltre che tutte le definizioni date valgono anche per spazi di dimensione infinita

Per stabilire che un insieme di vettori è linearmente indipendente, in generale occorre mostrare che la condizione (2.3) è verificata. Tuttavia, se l'insieme è ortogonale, l'indipendenza lineare è automaticamente soddisfatta. Vale infatti il seguente teorema.

Un insieme ortogonale $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ nello spazio lineare $\mathcal{V}$ è linearmente indipendente. (2.38)

La seguente definizione segue naturalmente.

In uno spazio lineare con prodotto scalare un insieme ortogonale che è anche una base è chiamato *base ortonormale*. (2.40)

Per spazi di dimensione elevata non è per niente ovvio come generare una base ortonormale. Un modo è di partire da una base qualunque e di usare il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (si veda sotto). Sia come sia, per uno spazio $\mathcal{V}$ di dimensione finita, concettualmente è tutto molto semplice: se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base in

Soluzione di 2.8. Che la norma così definita assuma valori reali positivi, segue immediatamente dal fatto che è una radice quadrata. Vediamo le altre proprietà:

(a) $||\mathbf{x}|| > 0$ se $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ segue dalla positività del prodotto scalare (proprietà (iii) in (2.30)).

(b) $||\alpha \mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \alpha \mathbf{x} \, , \, \alpha \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{x} \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{x} \rangle} = |\alpha| \, ||\mathbf{x}|| \, .$

(c) La disuguaglianza triangolare richiede un pochino di lavoro in più. Consideriamo $||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2$. Questo è uguale a

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{x} + \mathbf{y} \, , \, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y} \, , \, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y} \, , \, \mathbf{y} \rangle \\ &= ||\mathbf{x}||^2 + \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle} + ||\mathbf{y}||^2 \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \left| \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle + \overline{\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle} \right| &= 2 \, |\mathrm{Re} \, \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle| \\ &\leq 2 \, |\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle| \\ &\leq 2 \, ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}|| \, , \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Quindi

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 &= ||\mathbf{x}||^2 + 2 \, \mathrm{Re} \, \langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{y} \rangle + ||\mathbf{y}||^2 \\ &\leq ||\mathbf{x}||^2 + 2 \, ||\mathbf{x}|| \, ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2 \\ &= (\, ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \,)^2 \end{aligned}$$

Quindi $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$, il che stabilisce la disuguaglianza triangolare.

Risulta così dimostrato che $||\mathbf{x}|| = \sqrt{\langle \mathbf{x} \, , \, \mathbf{x} \rangle}$ è una norma. □

Dimostrazione di (2.38). Supponiamo che

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0} \tag{2.39}$$

Prendiamo il prodotto scalare rispetto a $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ di entrambi i membri

$$\langle \mathbf{v}_i \, , \, \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n \rangle = \alpha_i = \langle \mathbf{e}_i \, , \, \mathbf{0} \rangle = 0 \, .$$

Quindi la sola soluzione dell'equazione (2.39) è $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ e dunque l'insieme è linearmente indipendente. □

$\mathcal{V}$, allora *ogni* vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere espresso come combinazione lineare dei vettori della base nella forma

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{e}_k \tag{2.41}$$

Questo segue immediatamente dall'indipendenza lineare dei vettori della base e dal fatto che generano $\mathcal{V}$. Inoltre, se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale le coordinate c_k si determinano prendendo il prodotto scalare dei vettori della base con il vettore $\mathbf{v}$ nel modo seguente:

$$\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \mathbf{e}_k \, , \, \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ik} = c_k \tag{2.42}$$

Ricordando la (2.37), si ha che $\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k = \mathscr{P}_{\mathbf{e}_k}(\mathbf{v})$ è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{e}_k$, per cui la condizione di ortonormalità può essere succintamente espressa come

$$\sum_{k=1}^{n} \mathscr{P}_{\mathbf{e}_k} = \mathscr{I} \, ,$$

dove $\mathscr{I}$ è l'operatore identità in $\mathcal{V}$. Da questa relazione segue immediatamente la (2.41):

$$\mathbf{v} = \mathscr{I}\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \mathscr{P}_{\mathbf{e}_k} \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k$$

Una conseguenza immediata delle (2.41) e (2.42), è il "teorema di Pitagora":

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = ||\mathbf{v}||^2 \, , \tag{2.43}$$

da cui segue che:

> Tutti gli spazi lineari complessi (reali) di dimensione n con prodotto scalare sono unitariamente isomorfi allo spazio euclideo complesso (reale). (2.44)

Basta infatti scrivere un qualunque $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ in termini delle sue coordinate, $\mathbf{v} = (c_1, \ldots, c_n)$ e ricordare il teorema (2.5). Equivalenza unitaria significa che la corrispondenza preserva la norma, ma questo è proprio cioè che asserisce il teorema di Pitagora (2.43). Se si cerca di generalizzare queste proprietà al caso $n = \infty$, si presenta il problema della convergenza della serie (2.41) per $n = \infty$, un problema che richiede le dovute cautele e di cui ci occuperemo nella seconda parte.

PROIEZIONI ORTOGONALI SU SOTTOSPAZI Un teorema di semplice dimostrazione che vale anche per uno spazio vettoriale di dimensione

infinita è il seguente.

Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$ un insieme ortogonale nello spazio lineare $\mathcal{V}$ con prodotto scalare. Allora per ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, il vettore

$$\mathbf{v}^\perp = \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_i \tag{2.45}$$

è ortogonale ad ognuno dei vettori $\mathbf{e}_i$.

Il teorema ha una semplice interpretazione geometrica: sia $\mathcal{W}$ il sottospazio di $\mathcal{V}$ generato dall'insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$, allora il teorema stabilisce che ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ può essere decomposto come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_\perp \tag{2.46}$$

dove

$$\mathbf{v}_{||} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_i \tag{2.47}$$

è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{W}$ e $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$ è nello spazio $\mathcal{W}^\perp$ ortogonale a $\mathcal{W}$ (lo spazio di tutti i vettori ortogonali ai vettori in $\mathcal{W}$). Si veda la figura 2.7. L'operatore che realizza la proiezione è il proiettore ortogonale

$$\mathscr{P} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}_i \,,\, \cdot \rangle \, \mathbf{e}_i \,. \tag{2.48}$$

Dimostrazione di (2.45). Prendendo il prodotto scalare di $\mathbf{v}^\perp$ rispetto a $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v}^\perp \right\rangle &= \left\langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} \rangle - \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle \, \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{e}_k \rangle \\ &= \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} \rangle - \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle \, \delta_{ik} \\ &= \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Perciò $\mathbf{v}^\perp$ è ortogonale a ciascun $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, N$. □

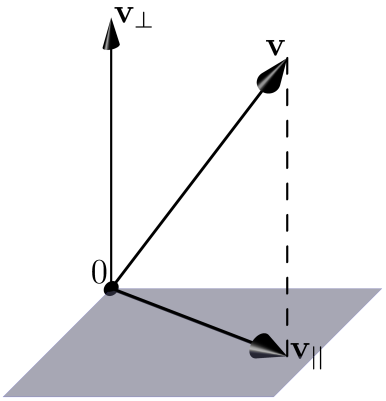
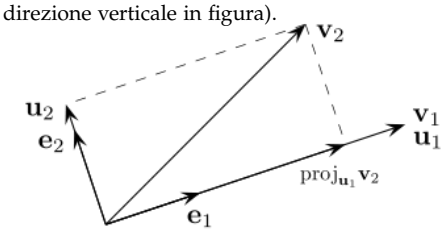


Figura 2.7: Decomposizione ortogonale di un vettore $\mathbf{v}$ come somma della sua componente $\mathbf{v}_{||}$ in $\mathcal{W}$ (il piano orizzontale in figura) e la sua componente verticale $\mathbf{v}_\perp$ nello spazio $\mathcal{W}^\perp$ (la direzione verticale in figura).

Esempio 2.5 (Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt). Questo metodo permette di costruire un insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots\}$ a partire da un insieme linearmente indipendente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$. Il processo di costruzione consiste nell'applicare iterativamente il teorema (2.45) nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 && \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} \\ &\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{e}_1 \,,\, \mathbf{v}_2 \rangle \, \mathbf{e}_1 && \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} \\ &\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{e}_1 \,,\, \mathbf{v}_3 \rangle \, \mathbf{e}_1 - \langle \mathbf{e}_2 \,,\, \mathbf{v}_3 \rangle \, \mathbf{e}_2 && \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} \\ &\ldots \\ &\mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v}_i \rangle \, \mathbf{e}_i && \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{v}_n}{||\mathbf{v}_2||} \\ &\ldots \end{aligned}$$



2.8 *Forme lineari e spazio duale*

Una forma (o funzionale) lineare su uno spazio lineare $\mathcal{V}$ reale o complesso è una funzione lineare da $\mathcal{V}$ a valori reali o complessi, cioè

una funzione $\tilde{p}$ tale che

$$\tilde{p}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\tilde{p}(\mathbf{u}) + \beta\tilde{p}(\mathbf{v}) .$$

Per esempio, l'integrale $I(P) = \int_0^1 P(x)dx$ è una forma lineare sullo spazio dei polinomi e la traccia Tr A è una forma lineare sullo spazio delle matrici $n \times n$. Sia $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$. Allora una forma lineare su $\mathcal{V}$ è

$$\tilde{p}(\mathbf{r}) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n .$$

Denotiamo con α il valore che la forma assume al variare di $(x_1, \ldots x_n)$ in $\mathbb{R}^n$. Per $\alpha = 0$, l'insieme dei punti $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$\tilde{p}(\mathbf{r}) = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = 0$$

è un iperpiano (cioè un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-1$) passante per l'origine. Gli altri valori di α corrispondono a iperpiani paralleli tra loro e all'iperpiano passante per l'origine. Se sembra naturale rappresentare i vettori di $\mathcal{V}$ come "freccette", cioè segmenti orientati centrati nell'origine, è altrettanto naturale pensare alle forme lineari su $\mathbb{R}^n$ come a famiglie di iperpiani paralleli.

L'insieme $\mathcal{V}^*$ di tutti le forme lineari su uno spazio $\mathcal{V}$ è anch'esso uno spazio lineare: se $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ sono elementi di $\mathcal{V}^*$, la loro combinazione lineare $\alpha\tilde{p} + \beta\tilde{q}$ è definita dalla loro azione sugli elementi di $\mathcal{V}$, cioè

$$(\alpha\tilde{p} + \beta\tilde{q})(\mathbf{v}) = \alpha\tilde{p}(\mathbf{v}) + \beta\tilde{q}(\mathbf{v}) .$$

$\mathcal{V}^*$ è detto *spazio duale* di $\mathcal{V}$.

Assumiamo che $\mathcal{V}$ sia di dimensione n. Allora, *fissata* una base $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ in $\mathcal{V}$, i due spazi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$ possono essere messi in una corrispondenza biunivoca che preserva la struttura lineare, da cui segue in particolare che $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$ hanno la stessa dimensione. Questa corrispondenza si stabilisce facilmente costruendo in $\mathcal{V}^*$ una base $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ corrispondente a quella in $\mathcal{V}$. Le forme $\tilde{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ sono così definite:

$$\tilde{e}_i(\mathbf{e}_j) = \delta_{ij} . \tag{2.49}$$

Come si può facilmente verificare, questa è davvero una base in $\mathcal{V}^*$, nel senso che qualunque forma lineare $\tilde{p}$, può essere espresso come combinazione lineare delgli elementi di questa base. In questo modo si stabilisce una corrispondenza tra $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$: il vettore $c_1\mathbf{e}_1 + \ldots c_n\mathbf{e}_n$ è messo in corrispondenza con la forma lineare $c_1\tilde{e}_1 + \ldots c_n\tilde{e}_n$ e viceversa.

È importante aver chiaro che la corrispondenza tra $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$ così stabilita dipende dalla scelta di una base in $\mathcal{V}$, un fatto che talvolta si esprime dicendo che la corrispondenza tra i due spazi non è *canonica*. Tuttavia, se in $\mathcal{V}$ è definito un prodotto scalare, la corrispondenza

è canonica. Questo fatto si stabilisce nel modo seguente. Fissato un vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, la funzione

$$\langle \mathbf{u}\,, \cdot \rangle : \mathcal{V} \to \mathbb{C} \qquad \langle \mathbf{u}\,, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$$

è una forma lineare su $\mathcal{V}$. Infatti, dalle proprietà del prodotto scalare segue che

$$\langle \mathbf{u}\,, \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}\,, \mathbf{x} \rangle + \beta \langle \mathbf{u}\,, \mathbf{y} \rangle$$

Allora al vettore $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ e associata la forma lineare $\langle \mathbf{u}\,, \cdot \rangle \in \mathcal{V}^*$. Si ha così la corrispondenza

$$\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*\,, \quad \Phi(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}\,, \cdot \rangle$$

Viceversa, data una forma lineare $\tilde{p}$ in $\mathcal{V}^*$, si consideri l'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ che annullano la forma, cioè tali che $\tilde{p}(\mathbf{v}) = 0$. Questo insieme è un iperpiano in $\mathcal{V}$ passante per l'origine. Sia $\mathbf{n}$ il vettore unitario ortogonale a questo iperpiano (ce n'e uno solo, perchè l'iperpiano ha dimensione $n - 1$). Allora a $\tilde{p}$ si associ il vettore

$$\mathbf{p} = \tilde{p}(\mathbf{n})\mathbf{n}\,.$$

Si può facilmente verificare che questa associazione è l'inversa della Φ,

$$\Phi^{-1} : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}\,, \quad \Phi^{-1}(\tilde{p}) = \tilde{p}(\mathbf{n})\mathbf{n}$$

Fine della costruzione della corrispondenza biunivoca canonica tra $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$.

Esercizio 2.10. Si consideri su $\mathbb{R}^3$, con il suo prodotto scalare naturale, la forma lineare $\tilde{p}(x, y, z) = ax + by + cz$. A quale vettore in $\mathbb{R}^3$ corrisponde?

Soluzione. Consideriamo $ax + by + cz = 0$. Questa è l'equazione di un piano passante per l'origine con vettore normale

$$\mathbf{n} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Si ha

$$\tilde{p}(\mathbf{n}) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Allora a $\tilde{p}$ corrisponde il vettore

$$\mathbf{p} = \tilde{p}(\mathbf{n})\mathbf{n} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\mathbf{n} = (a, b, c)\,,$$

in accordo con (2.49). □

Complementi

La notazione di Dirac

Con in mente le applicazioni alla meccanica quantistica, Dirac introdusse la notazione dei bra e dei ket per descrivere i vettori di uno spazio di lineare $\mathcal{V}$ con prodotto scalare. Questa notazione può essere descritta nel seguente modo. Rappresentiamo un vettore $\mathbf{u}$ di $\mathcal{V}$ con il simbolo $|\mathbf{u}\rangle$, che chiameremo vettore "ket", oppure con il simbolo $\langle\mathbf{u}|$, che chiameremo vettore "bra". Introduciamo le seguenti regole per manipolare i simboli di bra e ket

$$|\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}\rangle = \alpha|\mathbf{u}\rangle + \beta|\mathbf{v}\rangle \qquad \langle\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}| = \overline{\alpha}\langle\mathbf{u}| + \overline{\beta}\langle\mathbf{v}|$$

Il prodotto scalare ("braket"[6]) risulta, simbolicamente, il prodotto dei simboli bra e ket,

$$\langle\mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}\rangle$$

La notazione rende così manifesto che il prodotto scalare è una forma hermitiana (lineare in un argomento e antilineare nell'altro). Si potrebbe dare a questa notazione anche un significato matematico e associare i "bra" con il duale $\mathcal{V}^*$ di $\mathcal{V}$, ma non è necessario. In virtù dell'identificazione canonica tra $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}^*$, si può pensare a questa notazione solo come ad un artificio conveniente. Per esempio, è particolarmente conveniente per denotare l'operatore di proiezione ortogonale su un vettore $\mathbf{v}$ con

$$\frac{|\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{v}|}{\langle\mathbf{v}\,,\,\mathbf{v}\rangle} = |\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|\,, \qquad \mathbf{e}_\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$$

per cui la proiezione di $\mathbf{u}$ lungo $\mathbf{v}$ risulta $|\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\,\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}\,,\,\mathbf{u}\rangle$. Con la notazione di Dirac, risulta particolarmente trasparente che il quadrato del proiettore sia il proiettore stesso: $|\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}||\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}| = |\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}|$, in quanto $\langle\mathbf{e}_\mathbf{v}||\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle\mathbf{e}_\mathbf{v}\,,\,\mathbf{e}_\mathbf{v}\rangle = 1$.

Se $\mathcal{W}$ è un sottospazio di $\mathcal{V}$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ è una base ortonormale in esso, l'operatore di proiezione ortogonale su $\mathcal{W}$ si rappresenta come

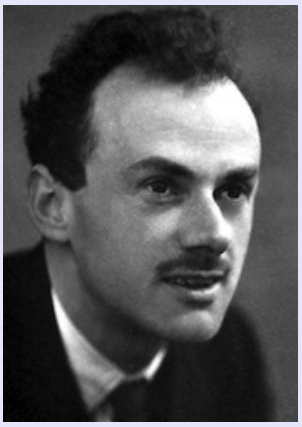
$$\mathscr{P} = \sum_k |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_k|$$

per cui la proiezione di un vettore $\mathbf{v}$ su $\mathcal{W}$ è data da

$$\mathscr{P}|\mathbf{v}\rangle = \sum_k |\mathbf{e}_k\rangle\langle\mathbf{e}_k||\mathbf{v}\rangle \equiv \sum_k \langle\mathbf{e}_k\,,\,\mathbf{v}\rangle\,\mathbf{e}_k$$

Infine, che un sistema ortonormale di vettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ è una base in notazione di Dirac si rappresenta così:

$$\sum_k |\mathbf{e}_n\rangle\langle\mathbf{e}_k| = I\,,$$



Paul Dirac (1902–1984) è stato un fisico inglese che ha dato contributi notevoli allo sviluppo sia della meccanica quantistica sia dell'elettrodinamica quantistica. Tra le sue scoperte più importanti, l'equazione di Dirac, che descrive i fermioni relativistici.

[6] Risulta così svelato l'arcano della terminologia "bra" e "ket": "braket" in inglese vuol dire "parentesi" (e ci sono ovviamente due tipi di parentesi, quelle che hanno la gobba a sinistra e quelle che la hanno a destra). Questa terminologia, che riflette anche un sottile humor, è di Dirac.

dove I è l'operatore identità in $\mathcal{V}$. La notazione è efficace: rende manifesto che si ha una base quando "non si perde niente", cioè quando l'operatore $\sum_k |\mathbf{e}_k\rangle\langle\mathbf{e}_k|$ proietta su tutto lo spazio, e quindi è l'operatore identità.

3
Autovalori e autovettori

Indice

3.1 *Operatori autoaggiunti e unitari* 49
3.2 *Autovalori e autovettori* 51
3.3 *Teorema spettrale per operatori autoaggiunti* 56
3.4 *Teorema spettrale per operatori normali* 58
3.5 *Funzione di un operatore* 59
3.6 *Assi principali di inerzia* 62
3.7 *Rotazioni e decomposizione di un operatore lineare* 63

3.1 Operatori autoaggiunti e unitari

Sia $\mathscr{A}$ un operatore su uno spazio di prodotto scalare $\mathcal{V}$. Se $\mathcal{V}$ è di dimensione n, gli elementi della matrice A che rappresenta $\mathscr{A}$ rispetto ad una base $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono definiti da

$$\mathscr{A}(\mathbf{e}_j) = \sum_j A_{ij}\mathbf{e}_i \,. \tag{2.22}$$

Se la base è ortonormale, cioè $\langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, allora

$$A_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathscr{A}\mathbf{e}_j \rangle \tag{3.1}$$

Un operatore lineare $\mathscr{A}$ possiede un aggiunto $\mathscr{A}^*$ se

$$\langle \mathbf{u} \,,\, \mathscr{A}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathscr{A}^*\mathbf{u} \,,\, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \,. \tag{3.2}$$

Passando all'azione dell'operatore sugli elementi della base, l'equazione precedente diventa

$$A_{ij} = \langle \mathbf{e}_i \,,\, \mathscr{A}\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathscr{A}^*\mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{e}_j \rangle = \left\langle \sum_k [A^*]_{ki}\mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{e}_j \right\rangle = \sum_k \overline{[A^*]_{ki}}\delta_{kj} = \overline{[A^*]_{ji}} \,,$$

da cui $[A^*]_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Quindi ogni operatore lineare $\mathscr{A}$ su uno spazio di dimensione finita, rappresentato da una matrice A in una base ortonormale, ha un (solo) aggiunto rappresentato dalla matrice aggiunta A^*. Segue dalla definizione che $\mathscr{A}^{**} = \mathscr{A}$. In spazi di dimensione infinita non tutti gli operatori lineari hanno un aggiunto.

La struttura di uno spazio di prodotto scalare $\mathcal{V}$ è lasciata invariata dalle trasformazioni invertibili di $\mathcal{V}$ che non cambiano il prodotto scalare tra vettori, cioè dagli operatori lineari invertibili $\mathscr{U}$ tali che

$$\langle \mathscr{U}\,\mathbf{u}\,,\,\mathscr{U}\,\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}\,,\,\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{3.3}$$

Un operatore $\mathscr{U}$ che soddisfa la (3.3) è detto *operatore unitario* o *rotazione*. Si può verificare facilmente che (3.3) è verificata se e solo se l'inverso di $\mathscr{U}$ è uguale al suo aggiunto,

$$\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{U}^* \tag{3.4}$$

equivalentemente, se e solo se una sua rappresentazione matriciale U rispetto ad una base ortonormale è una matrice ortogonale, cioè soddisfa la (2.29) o, equivalentemente, in termini della proposizione seguente.

U è una matrice ortogonale se e solo se
$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix},$$
dove $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ è una qualunque base ortonormale in $\mathbb{C}^n$ (dove ciascun $\mathbf{e}_i$ va inteso come un vettore colonna). (3.5)

Esercizio 3.1. Mostrare che se $U = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix}$, allora

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n^* \end{bmatrix}$$

dove $\mathbf{e}_i^*$ sono vettori riga, ottenuti per trasposizione dai vettori colonna $\mathbf{e}_i$ e per coniugazione complessa delle componenti. Si osservi che $U^{-1}U = I$ è equivalente alle condizioni di ortonormalità $\mathbf{e}_i^*\mathbf{e}_j = \langle \mathbf{e}_i\,,\,\mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ (il primo prodotto è il prodotto righe per colonne di un vettore riga con un vettore colonna).

Esercizio 3.2. Mostrare che il proiettore ortogonale $\mathscr{P}_{\mathbf{v}}$ sul vettore $\mathbf{v}$ è rappresentato dalla matrice $P = \mathbf{v}\mathbf{v}^*$.

Esercizio 3.3. Mostrare che il proiettore ortogonale $\mathscr{P}$ definito dalla (2.48) è rappresentato dalla matrice $P = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^*$. Mostrare inoltre che $P = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{f}_i\mathbf{f}_i^*$, dove $\mathbf{f}_i$ è un'altro sistema ortonormale nel sottospazio di $\mathcal{V}$ generato dall'insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$.

ESERCIZIO 3.4. Mostrare che il prodotto di due o più operatori unitari è un operatore unitario e che che il prodotto di di due o più operatori autoaggiunti *non* è autoaggiunto. Quali condizioni devono soddisfare gli operatori autoaggiunti affichè il loro prodotto sia ancora un operatore autoaggiunto?

OPERATORI NOTEVOLI IN SPAZI DI PRODOTTO SCALARE Anche in vista delle applicazioni alla fisica, le seguenti classi di operatori lineari in uno spazio con prodotto scalare sono particolarmente rilevanti.

(i) *Operatori unitari*: operatori $\mathscr{U}$ tali che $\mathscr{U}^{-1} = \mathscr{U}^*$.

(ii) *Operatori autoaggiunti*: operatori $\mathscr{A}$ tali che $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.

(iii) *Proiettori ortogonali*: operatori autoaggiunti $\mathscr{P}$ tali che $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$.

(iv) *Operatori normali*: operatori $\mathscr{N}$ tali che $\mathscr{N}\mathscr{N}^* = \mathscr{N}^*\mathscr{N}$.

Nota. Gli operatori autoaggiunti sono ovviamente normali; sono normali anche gli operatori unitari in quanto $\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^{-1}$ e $\mathscr{U}^{-1}\mathscr{U} = \mathscr{U}\mathscr{U}^{-1}$.

3.2 *Autovalori e autovettori*

Un operatore $\mathscr{A}$ su uno spazio lineare $\mathcal{V}$ di dimensione n è detto diagonalizzabile se esiste una base in cui esso è rappresentato da una matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Sia A una qualunque rappresentazione matriciale dell'operatore lineare $\mathscr{A}$. Allora $\mathscr{A}$ è diagonalizzabile se e solo A è simile a una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS$ è una matrice diagonale. Questo significa che per essere diagonalizzabile, A deve avere la seguente struttura

$$A = SDS^{-1} \tag{3.7}$$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI UNA MATRICE Una matrice invertibile S può essere sempre scritta nella forma (2.15)

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

dove $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono vettori colonna che formano una base in $\mathbb{C}^n$. Lo scopo è trovare $A = SDS^{-1}$ per una qualche matrice diagonale D con i numeri $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lungo la sua diagonale. Quindi $AS = SD$, cioè

$$\begin{bmatrix} A\mathbf{v}_1 & \ldots & A\mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \ldots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

avendo scritto le colonne di entrambi i membri dell'equazione $AS = SD$. Quindi, A è diagonalizzabile, cioè ha la struttura (3.7), *se e solo se esistono numeri* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *e n vettori* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *tali che*

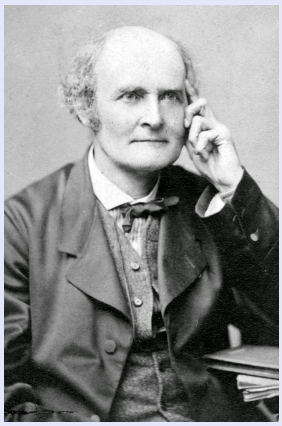
$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \tag{3.10}$$

Questo dà luogo alla seguente importante definizione.

Un vettore non nullo v è detto *autovettore* della matrice A con *autovalore* λ se
$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{3.11}$$

E la (3.10) fornisce il seguente importante criterio di diagonalizzabilità.

Una matrice $n \times n$ è diagonalizzabile, può cioè essere scritta nella forma $A = SDS^{-1}$, per qualche matrice matrice diagonale D e matrice invertibile S, se e solo se esiste una base formata da autovettori. In questo caso la matrice S è formata da questi vettori come colonna e la matrice diagonale ha gli autovalori lungo la sua diagonale. (3.12)



Arthur Cayley (1821–1895) è stato un matematico inglese, che diede un forte contributo alla crescita della matematica pura nel mondo anglosassone. A Cayley si devono la introduzione del prodotto di matrici e la dimostrazione del teorema di Hamilton-Cayley cioè del fatto che ogni matrice quadrata è una radice del suo polinomio caratteristico. Fu inoltre il primo a esprimere la nozione generale di gruppo come insieme munito di una operazione binaria che soddisfa determinati assiomi (mentre in precedenza gruppo era sinonimo di gruppo di permutazioni. A lui si deve anche il teorema che porta il suo nome che afferma l'isomorfismo di ogni gruppo con un gruppo di permutazioni.

EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI L'equazione $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ può ovviamente essere riscritta come

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{v} = 0\,,$$

dove I è la matrice identità. Questa riscrittura rende evidente che λ è un autovalore di A se e solo se la matrice e $A - \lambda I$ è *singolare.* Poiché una matrice è singolare se e solo se il suo determinante è nullo, λ è un autovalore di A, se e solo se è soluzione dell'equazione

$$\det(A - \lambda I) = 0\,. \tag{3.13}$$

Questa equazione è detta *equazione agli autovalori* (o "equazione secolare" o "equazione caratteristica") di A. Se calcoliamo il determinante, otteniamo un polinomio di grado n, che è detto *polinomio caratteristico* di A,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \tag{3.14}$$

e chiaramente gli autovalori di $\mathscr{A}$ sono le sue radici.

Trovare gli autovalori di un operatore su uno spazio di dimensione n è dunque equivalente a trovare le radici del polinomio caratteristico. A questo proposito ricordiamo che non c'è una formula generale per trovare le radici di polinomi di grado superiore al quattro (nota a margine a p. 15) e anche le formule per le cubiche (p. 7) o le quartiche sono abbastanza orrende. Di solito in problemi concreti (a differenza degli eserciziari per gli studenti) si ricorre a metodi numerici.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI DI UN OPERATORE La vera importanza del concetto di autovalore sta nelll'essere una caratteristica intrinseca, cioè invariante per trasformazione di similitudine:

$$\det(B - \lambda I) = \det\left[S^{-1}\det(A - \lambda I)S\right] = \det(A - \lambda I)$$

Per cui gli autovalori di B e A sono gli stessi.

Le nozioni di autovalore, autovettore e polinomio caratteristico sono dunque proprietà intrinseche dell'operatore $\mathscr{A}$ rappresentato da una matrice A: uno scalare λ è *autovalore* di $\mathscr{A}$ se esiste un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tale che $\mathscr{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ e ogni vettore che soddisfa questa equazione è un *autovettore* di $\mathscr{A}$ con autovalore λ. L'insieme di tutti questi vettori è un sottospazio di $\mathcal{V}$ (Esercizio: dimostrare che è uno spazio lineare) chiamato *autospazio* di λ. Inoltre, $p(\lambda) = \det(\mathscr{A} - \lambda I)$ è il polinomio caratteristico dell'operatore $\mathscr{A}$, le cui radici sono gli autovalori di $\mathscr{A}$.

Per il teorema fondamentale dell'algebra (1.11), un polinomio di grado n ha sempre n radici complesse, anche se alcune di queste possono avere molteplicità algebrica. Ne segue che:

> Un operatore $\mathscr{A}$ su uno spazio lineare complesso di dimensione n ha n autovalori (non necessariamente distinti) e almeno un autovettore. (3.18)

Quando un autovalore è una radice del polinomio caratteristico con molteplicità algebrica > 1 si dice che è *degenere*. L'insieme degli autovalori di $\mathscr{A}$ si chiama *spettro* di $\mathscr{A}$. Quando gli autovalori di $\mathscr{A}$ sono tutti distinti (assenza di degenerazione), si dice che l'operatore ha *spettro semplice* o che gli autovalori sono semplici.

Il seguente teorema è molto utile e la sua dimostrazione è riportata a margine.

> Autovettori non nulli, relativi ad autovettori distinti, sono linearmente indipendenti. (3.19)

Trovare gli autovalori di un operatore è dunque il primo passo per diagonalizzarlo. Il secondo passo è trovare gli autovettori.

Dimostrazione di (3.19). Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ autovettori associati agli autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leq n$ di $\mathscr{A}$, e supponiamo che *non* siano linearmente indipendenti. Allora esisterà una combinazione lineare non banale di essi che è pari al vettore nullo,

$$c_1\mathbf{v}_1 + \ldots c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

Si scelga la combinazione lineare che abbia il minor numero di coefficienti non nulli (questo è il trucco). Tale scelta è ovviamente possibile. Supponiamo $c_1 \neq 0$ e facciamo agire A su ambo i membri di (3.15),

$$\mathscr{A}(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots c_r\mathbf{v}_r) = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots c_r\lambda_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}\,. \tag{3.16}$$

Sottraiamo $\lambda_1 \times$(3.15) dalla (3.16) e otteniamo

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + \ldots + c_r(\lambda_r - \lambda_1)\mathbf{v}_r = \mathbf{0} \tag{3.17}$$

se $B = S^{-1}AS$ è una matrice simile ad A, il suo polinomio caratteristico è lo stesso di A. Infatti, ricordando che il determinante è invariante per trasformazioni di similitudine (sezione 2.5), si ha immediatamente(si osservi che il primo termine si cancella). Questa è di nuovo una combinazione lineare dei vettori. è possibile che tutti i coefficienti siano nulli? Poiché gli autovalori sono distinti, questo dipende solo dalla scelta dei c_k. Se tutti i c_k fossero nulli, allora la (3.15) diventerebbe $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, quindi anche c_1 sarebbe nullo in contrasto con l'ipotesi che la (3.15) fosse una combinazione lineare non banale. Quindi anche la (3.17) deve essere una combinazione lineare non banale. Ma essa ha chiaramente meno coefficienti non nulli della (3.15) poiché c_1 non è più presente. Questo contraddice la nostra scelta iniziale di (3.15) come combinazione lineare non banale con il minor numero di coefficienti non nulli. Poichè si è raggiunta una contraddizione, il teorema rsulta dimostrato. □

Questi si trovano separatamente, cercando i vettori che annullano $A - \lambda I$ per ogni autovalore λ. Se ce ne sono abbastanza di linearmente indipendenti in modo da formare una base in $\mathcal{V}$, per la (3.12), il gioco è fatto. Questo però, in generale, può non funzionare e la presenza di autovalori degeneri è un ostacolo alla diagonalizzabilità dell'operatore.

ESEMPIO 3.1. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha polinomio caratteristico $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, quindi l'autovalore $\lambda = 1$ ha molteplicità 2. Ma a parte $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ non ci sono altri autovettori indipendenti da questo. Questa è la ragione per cui A non è diagonalizzabile.

Tuttavia, se gli autovalori sono semplici, cioè sono radici semplici di $p(\lambda)$ (o detto in altri termini, lo spettro dell'operatore è non degenere), il gioco funziona sempre:

> Se lo spettro di operatore $\mathscr{A}$ su uno spazio $\mathcal{V}$ di dimensione n è semplice, allora $\mathscr{A}$ è diagonalizzabile. (3.20)

ESERCIZIO 3.5. Diagonalizzare la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Soluzione. Occorre trovare autovalori e autovettori. I passi sono i seguenti.

Passo n^o 1. Trovare il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-4-\lambda) - 5(-1) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

Passo n^o 2. Trovare le radici di $p(\lambda)$.

$$\lambda_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = -3$$

Gli autovalori sono semplici, dunque la matrice è diagonalizzabile.

Passo n^o 3. Trovare gli autovettori. Questo deve essere fatto separatamente per ciascun autovalore.

Autovettore per $\lambda_1 = 1$. L'autovettore $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ risolve $(A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 = 0$, cioè

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x + 5y &= 0 \\ -x - 5y &= 0 \end{cases}.$$

Naturalmente queste equazioni non sono indipendenti, una si può buttare via e trovare una qualunque soluzione non banale di $x + 5y = 0$. Si può scegliere, ad esempio, $x = -5$ e $y = 1$, da cui $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dimostrazione di (3.20). Segue immediatamente dalla (3.19): se ci sono n autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora per la (3.19) ci sono n autovettori linearmenti indipendenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, che formano dunque una base. Se formano una base, possiamo allora applicare il criterio (3.12) e ottenere

$$A = SDS^{-1},$$

dove

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

e

$$S = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}.$$

□

Autovettore per $\lambda_2 = -3$. Procedendo in modo analogo, si trova che un possibile autovettore per λ_2 è $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix}$.

Passo n^o 4. Infine, si scrive la forma diagonale $A = SDS^{-1}$. Chiaramente,

$$S = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Occorre trovare l'inversa di S, che è

$$\begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -5/4 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -5/4 \end{bmatrix}$$

è la decomposizione diagonale di A. □

Esercizio 3.6. Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ e sia $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcolare $A^{2000}\mathbf{w}$.

Soluzione. Naturalmente, si può usare un calcolatore e moltiplicare questa matrice 2000 volte. Ma se la matrice è grande, e non semplicemente 2×2, questo potrebbe richiedere una notevole quantità di tempo. Un modo migliore è di usare la decomposizione diagonale di A. Si osservi la rimarchevole proprietà di cancellazione telescopica:

$$A^{2000} = \left(SDS^{-1}\right)\left(SDS^{-1}\right)\left(SDS^{-1}\right)\cdots\left(SDS^{-1}\right) = SD^{2000}S^{-1}$$

Ora, calcolare D^{2000} è banale:

$$D^{2000} = \begin{bmatrix} 1^{2000} & 0 \\ 0 & (-3)^{2000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2000} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A^{2000}\mathbf{w} = SD^{2000}S^{-1}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{2000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -5/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 - 2 \cdot 3^{2000} \\ -1 + 2 \cdot 3^{2000} \end{bmatrix}$$

□

3.3 *Teorema spettrale per operatori autoaggiunti*

La chiave di volta per trovare un criterio sufficiente di diagonalizzabilità molto più generale di (3.20) è la seguente proposizione

> Se $\mathscr{A}$ lascia invariata la direzione di un vettore $\mathbf{v}$, allora $\mathscr{A}^*$ lascia invariato il sottospazio $\mathcal{W}$ di tutti i vettori ortogonali a $\mathbf{v}$. (3.21)

La dimostrazione (semplice) è riportata a margine, qui preme che sia chiaro l'enunciato. "Lasciare invariata la direzione di $\mathbf{v}$" è un altro modo per dire che $\mathbf{v}$ è un autovettore di $\mathscr{A}$, poiché se $\mathscr{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, il vettore $\mathbf{v}$ viene "stirato" (o accorciato o moltiplicato per una fase), ma non cambia la sua direzione. Per "lasciare invariato il sottospazio di tutti i vettori ortogonali a $\mathbf{v}$" si intende che quando $\mathscr{A}^*$ agisce su un qualunque vettore ortogonale a $\mathbf{v}$, lo trasforma in un altro che è ancora ortogonale a $\mathbf{v}$. Infine, la proposizione presuppone che l'insieme dei vettori ortogonali a $\mathbf{v}$ sia un sottospazio, e questo è lasciato come (facilissimo) esercizio.

Dimostrazione di (3.21). Si consideri il prodotto scalare $\langle \mathbf{u}, \mathscr{A}\mathbf{v}\rangle = \langle \mathscr{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Se $\mathbf{v}$ è tale che $\mathscr{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\lambda \neq 0$, allora $\langle \mathbf{u}, \mathscr{A}\mathbf{v}\rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathscr{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Quindi se $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$, cioè $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, anche il vettore $\langle \mathscr{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, cioè anche $\mathscr{A}^*\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$. □

Il seguente teorema è *molto* importante.

> Se $\mathscr{A}$ è un operatore auto-aggiunto su uno spazio $\mathcal{V}$ di dimensione n dotato di prodotto scalare, allora $\mathscr{A}$ è diagonalizzabile. (3.22)

Questo è il *teorema spettrale* per gli operatori autoaggiunti in spazi lineari di dimensione finita. Mostreremo perché funziona e successivamente ne daremo una formulazione più generale.

L'idea per dimostrare (3.22) è semplice ed è la seguente. Per la (3.18) esiste sempre almeno un autovettore $\mathbf{v}_1$ di un qualunque operatore $\mathscr{A}$ associato ad un autovalore (eventualmente degenere) λ_1; per comodità, prendiamo $\mathbf{v}_1$ con norma 1. Per la (3.21), il sottospazio $\mathcal{W}$ di tutti i vettori $\mathbf{u}$ ortogonali a $\mathbf{v}_1$ è lasciato invariato da $\mathscr{A}^*$, ma se $\mathscr{A}$ è autoaggiunto, $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$, esso è lasciato invariato anche da $\mathscr{A}$. Scegliamo una base ortonormale in $\mathcal{W}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$ e consideriamo in $\mathcal{V}$ la base ortonormale $\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$. Se A rappresenta l'operatore rispetto ad una base di partenza, in questa nuova base, $\mathscr{A}$ è rappresentato dalla matrice $U_1^{-1}AU_1$, dove U_1 è la matrice ortogonale $U_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 & \ldots & \mathbf{u}_{n-1}\end{bmatrix}$. Poiché $U_1^{-1} = U_1^*$, si ha (si veda l'esercizio 3.1)

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n-1}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & A\mathbf{u}_1 & \ldots & A\mathbf{u}_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & \ldots & *\end{bmatrix}$$

dove gli asterischi denotano gli elementi di matrice di A ristretta allo spazio $\mathcal{W}$ rispetto alla base $\mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$. Ma questa matrice rappresenta $\mathscr{A}$ ristretto a $\mathcal{W}$, che è autoaggiunto su $\mathcal{W}$. Chiamiamo $\mathscr{A}_2$ questo operatore. Adesso possiamo ripetere la procedura : "per la (3.18) esiste una autovettore $\mathbf{v}_2$ di un $\mathscr{A}_2$ con autovalore associato λ_2 che ..." e iterando la procedura si trasforma A in

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

La matrice U che realizza la trasformazione, essendo il prodotto di matrici ortogonali, è anch'essa ortogonale, ed è formata dagli autovettori $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$, opportunamente normalizzati a 1,

$$U = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Si osservi che l'eventuale presenza di autovalori degeneri non influisce minimamente sulla procedura. Fine della dimostrazione di (3.22).

Il criterio di diagonalizzabilità (3.12) è dunque soddisfatto e la struttura di una matrice che rappresenta un operatore autoaggiunto è

$$A = UDU^{-1} = UDU^* \,. \tag{3.24}$$

Sviluppando i prodotti,

$$A = UDU^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* \\ \ldots \\ \mathbf{v}_n^* \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$$

Ma $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^*$ sono i proiettori ortogonali sugli autovettori (esercizio 3.2) e se un autovalore è degenere ad esso corrisponderà la somma dei proiettori su gli autovettori corrispondenti, cioè il proiettore sull'autospazio associato all'autovalore. Quindi,

$$A = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k P_k \,, \tag{3.25}$$

dove $r \leq n$, λ_k sono autovalori distinti e le matrici P_k proiettano sugli autospazi associati agli autovalori λ_k. Poiché questi sottospazi di $\mathcal{V}$ sono ortogonali tra loro, si ha $P_k P_j = 0$ per $k \neq j$; inoltre, essendo U una matrice ortogonale, $\sum_k P_k = I$.

La (3.25) è detta *rappresentazione spettrale* di A e la corrispondente formula

$$\mathscr{A} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathscr{P}_k \,, \tag{3.26}$$

è detta *rappresentazione spettrale* dell'operatore $\mathscr{A}$.

Per esempio, alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

corrispondono gli autovalori distinti $3, 1$ e 5 e i proiettori

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Come si può verificare, le P_i sono delle proiezioni, ossia $P_i^2 = P_i$, e

$$A = 3P_1 + P_2 + 5P_3\,, \quad P_1 + P_2 + P_3 = I\,, \quad P_iP_j = 0\,, i \neq j\,.$$

Esercizio 3.7. Sia $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcolare A^{2000}.

Soluzione. Questo è una variante dell'esercizio 3.6 e può essere risolto nello stesso modo usando la rappresentazione diagonale della matrice. Essendo la matrice autoaggiunta, la rappresentazione diagonale è la rappresentazione spettrale e quindi

$$A^{2000} = \left(\sum_k \lambda_k P_k \right)^{2000}$$

Ricordando che $P_kP_j = 0$ per $k \neq j$ e $P_k^2 = P_k$, si conclude che tutti i termini misti dell'elevazione a potenza si annullano e resta

$$A^{2000} = \sum_k \lambda_k^{2000} P_k^{2000} = \sum_k \lambda_k^{2000} P_k\,.$$

Si lascia come facile esercizio mostrare che gli autovalori di A sono 1 e -1 e determinare le matrici di proiezione P_1 e P_{-1} corrispondenti. □

3.4 *Teorema spettrale per operatori normali*

Si può dimostrare che la rappresentazione spettrale (3.26) vale per una classe più ampia di operatori. Si tratta degli operatori normali, cioè degli operatori $\mathscr{A}$ che commutano con il loro aggiunto, cioè tali che $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$. Per questi operatori vale la seguente proposizione.

Se $\mathscr{A}$ è normale, ogni autovettore di $\mathscr{A}$ è autovettore di $\mathscr{A}^*$. In particolare, se $\mathscr{A}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$, allora $\mathscr{A}^*(\mathbf{v}) = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. (3.27)

Dimostrazione di (3.27). Preliminarmente, si mostra che se $\mathscr{N}$ è normale, allora $\mathscr{N}(\mathbf{v}) = 0$ se e solo se $\mathscr{N}^*(\mathbf{v}) = 0$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{N}\mathbf{v}\,, \mathscr{N}\mathbf{v}\rangle &= \langle \mathbf{v}\,, \mathscr{N}^*\mathscr{N}\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}\,, \mathscr{N}\mathscr{N}^*\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathscr{N}^*\mathbf{v}\,, \mathscr{N}^*\mathbf{v}\rangle\,. \end{aligned}$$

Quindi per la proprietà (iii) del prodotto scalare, $\mathscr{N}(\mathbf{v}) = 0$ se e solo se $\mathscr{N}^*(\mathbf{v}) = 0$. Il secondo passo consiste nella constatazione che se $\mathscr{A}$ è normale, lo è anche $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ (verificare questo à lasciato per esercizio). Si consideri adesso $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})(\mathbf{v}) = 0$. Essendo $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ normale, per quanto visto sopra, $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})(\mathbf{v}) = 0$ se e solo se $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})^*(\mathbf{v}) = 0$. Poiché $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})^*(\mathbf{v}) = (\mathscr{A}^* - \overline{\lambda}\mathscr{I})$, ne segue che $\mathbf{v}$ è autovettore di $\mathscr{A}$ associato all'autovalore λ se e solo se $\mathbf{v}$ è autovettore di $\mathscr{A}^*$ associato all'autovalore $\overline{\lambda}$. □

Sulla base di questo e delle (3.18) e (3.21) si può applicare una procedura di diagonalizzazione di $\mathscr{A}$ del tutto analoga a quella per gli operatori autoaggiunti. Lasciamo come esercizio (non semplicissimo) di riempire i dettagli. Si arriva così alla forma più generale del teorema spettrale:

Teorema spettrale. Sia $\mathscr{A}$ un operatore normale su uno spazio complesso finito-dimensionale $\mathcal{V}$ con prodotto scalare. Esistono allora dei proiettori ortogonali $\mathscr{P}_1, \dots \mathscr{P}_r$ su $\mathcal{V}$ e degli scalari $\lambda_1, \dots \lambda_r$ tali che

$$\text{(i)}\ \ \mathscr{A} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \mathscr{P}_k. \tag{3.28}$$

$$\text{(ii)}\ \ \sum_{k=1}^{r} \mathscr{P}_k = \mathscr{I}.$$

$$\text{(iii)}\ \ \mathscr{P}_i \mathscr{P}_j = 0 \text{ per } i \neq j.$$

I seguenti fatti si verificano facilmente (le loro dimostrazioni sono riportate a margine).

(a) Gli autovettori associati ad autovalori distinti di un operatore normale sono ortogonali.

(b) Gli autovalori di un operatore autoaggiunto sono reali.

(c) Gli autovalori di un operatore unitario sono numeri complessi di modulo 1.

Il teorema spettrale è uno degli strumenti più utili nelle applicazioni dell'algebra lineare. Nel seguito, discuteremo brevemente tre applicazioni: la definizione di funzioni arbitrarie di un operatore normale e la soluzione delle equazioni differenziali lineari, nella sezione 3.5, e la determinazione degli assi principali di inerzia in meccanica, nella sezione 3.6.

Dimostrazione di (a), (b) e (c). (a) Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ autovettori di $\mathscr{A}$ associati rispettivamente agli autovalori distinti λ e μ. Mostriamo che $\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$:

$$\begin{aligned} \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \overline{\lambda} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathscr{A}^* \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathscr{A} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mu \mathbf{v} \rangle \\ &= \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle . \end{aligned}$$

Ma $\lambda \neq \mu$ per ipotesi, dunque $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

(b) Sia λ un autovalore di $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$ con autovettore $\mathbf{v}$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathscr{A} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathscr{A}^* \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathscr{A} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Essendo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$, ne segue che $\lambda = \overline{\lambda}$, cioè che λ è reale.

(c) Sia λ autovalore di un operatore unitario $\mathscr{U}$ con autovettore $\mathbf{v}$ di norma 1. Allora

$$\begin{aligned} 1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathscr{U} \mathbf{v}, \mathscr{U} \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \lambda \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \overline{\lambda} \lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

Quindi $|\lambda| = 1$.

□

3.5 *Funzione di un operatore*

Sia f una funzione a valori reali e $\mathscr{A}$ un operatore autoaggiunto. L'operatore

$$f(\mathscr{A}) = \sum_k f(\lambda_k) \mathscr{P}_k \tag{3.29}$$

è detto la funzione f dell'operatore $\mathscr{A}$. Essendo f a valori reali e $\mathscr{P}_k$ autoaggiunti anche $f(\mathscr{A})$ è autoaggiunto.

Che la (3.29) sia una buona definizione, lo si può verificare provandola per le potenze come è stato fatto nell'esercizio 3.7: $f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^n$,

calcolato secondo la (3.29), in effetti coincide con l'usuale elevazione a potenza di un operatore per cui $\mathscr{A}^n$ è rappresentato dalla matrice A^n.

Uno dei casi più importanti della (3.29) è quando $f(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^{-1}$, l'operatore inverso (se esiste), da cui segue che gli autovalori dell'operatore inverso sono gli inversi degli autovalori di $\mathscr{A}$. Questo implica che la funzione inversa è ben definita se 0 non è un autovalore di $\mathscr{A}$, cioè se non esiste alcun vettore $\mathbf{v}$ tale che $\mathscr{A}(\mathbf{v}) = 0$, che è proprio la definizione di operatore non singolare o regolare.

Più in generale, le usuali operazioni aritmetiche con funzioni si estendono agli operatori autoaggiunti. Per esempio,

$$f(\mathscr{A})g(\mathscr{A}) = (f \circ g)(\mathscr{A})\,.$$

Si può definire $f(\mathscr{A})$ per un operatore normale e il lettore si chiderà perchè non lo abbiamo fatto subito, visto che il solo ingrediente che entra nella (3.29) è il teorema spettrale. La ragione è che la faccenda è un po' delicata. Nel caso di un operatore normale gli autovalori possono essere complessi, e dobbiamo assicurarci che f sia definita per numeri complessi. Non ogni funzione data originariamente sulla retta reale può essere estesa al piano complesso, ma polinomi, funzioni razionali, esponenziali, etc. vanno bene. Come vedremo nella terza parte, le funzioni per cui questo è possibile sono le *funzioni analitiche*, di cui un brevissimo cenno è stato dato nella sezione 1.8. Come vedremo, sono le funzioni per cui esiste una serie di potenze convergente. Fatta salva questa precisazione, la (3.29) risulta in effetti ben definita per operatori normali e per funzioni a valori reali o complessi. Se $\mathscr{A}$ è normale, anche $f(\mathscr{A})$ lo è.

La nozione di funzione di un operatore, in verità, si estende a qualunque operatore diagonalizzabile. In termini di matrici, basta definire $f(A)$ come

$$f(A) = Sf(D)S^{-1}\,,$$

dove $f(D)$ è la matrice diagonale con elementi diagonali $f(\lambda_k)$. Adesso la sottigliezza è duplice. Da un lato, essendo gli autovalori in generale complessi, va tenuto conto dell'osservazione sopra per gli operatori normali; dall'altro, non è facile decidere se una matrice è diagonalizzabile senza in effetti cercare di diagonalizzarla. Ma che un operatore è autoaggiunto o normale è facile da riconoscere.

ESERCIZIO 3.8. Assumendo che A sia una matrice diagonale, dimostrare che

$$\det(A) = e^{\operatorname{Tr}\ln A}$$

Questa equazione è utile nel calcolo dei determinanti.

APPLICAZIONE AI SISTEMI DINAMICI LINEARI Un sistema dinamico è un sistema (fisico, biologico, economico, etc), il cui stato $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$

evolve nel tempo t secondo il sistema di equazioni differenziali del prim'ordine

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{v}(\mathbf{x}_t) \tag{3.30}$$

dove il "pallino" denota la derivata rispetto al tempo, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, è un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$, detto campo di velocità; $\mathbb{R}^n$ è detto lo *spazio delle fasi* del sistema. Se il campo di velocità è lineare, esso è rappresentato da una matrice A e il sistema così ottenuto

$$\dot{\mathbf{x}}_t = A\mathbf{x}_t \tag{3.31}$$

è detto *sistema dinamico lineare*.

Nel caso scalare, $\dot{x}_t = ax_t$, dove $a \in \mathbb{R}$, la soluzione è $x_t = e^{at}x_0$, dove x_0 è la condizione iniziale al tempo $t = 0$. Seguendo questa analogia, si è tentati di scrivere la soluzione di (3.31) come

$$\mathbf{x}_t = e^{At}\mathbf{x}_0 \tag{3.32}$$

e questo è in effetti corretto se e^{At} è intesa nel senso specificato sopra di funzione di un operatore: se A è normale,

$$e^{At} = \sum_k e^{\lambda_k t} P_k \,, \tag{3.33}$$

se A è solo diagonalizzabile,

$$e^{At} = Se^{Dt}S^{-1} \,. \tag{3.34}$$

La dimostrazione che (3.32) è soluzione della (3.31), per e^{At} data dalle (3.34) e (3.33), è riportata a margine.

Osserviamo infine che in fisica giocano un ruolo molto importante in sistemi dinamici in $\mathbb{C}^n$ per descrivere i sistemi quantistici finito-dimensionali (sistemi di spin, di atomi a numero finito di livelli o sistemi di qu-bit, come in teoria della computazione quantistica). Il loro stato è usualmente denotato con $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{C}^n$ e la loro dinamica è data dal sistema

$$i\,\dot{\psi} = H\psi \,, \tag{3.35}$$

dove H è un operatore autoaggiunto. Naturalmente, la sostanza è la stessa di prima, la soluzione è ancora data dalla (3.32) per $A = -iH$, cioè

$$\psi_t = e^{-itH}\psi_0 \,, \tag{3.36}$$

che essendo H autoaggiunto, va intesa nel senso della rappresentazione spettrale (3.33), che adesso si scrive come

$$e^{-iHt} = \sum_k e^{-iE_k t} P_k \,, \tag{3.37}$$

Dimostrazione che (3.32) *è soluzione della* (3.31)*, per* e^{At} *data dalla* (3.34). Si tratta, semplicemente, di un calcolo:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_t &= \frac{d}{dt} Se^{Dt}S^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= \lim_{s\to t} \frac{Se^{Ds}S^{-1}\mathbf{x}_0 - Se^{Dt}S^{-1}\mathbf{x}_0}{s-t} \\
&= S\left[\lim_{s\to t} \frac{e^{Ds} - e^{Dt}}{s-t}\right] S^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= SDe^{Dt}S^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= SDS^{-1}Se^{Dt}S^{-1}\mathbf{x}_0 \\
&= SDS^{-1}e^{At}\mathbf{x}_0 \\
&= A\mathbf{x}_t
\end{aligned}$$

Analogamente, la *dimostrazione per* A *data dalla* (3.33) è il calcolo seguente:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}_t &= \frac{d}{dt} e^{At}\mathbf{x}_0 \\
&= \frac{d}{dt} \sum_k e^{\lambda_k t} P_k \mathbf{x}_0 \\
&= \sum_k \lambda_k e^{\lambda_k t} P_k \mathbf{x}_0 \\
&= Ae^{At}\mathbf{x}_0 \quad \text{[per la (3.29)]} \\
&= A\mathbf{x}_t
\end{aligned}$$

con la notazione standard E_k per gli autovalori di H, essendo quest'ultimi interpretati in meccanica quantistica come valori d'energia. Naturalmente, continua a valere la dimostrazione data a margine.

È interessante osservare (e di enorme importanza in meccanica quantistica) che $U_t = e^{-itH}$ è un operatore unitario, in quanto $U_t^{-1} = e^{itH} = U_t^*$. Questo significa, in particolare, che l'evoluzione temporale del vettore ne conserva la norma, $||U_t\psi_0|| = ||\psi_0||$.

3.6 *Assi principali di inerzia*

L'applicazione più nota del teorema spettrale in fisica classica è per $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ e riguarda gli assi principali di inerzia di un corpo. Si consideri un corpo esteso che ruota attorno a un asse con velocità angolare istantanea $\boldsymbol{\omega}$. Allora il momento angolare $\mathbf{L}$ è dato dall'equazione

$$\mathbf{L} = \mathscr{M}\boldsymbol{\omega}\,,$$

dove $\mathscr{M}$, l'operatore che trasforma il vettore $\boldsymbol{\omega}$ nel vettore $\mathbf{L}$, è rappresentato dalla matrice, usualmente detta *tensore di inerzia*,

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix},$$

Gli elementi di questa matrice sono usualmente calcolati rispetto ad un sistema d'assi cartesiani centrato nel centro di massa del corpo. Detta ρ la densità di massa del corpo, le formule per gli elementi di matrice di I sono

$$I_{xx} = \iiint (y^2+z^2)\rho dxdydz \qquad I_{yy} = \iiint (x^2+z^2)\rho dxdydz \qquad I_{zz} = \iiint (x^2+y^2)\rho dxdydz$$
$$I_{xy} = I_{yx} = -\iiint xy\rho dxdydz \quad I_{xz} = I_{zx} = -\iiint xz\rho dxdydz \quad I_{yz} = I_{zy} = -\iiint xz\rho dxdydz$$

Essendo dunque la matrice I simmetrica, si applica il teorema spettrale. Quindi esistono numeri reali I_k e proiettori ortogonali $\mathscr{P}_k$ tali che

$$\mathscr{M} = \sum_{k=1}^{r} I_k \mathscr{P}_k$$

le possibilità per r sono $r = 3, 2, 1$.

Il caso $r = 3$ si realizza, ad esempio per un elissoide. I tre proiettori $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ e $\mathscr{P}_3$ proiettano su 3 direzioni ortogonali tra loro dette *assi principali di inerzia* che corrispondono ai 3 assi di simmetria dell'elissoide. Nella base ortonormale di queste direzioni la matrice I assume la forma

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix},$$

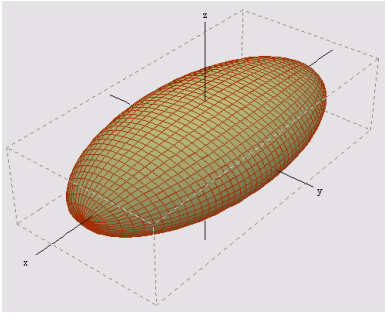


Figura 3.1: Elissoide

dove $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. Il caso $r = 2$ è, ad esempio, quello di un cilindro. $\mathscr{P}_1$ proietta sul piano del cilindro e $\mathscr{P}_2$ sul suo asse. Allora la matrice I diventa

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix},$$

dove $I_1 \neq I_3$. Il caso $r = 1$ è quello della sfera, dove necessariamente $\mathscr{P}_1$ è l'operatore identità . Allora il momento di inerzia è un multiplo dell'identità,

$$I = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo infine che l'energia cinetica rotazionale

$$\mathcal{E}_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\omega} , \mathscr{M}\boldsymbol{\omega} \rangle$$

è una forma quadratica. Quindi la diagonalizzazione del momento di inerzia è equivalente alla diagonalizzazione di un forma quadratica. Storicamente, il teorema spettrale fu proprio il risultato della ricerca della soluzione per questo problema.

3.7 *Rotazioni e decomposizione di un operatore lineare*

Sia $\mathscr{R}$ una rotazione dello spazio euclideo n-dimensionale reale (rispetto ad un'origine O arbitrariamente scelta), che trasforma un qualunque vettore $\mathbf{v}$ nel vettore ruotato $\mathbf{v}' = \mathscr{R}\mathbf{v}$. Si vuole sapere come $\mathscr{R}$ agisce su un operatore $\mathscr{A}$. Sia $\mathbf{u} = \mathscr{A}\mathbf{v}$, allora applicando la rotazione ad ambo i membri si ottiene

$$\mathbf{u}' = \mathscr{R}\mathbf{u} = \mathscr{R}\mathscr{A}\mathbf{v} = \mathscr{R}\mathscr{A}\mathscr{R}^{-1}\mathscr{R}\mathbf{v} = \mathscr{R}\mathscr{A}\mathscr{R}^{-1}\mathbf{v}'$$

Dunque

$$\mathscr{A}' = \mathscr{R}\mathscr{A}\mathscr{R}^{-1} \tag{3.38}$$

è come si trasforma l'operatore $\mathscr{A}$ in conseguenza della rotazione $\mathscr{R}$. Se, per esempio, $\mathscr{A}$ rappresenta il momento di inerzia di un cilindro con asse lungo l'asse delle z e il cilindro viene ruotato mediante rotazione $\mathscr{R}$ di 90^0 nel piano xz, $\mathscr{A}'$ sarà il momento di inerzia ruotato. In una data base nello spazio, gli operatori si rappresentano mediante matrici e per le corrispondenti matrici, la (3.38) diventa

$$A' = RAR^{-1} \tag{3.39}$$

Il prodotto righe per colonne in generale mescola tutti gli elementi nel senso che, come effetto della (3.39), l'elemento $[A']_{ij}$ della matrice trasformata in generale dipenderà da tutti gli elementi della matrice

A. Tuttavia, così come una funzione $f(x)$ è unicamente decomposta nella somma della sua parte pari e di quella dispari,

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \equiv f_{(p)}(x) + f_{(d)}(x)\,,$$

si può decomporre una matrice nella somma della sua parte simmetrica e di quella antisimmetrica

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right) \equiv [A_{(s)}]_{ij} + [A_{(a)}]_{ij}$$

e la rotazione agisce in maniera indipendente sulle due parti, trasformando $A_{(s)}$ in una matrice che è ancora simmetrica e $A_{(a)}$ in una che è ancora antisimmetrica. Infatti,

$$\begin{aligned}[RA_{(s)}R^{-1}]_{ik} = [RA_{(s)}R^{t}]_{ik} &= \sum_{n,m} R_{in}[A_{(s)}]_{nm}R_{kn} \\ &= \sum_{m,n} R_{kn}[A_{(s)}]_{mn}R_{in} = [RA_{(s)}R^{t}]_{ki} = [RA_{(s)}R^{-1}]_{ki}\end{aligned}$$

e, analogamente, per $A_{(a)}$.

La parte simmetrica, poi, ammette l'ulteriore decomposizione seguente:

$$A_{(s)} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{Tr} A\right) I + \left[A - \frac{1}{3}\left(\operatorname{Tr} A\right) I\right] \equiv \frac{1}{3}\left(\operatorname{Tr} A\right) I + A_{(s_0)}\,.$$

Il primo termine è uno scalare che moltiplica l'identità, ed è quindi invariante per rotazioni. Il secondo termine $A_{(s_0)} = A - \frac{1}{3}\left(\operatorname{Tr} A\right) I$ è a traccia nulla ed essendo la traccia invariante per trasformazione di similitudine, e quindi per rotazioni è trasformato da una rotazione in una matrice simmetrica che è ancora a traccia nulla. Risulta così dimostrato che la decomposizione di una matrice

$$A = \frac{1}{3}\left(\operatorname{Tr} A\right) I + A_{(s_0)} + A_{(a)} \tag{3.40}$$

è preservata da una rotazione, nel senso che una rotazione agisce in modo indipendente su ciascun addendo della somma. Essendo la decomposizione invariante per rotazioni, dalla (3.40) si passa alla corrispondente relazione per gli operatori

$$\mathscr{A} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{Tr} \mathscr{A}\right) \mathscr{I} + \mathscr{A}_{(a)} + \mathscr{A}_{(s_0)} \tag{3.41}$$

Simbolicamente, riscriviamo la (3.40) come

$$\mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{1} + \mathbf{3} + \mathbf{5}\,, \tag{3.42}$$

intendendo con questo che i 9 gradi di libertà indipendenti della matrice, quando sono organizzati come nella (3.40), formano tre

gruppetti su cui le rotazioni agiscono in modo indipendente: il primo è un singoletto, che è lasciato invariato dalle rotazioni, il **3** è la parte antisimmetrica della matrice che può essere messa in corrispondenza con un vettore (vedere nota sotto), il **5** è una matrice simmetrica a traccia nulla.[1]

[1] Nel linguaggio della teoria dei gruppi, si tratta della decomposizione di una rappresentazione *riducibile* (cioè, $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$) del gruppo delle rotazioni nelle sue componenti *irriducibili* (cioè, **1**, **3** e **5**) .

NOTA Sia A una matrice antisimmetrica sullo spazio euclideo tridimensionale e "$\times$" denoti il prodotto vettore. Allora l'equazione

$$A\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}\,, \tag{3.43}$$

per ogni vettore $\mathbf{b}$, stabilisce una corrispondenza biunivoca tra la matrice A e il vettore $\mathbf{a}$. Poiché $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2)$, si vede che la matrice corripondente ad $\mathbf{a}$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{3.44}$$

Quindi la parte antisimmetrica nella decomposizione (3.40) può essere messa in corrispondenza con un vettore.

4
Successioni e serie

Indice

4.1 *La nozione di limite di una successione* 67
4.2 *La nozione di successione di Cauchy* 68
4.3 *Serie infinita di numeri complessi* 69
4.4 *Successioni e serie di funzioni* 70
4.5 *Convergenza uniforme e scambio di limiti* 73
4.6 *Serie di potenze complesse* 75
4.7 *Funzioni complesse definite da serie di potenze* 78
4.8 *Raggio di convergenza e singolarità* 81
4.9 *L'esponenziale e le funzioni intere* 82
Problemi 84
Soluzioni 86
Complementi 91

4.1 La nozione di limite di una successione

Supponiamo di voler dare un senso alla somma che compare nell'analisi del paradosso di Achille e la tartaruga[1]

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\dots .$$

Si costruisca la successione delle somme parziali

$$s_1=\frac{1}{10}\,,\ s_2=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}\,,\quad \dots,\quad s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{-k}=0.\underbrace{11\dots1}_{n}$$

Sembra naturale definire la somma infinita $\sum_{k=1}^{\infty}10^{-k}$ come il limite della successione $s_1, s_2, s_3, \dots$ e di ricondurre quindi la nozione di

[1] È uno dei paradossi di Zenone di Elea (489 a.C.–431 a.C.). Secondo la descrizione datane dallo scrittore argentino Jorge Luis Borges: "Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla."

somma infinita, o serie, alla nozione del limite di una successione di numeri (reali o complessi), inteso come quel numero s (se esiste) a cui i numeri della successione si avvicinano arbitrariamente.

La nozione moderna di limite di una successione è la seguente.

> La successione $s_1, s_2, s_3, \ldots$ di numeri (reali o complessi) converge al numero (reale o complesso) s se per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero N tale che, per tutti gli $m > N$, si ha $|s - s_m| < \epsilon$. (4.1)

Si osservi che $|s_n - s_m|$ per numeri reali è il modulo inteso come valore assoluto, mentre per i complessi è il modulo nel senso dei numeri complessi. A parte questo, non c'è alcuna differenza tra la nozione di convergenza per i reali e per i complessi.

Nel caso di Achille e la tartaruga, dalla (4.1) segue immediatamente che il limite della successione s_n è $0.\overline{1} = 1/9$. Infatti, dato un qualunque $\epsilon > 0$, si prenda N tale che $0.\overline{1} - 0.\underbrace{11\ldots1}_{N} < \epsilon$; allora per tutti gli $m > N$ si avrà che $0.\overline{1} - 0.\underbrace{11\ldots1}_{m} < \epsilon$.

4.2 *La nozione di successione di Cauchy*

Al cuore dell'analisi c'è la nozione di successione di Cauchy:

> Una successione di numeri (reali o complessi) $s_1, s_2, s_3, \ldots$ è detta di Cauchy se $|s_n - s_m| < \epsilon$ per tutti gli n e m dopo un certo N, qualunque sia il numero $\epsilon > 0$ arbitrariamente scelto. (4.2)

Detto in breve, una successione è di Cauchy se i suoi elementi diventano arbitrariamente vicini man mano che la successione progredisce. Si veda la figura 4.1.

Questa nozione è al cuore dell'analisi, perché i numeri reali possono essere costruiti completando i razionali con successioni di Cauchy di razionali. Se si sceglie questa strada per caratterizzare i reali, la convergenza delle successioni di Cauchy è automatica. Si stabilisce così che i reali formano uno *spazio completo*, il che significa: uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy convergono. Alternativamente, partendo dall'assioma di Dedekind, detto anche assioma di continuità oppure assioma di completezza (che afferma che ogni insieme di numeri reali che non sia vuoto e che sia limitato superiormente possiede un estremo superiore) e utilizzando il teorema Bolzano-Weierstrass (secondo cui ogni successione di numeri reali limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente) si stabilisce la completezza dei numeri reali, cioè che ogni successione di Cauchy di numeri reali converge ad un numero reale.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) è stato un matematico e ingegnere francese che ha avviato il progetto della formulazione rigorosa dei teoremi dell'analisi infinitesimale basato sull'utilizzo delle nozioni di limite e di continuità e ha dato importanti contributi alla teoria delle equazioni differenziali. È il padre della teoria delle funzioni di variabile complessa.

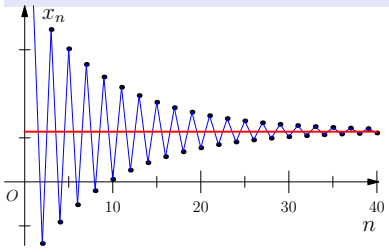


Figura 4.1: Grafico di una successione di Cauchy. Se lo spazio che contiene la successione di Cauchy è completo, il punto d'arrivo della successione, cioè il limite della successione, esiste.

Questo fatto continua a valere per i numeri complessi, in quanto coppie di reali. Dunque, anche i complessi $\mathbb{C}$, come i reali $\mathbb{R}$, sono uno spazio completo. Riassumendo

> Ogni successione di Cauchy di numeri complessi (reali) converge ad un numero complesso (reale). (4.3)

Essendo i numeri complessi rappresentati da punti del piano, si può visualizzare una loro successione come in figura 4.2. La figura mostra che è tutto è molto più semplice di quel che sembra: tutto quel che si intende con la nozione di convergenza di una successione è che una volta che si raggiunge un certo punto s_N, tutti i punti successivi stanno dentro un disco arbitrariamente piccolo di raggio ϵ con centro in s.

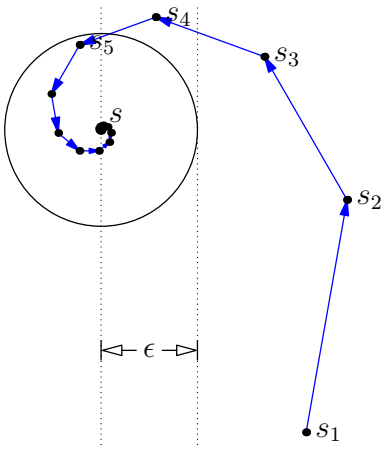


Figura 4.2: Significato geometrico della convergenza di una successione di numeri complessi: raggiunto un certo punto s_N, tutti i punti successivi stanno dentro un disco arbitrariamente piccolo di raggio ϵ con centro in s.

4.3 *Serie infinita di numeri complessi*

In generale, data una successione di numeri (reali o complessi) $u_1, u_2, u_3, \ldots$, l'espressione

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} s_n\,, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

è detta serie o somma infinita. I numeri s_n sono detti *somme parziali* (della serie). Quando la successione delle somme parziali converge a un numero finito, la serie è detta *convergente*, altrimenti è detta *divergente*. Condizione necessaria per la convergenza della serie è che la successione $u_1, u_2, u_3, \ldots$ converga a zero[2], ma questo non è sufficiente per concludere che la serie converge, come mostra il contro-esempio della serie armonica (si veda il problema 4.1).

[2] Questo si vede subito considerando che $u_n = s_n - s_{n-1}$: se la serie converge ad s, allora s_n e s_{n-1} convergono ad s per $n \to \infty$, da cui segue che u_k deve convergere a 0 per $n \to \infty$

Criterio di Cauchy Il criterio di convergenza più importante è quello di Cauchy, che non è altro che (4.3) adattato alle successioni delle somme parziali di una serie: la serie complessa

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

converge se e solo se esiste un N tale che

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| = |s_n - s_m| < 2\epsilon$$

(per ϵ arbitrariamente piccolo) ogni qual volta m e n sono maggiori di N. Il significato geometrico di questo criterio è illustrato nella figura 4.3: se $n > m > N$, allora entrambi s_n e s_m stanno dentro al disco e conseguentemente la distanza tra loro deve essere inferiore al diametro del disco.

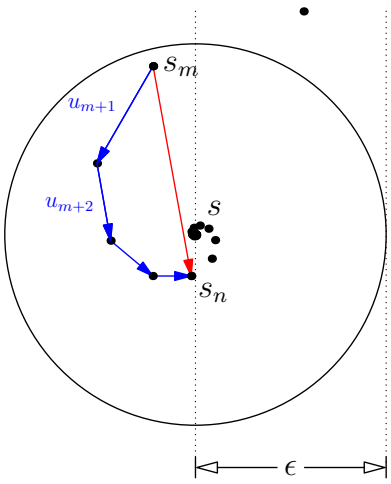


Figura 4.3: Significato geometrico del criterio di Cauchy: dopo un certo N, i punti s_n e s_m stanno dentro a un cerchio di raggio ϵ. Il vettore in rosso è la differenza tra questi punti e la sua lunghezza è inferiore a ϵ.

SERIE ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE La serie complessa

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

è detta assolutamente convergente se la serie reale

$$\tilde{s} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

è convergente. La convergenza assoluta è certamente differente dalla convergenza ordinaria. Per esempio, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ è convergente, ma non è assolutamente convergente. In effetti il requisito di assoluta convergenza è più forte della semplice convergenza. Si ha infatti il seguente teorema.

Se una serie è assolutamente convergente allora è anche convergente. (4.4)

Ricordiamo infine un utile criterio per una serie reale di segno alterno

Una serie di termini a segno alterno i cui termini vadano costantentemente decrescendo in valore assoluto al crescere di n e tale che sia
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$
è convergente. (4.5)

Dimostrazione di (4.4). Supponiamo che

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

sia assolutamente convergente, il che significa che

$$\tilde{s} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = |u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$$

è convergente. Denotiamo con $\tilde{s}_n$ le somme parziali di $\tilde{s}$. Se $\tilde{s}$ è convergente, allora, per il criterio di Cauchy, vuol dire che per valori sufficientemente grandi di m e n, possiamo rendere $|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|$ piccolo quanto vogliamo. Ma, riferendoci alla figura 4.3, vediamo che

$$|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \dots + |u_n|$$

è la lunghezza totale del viaggio da s_m a s_n che passa per i punti s_{m+1}, s_{m+2} e così via. Poiché $|s_n - s_m|$ è la lunghezza del viaggio più breve da s_m a s_n,

$$|s_n - s_m| \leq |\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|$$

Quindi $|s_n - s_m|$ deve diventare arbitrariamente piccolo per m e n sufficientemente grandi. □

4.4 *Successioni e serie di funzioni*

Dalle nozioni di successione e serie si passa a quelle di *successione di funzioni* e di *serie di funzioni* semplicemente permettendo che i termini delle successioni e delle serie dipendano da una variabile che varia in un certo dominio. Per esempio, se facciamo dipendere i termini di una successione da una variabile complessa, possiamo definire il limite della successione di funzioni così ottenute in maniera puntuale.

CONVERGENZA PUNTUALE Sia $f_1, f_2, f_3, \dots$ una successione di funzioni. Se la successione di numeri

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots$$

converge per ogni $z \in \Omega$, si può definire una funzione f tale che

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} u_n(z_0)\,, \quad \forall z_0 \in \Omega$$

L'applicazione immediata è alle serie. Se facciamo dipendere i termini u_k di una serie da una variabile complessa, cioè se poniamo

$u_k = u_k(z)$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ potrà convergere per alcuni valori di z e non per altri. Il problema interessante è dunque quello di determinare l'insieme Ω di valori di z per cui la serie converge. Sull'insieme dei valori z in cui la serie converge risulta associata una funzione $f(z)$ che è la somma della serie. Riassumendo: se la successione delle somme parziali $s_1, s_2, s_3, \ldots$ della serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ converge in Ω, allora la serie converge puntualmente in Ω alla funzione somma

$$s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)\,.$$

ESERCIZIO 4.1. Trovare la regione di convergenza e la somma della serie di funzioni

$$1 + \frac{z}{1+z} + \left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+z}\right)^3 + \ldots$$

Soluzione di 4.1. La serie converge per $\mathrm{Re}\,(z) > -1/2$. Infatti, è una serie geometrica (problema 1.7) di ragione $z/(z+1)$ e converge quando

$$\left|\frac{z}{1+z}\right| < 1$$

cioè quando

$$|z| < |1+z|\,.$$

Passando alle usuali coordinate cartesiane $z = x + iy$, la condizione diventa

$$x^2 + y^2 < 1 + 2x + x^2 + y^2\,,$$

da cui

$$x = \mathrm{Re}\,(z) > -\frac{1}{2}\,.$$

La regione di convergenza è dunque il semipiano limitato a sinistra dalla retta $\mathrm{Re}\,(z) = -1/2$. La somma $f(z)$ della serie segue dalla somma della progressione geometrica (problema 1.7):

$$f(z) = \frac{1}{1 - \frac{z}{1+z}} = 1 + z$$

□

CONVERGENZA UNIFORME Abbiamo visto che la successione di funzioni $f_1, f_2, f_3, \ldots$ converge puntualmente in $z = z_0$ se la successione converge al valore $f(z_0)$ in quel punto, cioè se , fissato $\epsilon > 0$, esiste un intero N_0 tale che $E_n(z_0) = |f(z_0) - f_n(z_0)| < \epsilon$. Per un altro valore z_1 di z, per cui la serie converge al valore $f_1 = f(z_1)$, varrà ancora la stessa proposizione, ma, in generale, *se si richiede che ϵ sia lo stesso di prima*, essa sarà valida a partire da un altro valore $N_1 \neq N_0$. Considerando ora tutti i possibili valori di z per cui la successione converge, ci si può domandare se ve ne è uno tra essi in cui il numero N ha un valore massimo N^*? Se così fosse, N^* potrebbe essere sostituito a tutti gli altri numeri $N_0, N_1, N_2, \ldots$, trovati per gli altri valori di z, e si potrebbe affermare che, per qualunque valore di z per cui la successione converge, dato $\epsilon > 0$ piccolo a piacere, la disuguaglianza $E_n(z) < \epsilon$ è soddisfatta a partire da un valore N^*, *indipendentemente dal valore di z*. Quando questo si verifica, si di dice che si ha *convergenza uniforme* della successione e la successione è detta *uniformemente convergente*. Intuitivamente, la convergenza uniforme corrisponde ad una velocità di convergenza uniforme in tutti i punti in cui la successione converge (passato un certo N^*, la velocità ha lo stesso valore costante per tutti i punti). Riassumendo:

Convergenza uniforme di una successione. Si dice che la successione di funzioni $f_1, f_2, f_3, \ldots$ converge uniformemente in Ω alla funzione f se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero N tale che per tutti gli $n > N$

$$|f(z) - f_n(z)| \leq \epsilon \quad \forall z \in \Omega \tag{4.6}$$

Segue la nozione di convergenza uniforme di una serie.

Convergenza uniforme di una serie. Si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ converge uniformemente in Ω se la successione delle sue somme parziali $s_1, s_2, s_3, \ldots$ converge uniformemente in Ω. (4.7)

Esempio 4.1. Studiamo la convergenza della serie reale

$$f(x) = x + x(x-1) + x^2(x-1) + \ldots + x^n(x-1) + \ldots$$

nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$. La somma parziale n-esima è

$$s_n = x + x(x-1)(1 + x + \ldots + x^{n-1}) = x + x(x-1)\frac{1-x^n}{1-x} = x^n$$

Pertanto, la serie converge a 0, per $0 \leq x < 1$, mentre per $x = 1$ la serie si riduce al primo termine e vale 1, cioè, nell'intervallo $[0,1]$ la serie converge alla funzione (discontinua)

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Consideriamo adesso le prime 5 somme parziali s_n della serie; si veda la figura 4.4. La curve rappresenano anche i primi cinque errori, in quanto $E_n = |s - s_n| = x^n$. Fissiamo a piacere un numero ϵ, diciamo 0.3. Allora, come mostrato in figura, per $x = 0.5$, tutti gli errori, dal secondo in poi, sono minori di 0.3, quindi $N = 2$. Ma per $x = 0.75$, soltanto gli errori successivi al quinto sono sono minori di 0.3 e quindi $N = 5$. Quanto più x si avvicina a 1, tanto più grande diventa N. Si vede che non esiste alcun N^* massimo: infatti, se vi fosse, dovrebbe essere $E_{N^*} = x^{N*} < \epsilon$ per qualunque valore di x compreso tra 0 e 1, cioè $x < \epsilon^{1/N^*}$. Ma, per quanto grande si prenda N^*, esisteranno sempre dei valori di x compresi tra ϵ^{1/N^*} e 1. Conclusione: la serie *non è uniformemente convergente* in $[0,1]$, pur essendo ivi convergente puntualmente alla funzione $s(x)$.

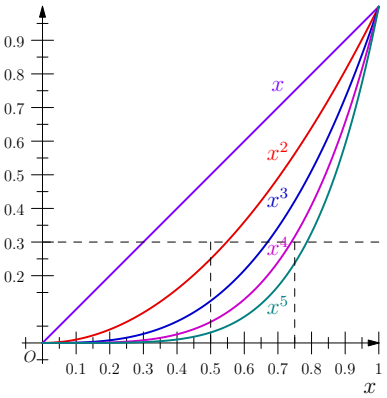


Figura 4.4: Le prime 5 somme parziali della serie che coincidono con i primi cinque errori.

Il viceversa vale sempre:

Se una successione di funzoni $f_1, f_2, f_3, \ldots$ converge uniformemente a f, allora converge puntualmente a f, (4.8)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) \quad \forall z_0 \in \Omega$$

Criterio M di Weierstrass Un criterio di convergenza uniforme (sufficiente ma non necessario) è il seguente:

Criterio M di Weierstrass. Una serie di funzioni è uniformemente convergente in una regione del piano complesso se la serie formata con i moduli dei suoi termini è, in qualunque punto della regione, maggiorata da una serie convergente a termini costanti. (4.9)

Dimostrazione di (4.9). Se la serie maggiorante è $\sum M_k$ con errore E_n^0 dalla somma $M = \sum M_k$, e la serie di funzioni è $\sum u_k(z)$ con errore $E_n(z)$ dalla sua somma $s(z)$, si ha $E_n(z) < E_n^0$. Ma, prefissato un ϵ piccolo a piacere, esiste un N^* a partire dal quale $E_n^0 < \epsilon$, e quindi a partire da tale N^* (costante), si ha anche

$$E_n(z) < \epsilon\,.$$

Dunque, la serie è uniformemente convergente. □

ESERCIZIO 4.2. Verificare la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$$

nella regione $1 < |z| < 2$.

Soluzione di 4.2. La serie data è

$$\frac{1}{1^2 + z^2} + \frac{1}{2^2 + z^2} + \frac{1}{3^2 + z^2} + \dots$$

I primi due termini possono essere omessi senza influenza sulla convergenza uniforme della serie. Per $n \geq 3$ e $1 < |z| < 2$, si ha

$$|n^2 + z^2| \geq |n^2| - |z^2| \geq n^2 - 4 \geq \frac{1}{2} n^2$$

da cui

$$\left| \frac{1}{n^2 + z^2} \right| \leq \frac{2}{n^2}$$

Allora la serie data converge uniformemente (e assolutamente) in $1 < |z| < 2$ per il criterio M di Weirstrass. La convergenza, e quindi anche l'uniforme convergenza, viene meno per $|z| = 1$ o $|z| = 2$ (precisamente in $z = \pm i$ e $z = \pm 2i$). □

4.5 *Convergenza uniforme e scambio di limiti*

In questa sezione studiamo più approfonditamente la nozione di convergenza uniforme. Per semplicità di esposizione, consideriamo successioni e serie di numeri reali.

La nozione di convergenza uniforme[3] è una più importanti dell'analisi matematica per varie ragioni, in particolare, perché permette di risolvere un problema di notevole rilevanza nelle applicazioni: trovare un criterio che permetta di stabilire se certe proprietà delle funzioni di una successione sono preservate nel limite. Ci si può domandare, per esempio, sotto quali condizioni il limite di una data successione di funzioni continue è anch'esso una funzione continua. L'esempio 4.1 mostra che non è sufficiente che le funzioni della successione siano continue affinché il limite sia anch'esso una funzione continua. Viene in aiuto la nozione di convergenza uniforme. Vale infatti il seguente teorema

> Sia $f_1, f_2, f_3, \dots$ una successione di funzioni continue su $\Omega \subset \mathbb{R}$ che converge uniformemente ad una funzione f. Allora f è una funzione continua. (4.10)

Dimostrazione di (4.10). Questo teorema si dimostra con il "trucco $\epsilon/3$", un trucco che si usa anche in dimostrazioni di altri teoremi ed è quindi è utile conoscerlo. Sia dato $\epsilon > 0$ e sia x_0 un punto in Ω. Si vuole mostrare che

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

per x in un intorno di x_0. A tal fine si usa la disuguaglianza triangolare per maggiorare $|f(x) - f(x_0)|$ con una somma di tre termini, ciascuno dei quali lo si riesce maggiorare facilmente usando le ipotesi del teorema,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| \leq\ & |f(x) - f_N(x)| \\ & + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ & + |f_N(x_0) - f(x_0)| \end{aligned}$$

Consideriamo i tre termini a secondo membro:

- $|f(x) - f_N(x)|$: Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale in x, esiste un N tale che questa quantità può essere resa minore di $\epsilon/3$.
- $|f_N(x) - f_N(x_0)|$: Poiché le funzioni della successione sono continue, esiste un intorno di x_0 in cui questa quantità può essere resa minore di $\epsilon/3$.
- $|f_N(x_0) - f(x_0)|$: Poiché la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale in x_0, esiste un N tale che questa quantità può essere resa minore di $\epsilon/3$.

[3] Si può dare una definizione di convergenza uniforme per successioni di funzioni su uno spazio X più generale di $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ in cui sia definita una nozione di distanza. Uno spazio di questo tipo è detto metrico. Per esempio, X può essere lo spazio euclideo con distanza tra suoi punti data dalla norma della loro differenza. In tal caso possiamo ripetere pari pari la definizione (4.7) e dire che la successione di funzioni $f_1, f_2, f_3, \dots$ definite su questo spazio converge uniformemente in $\Omega \subset X$ alla funzione f se e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un intero N tale che per tutti gli $n > N$ si ha $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon \quad \forall x \in \Omega$. Adesso x sta genericamente per un numero reale, complesso, o un punto nello spazio euclideo. Il teorema (4.10) è formulato per funzioni su $\mathbb{R}$, ma in virtù di quanto detto sopra, questo teorema, e altri risultati esposti in questa sezione, si estendono immediatamente a funzioni su $\mathbb{C}$ o su uno spazio metrico X.

Si scelga il valore di N in cui le tre disuguaglianze precedenti sono simultaneamente verificate. Allora

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\,,$$

che è quello che si voleva dimostrare. □

Riformuliamo il teorema in modo da apprezzare meglio il suo contenuto. Dire che f è continua in x_0 significa che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ma $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ed essendo le funzioni della successione continue, $f_n(x_0) = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$. Allora il teorema (4.10) è equivalente ad affermare che

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)\,, \tag{4.11}$$

il che vuol dire che non importa in che ordine i limiti sono presi: nel lato sinistro di (4.11), prima si prende il limite $n \to \infty$ e poi il limite $x \to x_0$, in quello destro, prima $x \to x_0$ e dopo $n \to \infty$.

Dunque, ciò che la convergenza uniforme garantisce è lo scambio dei limiti. Essendo le derivate e gli integrali ottenute con processo di limite — le prime come limite dei rapporti incrementali e i secondi come limiti delle somme di Riemann — non dovrebbe sorprendere che la convergenza uniforme fornisca criteri utili per garantire lo scambio delle operazioni di derivazione e integrazione con quelle di limite. Enunciamo i due teoremi rilevanti per questi casi.

Ulisse Dini (1845–1918) fu tra i primi matematici italiani che comprese la necessità di rielaborare l'analisi infinitesimale secondo una impostazione più rigorosa; inoltre conseguì importanti risultati nello studio delle serie, nell'integrazione di funzioni di variabile complessa e della sviluppabilità in serie di funzioni arbitrariamente date in un intervallo, campo di suo principale interesse.

Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di funzioni integrabili (secondo Riemann) su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ che converge uniformemente ad una funzione f. Allora f è integrabile e

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt\,. \tag{4.12}$$

Sia $f_1, f_2, f_3, \ldots$ una successione di funzioni differenziabili su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ che converge puntualmente su $[a,b]$ ad una funzione f. Si assuma inoltre che la successione delle derivate $f_1', f_2', f_3', \ldots$ converga uniformemente su $[a,b]$. Allora f converge uniformemente ad una funzione differenziabile su $[a,b]$ e

$$\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}\,. \tag{4.13}$$

Essendo una serie definita come il limite della successione delle sue somme parziali, i teoremi (4.10), (4.12) (4.13) si estendono immediatamente alle serie.

(4.10') Sia $\sum_n f_n$ una serie di funzioni continue che converge uniformemente. Allora la sua somma è anch'essa una funzione continua.

(4.12′) Sia $\sum_n f_n$ una serie di funzioni integrabili (secondo Riemann) che converge uniformemente in $[a,b]$. Allora anche la sua somma è integrabile e

$$\sum_n \int_a^x f_n dt = \int_a^x \sum_n f_n dt$$

(4.13′) Sia $\sum_n f_n$ una serie di funzioni differenziabili che converge puntualmente in $[a,b]$. Se $\sum_n f_n'$ converge uniformemente allora $\sum_n f_n$ converge uniformemente ad una funzione differenziabile e

$$\frac{d}{dx}\sum_n f_n = \sum_n \frac{df_n}{dx}\,.$$

Osserviamo infine che talvolta la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme. Se la successione di funzioni è **monotona**, la loro convergenza puntuale ad una funzione implica anche la loro convergenza uniforme. Questo bel risultato di analisi è dovuto al matematico italiano Ulisse Dini.

4.6 *Serie di potenze complesse*

Una serie di potenze $P(z)$ (centrata nell'origine) è la più semplice serie di funzioni, cioè

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots\,,$$

dove c_k sono costanti (in generale, complesse) e z è una variabile complessa. Le somme parziali di questa serie sono polinomi ordinari,

$$s_n \equiv P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n\,,$$

Fissato il punto z, ad esempio $z = a$, per la convergenza della serie in a (convergenza puntuale) vale ovviamente quanto visto in precedenza per successioni e serie nel piano complesso.

Vale l'importante risultato:

> Se $P(z)$ converge in $z = a$, allora converge ovunque nel disco $|z| < |a|$. (4.14)

Inoltre, si ha:

> Se $P(z)$ diverge in $z = d$, allora diverge dappertutto fuori dal cerchio $|z| = |d|$. (4.15)

Infatti, se $P(z)$ non converge ovunque nel piano, ci deve essere almeno un punto d dove diverge. Si supponga che $P(z)$ converga in

Dimostrazione di (4.14). Dimostreremo che $P(z)$ è assolutamente convergente dentro al disco $|z| < |a|$, cioè che la serie reale

$$\tilde{P}(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} |c_k z^k| = |c_0| + |c_1 z| + |c_2 z^2| + \dots$$

è convergente. Allora la proposizione (4.14) risulterà dimostrata in virtù della (4.4). Denoteremo con $\tilde{P}_n(z)$ l'n-esima somma parziale di $\tilde{P}(z)$.

Per dimostrare la convergenza di $\tilde{P}(z)$ per $|z| < |a|$, si osservi che se $P(a)$ converge, allora la lunghezza $|c_n a^n|$ di ciascun termine della serie deve andare a zero quando n va all'infinito. In particolare, deve esistere un numero M tale che $|c_n a^n| < M$ per tutti gli n. Se $|z| < |a|$, allora $\rho \equiv |z|/|a| < 1$ e di conseguenza $|c_n z^n| < M\rho^n$. Perciò, per $n > m > N$,

$$\begin{aligned}
&\tilde{P}_n(z) - \tilde{P}_m(z) \le M(\rho^{m+1} + \rho^{m+2} + \dots \rho^n) \\
&= M\rho^{m+1}\left(1 + \rho + \dots + \rho^{n-(m+1)}\right) \\
&= M\rho^{m+1}\left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{\rho^{n-m}}{1-\rho}\right) \\
&= \frac{M}{1-\rho}\left[\rho^{m+1} - \rho^{n+1}\right]\,.
\end{aligned}$$

dove l'ultimo membro può essere reso piccolo quanto si vuole per n e m sufficientemente grandi. □

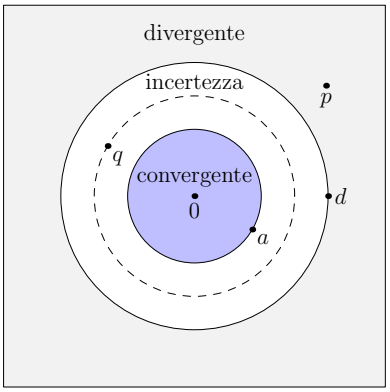


Figura 4.5: Convergenza e divergenza di una serie di potenze.

un punto p più lontano dall'origine di d. Si veda la figura 4.5. Allora, per la (4.14), $P(z)$ convergerebbe dappertutto dentro al disco $|z| < |p|$ e, in particolare, convergerebbe in d, contraddicendo l'ipotesi.

A questo punto abbiamo risposto alla domanda sulla convergenza, eccetto nell'anello tra i due cerchi centrati nell'origine, il cerchio passante per a e quello passante per d (si veda la figura 4.5). Supponiamo adesso di prendere un punto q a metà strada in questo anello, cioè il cerchio $|z| = (|a| + |d|)/2$, e di verificare se in questo punto la serie converge. Qualunque sia la risposta, le (4.14) e (4.15) ci permettono di ridurre l'anello di "incertezza". Per esempio, se $P(q)$ è convergente, allora $P(z)$ è convergente per $|z| < |q|$ e il nuovo anello di incertezza diventa $|q| \leq |z| \leq |d|$. Ripetendo questa procedura nel nuovo anello, dimezzeremo nuovamente lo spessore dell'anello di incertezza. Continuando in questo modo, l'anello di incertezza si restringerà ad un cerchio definito di raggio R (chiamato il *cerchio di convergenza*) tale che $P(z)$ converge dappertutto dentro a questo cerchio e diverge dappertutto fuori dal cerchio. Si veda la figura 4.6. Il raggio R è chiamato *raggio di convergenza* e l'interno del cerchio è chiamato *disco di convergenza*.

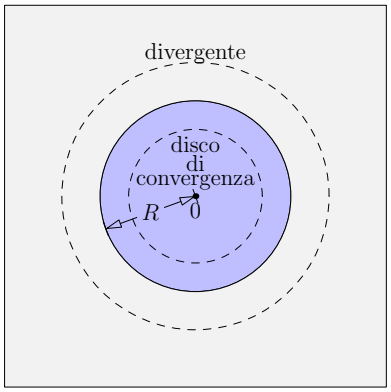


Figura 4.6: Disco e raggio di convergenza di una serie di potenze.

Tutti i risultati precedenti si generalizzano banalmente a serie di potenze centrate in un arbitrario punto u del piano complesso, vale a dire a serie della forma $P(z) = \sum c_k (z-u)^k$. Dunque:

> *Teorema di Abel.* Data una serie complessa di potenze $P(z)$ centrata in u, esiste un cerchio $|z-u| = R$, con centro in u, tale che $P(z)$ converge (assolutamente) dappertutto dentro al cerchio e diverge dappertutto fuori dal cerchio. (4.16)

Si osservi che l'argomento sopra non ci dice nulla riguardo alla convergenza di $P(z)$ sul cerchio di convergenza. In linea di principio, tutto può accadere: divergenza, convergenza oppure convergenza in alcuni punti del cerchio di convergenza e divergenza negli altri.

RAGGIO DI CONVERGENZA Ci sono diversi modi per trovare il raggio di convergenza R di una data serie di potenze $P(z) = \sum c_k z^k$. Ecco i criteri standard:

(a) Criterio del rapporto

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad \text{(se il limite esiste)}$$

(b) Criterio della radice

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{(se il limite esiste)}$$

Niels Abel (1802–1829) è stato un matematico norvegese. Indipendentemente da Galois, sviluppò la teoria di gruppi e dimostrò l'impossibilità di risolvere una generica equazione di quinto grado con un algoritmo algebrico.

(c) Criterio di Caucly-Hadamard

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

Se (a) fallisce, si usi (b). Se anche (b) fa cilecca, non ci resta che (c), che è per palati (matematici) fini.

ESERCIZIO 4.3. Determinare il raggio di convergenza della serie binomiale complessa

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}z^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}z^4 + \dots$$

dove n è un numero reale arbitrario.

ESERCIZIO 4.4. Determinare il raggio di convergenza della serie esponenziale complessa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Soluzione di 4.3. Riscriviamo la serie in forma compatta

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} z^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k .$$

Con il metodo del rapporto si ottiene

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{|n-k|} \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{|1-\frac{n}{k}|} = 1$$

□

Soluzione di 4.4 . Con il metodo del rapporto si ottiene

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!}$$

da cui

$$R = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$$

La serie ha quindi raggio di convergenza infinito (converge ovunque nel piano complesso). □

UN ALTRO TEOREMA DI ABEL La convergenza delle serie di potenze sul cerchio di convergenza è un problema di grande interesse, specialmente in vista dello studio delle serie di Fourier. Un teorema utile è il seguente:

> Sia $\sum c_n z^n$ una serie di potenze che converge nel disco unitario. Se $c_n \to 0$ per $n \to \infty$, allora la serie converge per $|z| = 1$, $z \neq 1$. (4.17)

(Si osservi che il teorema NON afferma che la serie diverge in $z = 1$. Per $z = 1$ il criterio semplicemente non si applica. La convergenza per $z = 1$ va dunque stabilita con altri metodi.) Anche questo teorema, come il teorema (4.16), è dovuto a Abel. Per una dimostrazione costruita a partire da un esempio, si veda la l'esercizio 4.8 nei complementi.

CONVERGENZA UNIFORME DELLE SERIE DI POTENZE Il seguente teorema è la morale generale che si trae dal problema 4.14:

> Se la serie di potenze $P(z)$ centrata in a ha disco di convergenza $|z-a| < R$, allora $P(z)$ è uniformemente convergente nel disco chiuso $|z-a| \leq r$, dove $r < R$. (4.18)

Dimostrazione di (4.18). Per semplicità, consideriamo il caso in cui la serie è centrata nell'origine,

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j .$$

Consideriamo l'errore $E_m(z) = |P(z) - P_m(z)|$, per z dentro al disco $|z| \leq r$, dove $r < R$. Si ha

$$\begin{aligned} E_m(z) &= |P(z) - P_m(z)| \\ &= |c_{m+1}z^{m+1} + c_{m+2}z^{m+2} + \dots| \\ &\leq |c_{m+1}z^{m+1}| + |c_{m+2}z^{m+2}| + \dots \end{aligned}$$

Da cui

$$\begin{aligned} E_m(z) &\leq |c_{m+1}|r^{m+1} + |c_{m+2}|r^{m+2} + \dots \\ &\equiv e(m,r) \end{aligned}$$

Ma, per ogni ϵ, si può trovare un m, tale che $e(m,r) < \epsilon$. Perciò, a partire da tale m, si avrà $E_n(z) < \epsilon$, per tutti gli $n \geq m$. Il che significa che nel disco $|z| \leq r$ la serie è uniformemente convergente. □

4.7 *Funzioni complesse definite da serie di potenze*

IL MISTERO DELLE SERIE REALI Passando al piano complesso, si comprende meglio la convergenza delle serie reali. Usualmente, una serie di potenze reali a coefficienti reali

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots ,$$

converge a $F(x)$ solo in qualche intervallo di convergenza centrato nell'origine $-R < x < R$. La domanda che l'analisi reale lascia in genere senza risposta è: *in che modo il raggio di convergenza R è determinato da $F(x)$?* Questa domanda ha una risposta semplice e bella, ma solo se la cerchiamo nel piano complesso. Se invece ci limitiamo alla retta reale, in alcuni casi la relazione tra R e $F(x)$ appare misteriosa. Storicamente, è stato proprio questo mistero che ha portato Cauchy a far progredire l'analisi complessa.

Per vedere che c'è un mistero, consideriamo le serie di potenze delle due funzioni reali

$$G(x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \text{e} \qquad H(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

La serie geometrica fornisce immediatamente la risposta

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \qquad \text{e} \qquad H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} ,$$

.

dove entrambe le serie hanno lo stesso intervallo di convergenza $-1 < x < 1$. È facile comprendere questo intervallo di convergenza della serie per $G(x)$ se guardiamo la figura 4.7. La serie diventa divergente nei punti $x = \pm 1$ perché questi punti sono delle *singolarità* della funzione stessa, cioè sono luoghi in cui $|G(x)|$ diventa infinito. Ma se guardiamo al grafico di $H(x)$ in figura 4.8, tutto sembra a posto per $x = \pm 1$.

Per capire meglio il problema, espandiamo queste funzioni in serie di potenze centrate in $x = u$, cioè in serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$, dove $X = (x - u)$ misura lo spostamento di x dal centro u.

Per G si ottiene

$$G(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1-u)^{k+1}} - \frac{1}{(-1-u)^{k+1}} \right] X^k , \qquad (4.19)$$

dove $|X| < |1-u|$ e $|X| < |1+u|$. Perciò l'intervallo di convergenza è $|X| < R$, dove $R = \min\{|1-u|, |1+u|\}$, cioè *R è la distanza di u dalla singolarità più vicina di G*. Questo fatto è illustrato dalla figura 4.9. Il calcolo è molto semplice ed è riportato sotto.

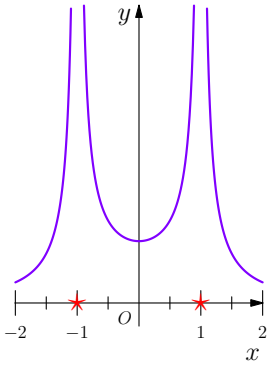


Figura 4.7: Grafico del modulo della funzione $G(x)$.

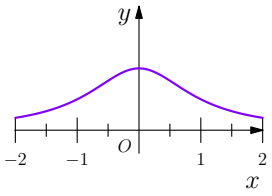


Figura 4.8: Grafico del modulo della funzione $H(x)$.

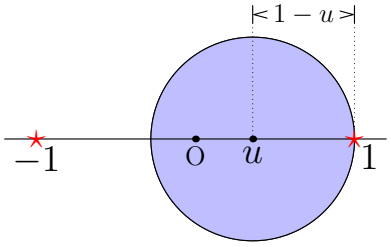


Figura 4.9: Raggio di convergenza della serie di $G(x)$ centrata nel punto u.

Dimostrazione di (4.19). Otteniamo lo sviluppo con i seguenti passaggi:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{-1-x}\right],$$

ma

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-(X+u)} = \frac{1}{(a-u)}\frac{1}{\left[1-\frac{X}{a-u}\right]}$$

e quindi

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{(a-u)^{k+1}}, \qquad \text{se e solo se } |X| < |a-u|.$$

da cui segue la (4.19). □

Per H si ottiene

$$H(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\sin(k+1)\phi}{(\sqrt{1+u^2})^{k+1}}\right](x-u)^k, \tag{4.20}$$

dove $\phi = \arg(i-u)$. Se si usano metodi reali il calcolo non è per niente semplice; rimandiamo alla sezione 4.8 per la dimostrazione della (4.20). Dalla (4.20) segue che il raggio di convergenza è $R = \sqrt{1+u^2}$ (si veda la figura 4.10).

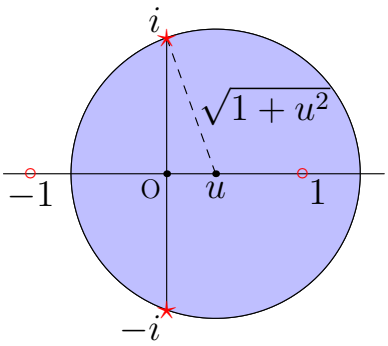


Figura 4.10: Raggio di convergenza della serie di $H(x)$ centrata nel punto u.

La formula $R = \sqrt{1+u^2}$ è cruciale per capire in che modo il piano complesso entra in gioco: se immaginiamo la retta reale immersa nel piano, per il teorema di Pitagora, $R = \sqrt{1+u^2}$ è la distanza dal centro u dell'espansione ad uno dei due punti, *fuori dalla retta reale*, che stanno a distanza 1 dalla retta stessa in una direzione ad essa ortogonale (si veda la figura 4.10). Questi punti sono i punti $\pm i$ del piano complesso ed R è la distanza di u da $\pm i$. Il mistero riguardante la convergenza di $H(x)$ si chiarisce quando passiamo alla *funzione complessa*

$$h(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{4.21}$$

che è identica a $H(x)$ quando z è ristretto all'asse reale. Mentre $h(z)$ si comporta bene per valori reali di z, essa ha due singolarità nel piano complesso, una in $z = i$ e l'altra in $z = -i$. Morale (che risolve il mistero): *il raggio di convergenza è la distanza del centro di espansione dalla singolarità più vicina nel piano complesso.*

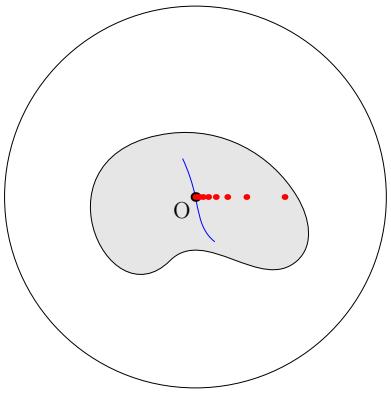


Figura 4.11: Due serie che coincidono in un intorno dello zero (regione grigia), o lungo un piccolo tratto di curva passante per lo zero (in blu) o nei punti di una successione di punti che si accumula nello zero (in rosso), coincidono ovunque.

UNICITÀ DELLE SERIE DI POTENZE Se una funzione complessa può essere espressa come serie di potenze, allora la serie è unica: non possono esserci due serie distinte che esprimano la stessa funzione. Più precisamente, se due serie di potenze, centrate in zero, concordano (a) in un intorno (comunque piccolo) dello zero, oppure (b) su un segmento di curva che passa per lo zero (non importa quanto piccolo) o, infine, (c) su una successione di punti che converge a zero, allora sono identiche Per convincerci di questo fatto, incominciamo con (a). Se

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots. \tag{4.22}$$

in un piccolo interno dello zero, allora ponendo $z = 0$, otteniamo $c_0 = d_0$, che quindi possiamo cancellare da entrambe le parti. Adesso dividiamo ambo i membri di (4.22) per z e ripetiamo la procedura, otterremo $c_1 = c_2$, e così via. Fine della dimostrazione della (a).[4]

Per quel che riguarda la (b) e la (c), il ragionamento è essenzialmente lo stesso, soltanto che invece di porre a zero entrambi i membri della (4.22), adesso occorre *prendere il limite* $z \to 0$ *lungo la curva o la successione di punti*. In particolare, ne segue che $h(z) = 1/(1+z^2)$ è la sola funzione complessa che concorda con $H(x) = 1/(1+x^2)$ quando z è ristretto all'asse reale del piano complesso. Il senso è il seguente: $h(z)$ è la sola funzione complessa che (*i*) concorda con $H(x)$ sull'asse reale e (*ii*) può essere espressa come serie di potenze in z. Si osservi che senza la (*ii*) l'affermazione sarebbe palesemente falsa (esercizio: trovare un contro-esempio).

[4] Si osservi che nella dimostrazione non si utilizza alcun passaggio al limite. Per chiarire questo punto, rivediamo il ragionamento. Se le funzioni $g(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ e $h(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots$ sono uguali in un piccolo intorno U dello zero (che include lo zero), allora sono uguali nello zero, da cui si deduce $c_0 = d_0$ e quindi che le funzioni $g_1(z) \equiv g(z) - c_0$ e $h_1(z) \equiv h(z) - d_0$ sono uguali in U. Ma se queste funzioni sono uguali in U, lo sono anche le funzioni $g_2(z) \equiv g_1(z)/z$ e $h_2(z) = h_1(z)/z$, in particolare, essendo regolari, sono uguali nello zero, da cui segue che $c_1 = d_1$. E così via. Nessun passaggio al limite $z \to 0$.

MANIPOLAZIONE DELLE SERIE DI POTENZE Un'altra proprietà importante delle serie di potenze è che possono essere sommate, moltiplicate e divise come se fossero polinomi (naturalmente, se hanno lo stesso centro). Questo segue dal fatto che esse possono essere approssimate uniformemente, con precisione arbitraria, da polinomi. Ecco alcuni esempi.

ESEMPIO 4.2.

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$
$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}$$

Sommando le serie dei due termini a destra, possiamo verificare la formula che

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + z^6 \dots ,$$

ESEMPIO 4.3.

$$\frac{1}{1-z^2} = \left[\frac{1}{1-z}\right]\left[\frac{1}{1+z}\right]$$

$$[1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots][1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \dots] = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + \dots$$
$$= 1 + [1-1]z + [1-1+1]z^2[1-1+1-1]z^3 + [1-1+1-1+1]z^4 + \dots$$
$$= 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots .$$

4.8 *Raggio di convergenza e singolarità*

Il fatto più importante che riguarda le funzioni esprimibili come serie di potenze è la morale di pag. 79, che è la seguente.

> Se $f(z)$ può essere espressa come una serie di potenze centrata in u, allora il raggio di convergenza R è la distanza tra u e la singolarità di $f(z)$ più vicina a u. (4.23)

Un caso particolare di funzioni che possono essere espresse come serie di potenze sono le *funzioni razionali*, cioé funzioni del tipo

$$f(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)}\,, \tag{4.24}$$

dove Q_m e P_n sono polinomi di grado m e n rispettivamente. Per queste funzioni, si può dimostrare la (4.23) facilmente, e lo faremo subito (la (4.23) vale per tutte le funzioni analitiche, e questo fatto lo dimostreremo nella terza parte).

Partiamo dall'osservazione che quanto visto nella sezione 4.7 si estende a $1/(a-z)$, per z complesso, cioè

$$\frac{1}{a-z} = \sum_k^\infty \frac{Z^k}{(a-u)^{k+1}} \quad \text{se e solo se} \quad |Z| < |a-u| \quad \text{e} \quad Z \equiv z-u \tag{4.25}$$

Poichè $h(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{1}{-i-z} - \dfrac{1}{i-z}\right]$, applicando (4.25) a entrambi i termini a secondo membro si ottiene[5]

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(-i-u)^{k+1}} - \frac{1}{(i-u)^{k+1}}\right] Z^k \tag{4.26}$$

Ciascuna delle due serie a secondo membro deve convergere, cioè devono essere soddisfatte entrambe le condizioni

$$|z-u| < |z_1-u| \tag{4.27}$$

$$|z-u| < |z_2-u| \tag{4.28}$$

dove $z_1 = -i$ e $z_2 = i$ (ci teniamo generali perché vogliamo capire qual è la lezione per un polinomio quadratico qualunque).

Si osservi che $|z-u| = r$ (reale positivo) è l'equazione di un cerchio di raggio r centrato nel punto u (nel senso della geometria analitica: il luogo dei punti z la cui distanza $|z-u|$ da u è pari a r). Quindi (4.27) e (4.28) sono le equazioni dei *dischi* concentrici, centrati nel punto u, di raggi $r_1 = |z_1-u|$ e $r_2 = |z_2-u|$ rispettivamente. Ne segue che (4.27) e (4.28) sono entrambe soddisfatte nel disco più piccolo, cioè il disco il cui raggio R è la distanza tra u e la singolarità più vicina a u. Si veda la figura 4.12. (Nel caso in cui u è sull'asse

[5] Si osservi che la (4.20) segue dalla (4.26). Infatti, per u reale si ha $|i-u| = \sqrt{1+u^2}$ e si può scrivere $i-u = \sqrt{1+u^2}e^{i\phi}$, dove $\phi = \arg(i-u)$. Similmente, per u reale, si ha $-i-u = \sqrt{1+u^2}e^{-i\phi}$.

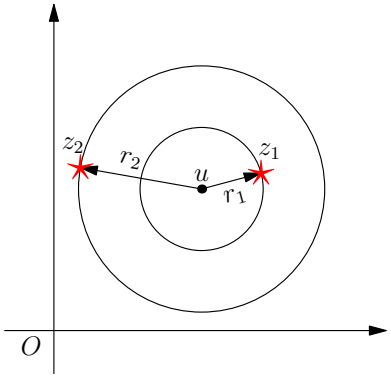


Figura 4.12: z_1 e z_2 sono le radici del polinomio $P_2(z) = z^2 + bz + c$, e quindi le singolarità (esplosioni!) della funzione $f(z) = 1/P_2(z)$. Il punto u è il centro di espansione.

reale, $z_1 = -i$ e $z_2 = i$, $R = \sqrt{1+u^2}$.) Per un polinomio quadratico $P_2(z) = z^2 + bz + c$, con radici z_1 e z_2, si ha

$$\frac{1}{P_2(z)} = \frac{A}{z_1 - z} + \frac{B}{z_2 - z}\,.$$

Le serie geometriche dei due fratti semplici a secondo membro, devono entrambe convergere. Si perviene pertanto alla stesse conclusioni di prima, illustrate dalla figura 4.12. Analogamente, per il teorema fondamentale dell'algebra, $1/P_n(z)$ si riconduce alla somma di n serie geometriche, per cui converge laddove tutte le condizioni di convergenza di queste serie sono soddisfatte. Dunque, come prima, converge nei punti z che sono comuni agli n cerchi concentrici centrati in u e il suo raggio di convergenza è, come prima, la distanza tra u e la singolarità più vicina a u. Chiaramente, la moltiplicazione di $1/P_n(z)$ per un polinomio $Q_m(z)$ non modifica questo fatto. Eventualmente, può cambiare R. Questo accade se Q_m è divisibile per uno o più dei fattori $(z_i - z)$ di P_n. Fine della dimostrazione di (4.23) per funzioni del tipo (4.24).

4.9 *L'esponenziale e le funzioni intere*

Si definisce la funzione esponenziale e^z come la serie[6]

$$e^z \equiv 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\,. \tag{4.29}$$

Allora, per l'unicità delle serie di potenze, e^z è la *sola* funzione nel piano complesso che estende la funzione reale e^x ai numeri complessi (è la sola funzione che coincide con l'esponenziale reale sull'asse reale). Questa è una proprietà molto importante!

[6] Consideriamo il seguente ragionamento: usando le regole dell'esponenziale, so che $e^z = e^x e^{iy}$, ma e^x è noto dall'analisi reale e per e^{iy} uso la formula di Eulero, quindi non c'è bisogno di una nuova definizione. Il difetto del ragionamento è questo: $e^z = e^x e^{iy}$ è al più una *definizione* del primo membro in termini del secondo. Non posso dire che l'uguaglianza è conseguenza delle usuali regole dell'esponenziale, perché ancora non so che cosa si debba intendere con il simbolo e^z.

Esercizio 4.5. Dimostrare che il raggio di convergenza di e^z è infinito.

Esercizio 4.6. Dimostrare che

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{4.30}$$

per numeri complessi a e b. Si osservi che dalla (4.30) segue che

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

Le proprietà dell'esponenziale complesso sono rese vivide dalla figura 4.13. Si consiglia caldamente di capire la figura e le relazioni che esprime (il modo migliore per ottenere questo è di ricostruirsela da soli). Altre due figure sono particolarmente utili per comprendere che tipo di funzione è l'esponenziale complesso, la 4.14 e la 4.15: la prima rappresenta un rettangolo nel piano z, la seconda mostra come

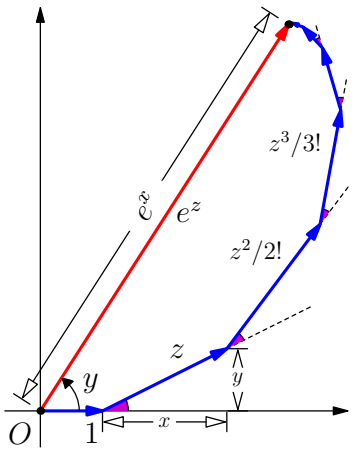


Figura 4.13: La funzione esponenziale.

questo rettangolo è trasformato nel piano $w = e^z$. I colori aiutano a capire dove finisce chi: il rosso va nel rosso, il verde nel verde e così via. Anche capire come si trasforma un movimento aiuta:

(1) Con riferimento alle due figure a lato, immaginiamo che z parta da 1 e viaggi a velocità costante v verso l'alto con legge oraria $z(t) = 1 + ivt$. Allora la legge oraria di w è $w(t) \sim e^{ivt}$, il che vuol dire che w ruota con velocità costante v attorno all'origine. Dopo che z ha percorso una distanza di 2π, w ritorna alla sua posizione iniziale.

(2) Adesso immaginiamo che z viaggi verso sinistra con velocità costante v: se parte da $1 + ai$ (a reale), ha legge oraria $z = 1 - vt + ia$. Allora si avrà $w(t) \sim e^{-vt}e^{ia}$, vale a dire, w viaggia verso l'origine con velocità che diminuisce costantemente. Viceversa, se z viaggia verso destra con velocità costante s, w si allontana dall'orgine con una velocità in costante aumento.

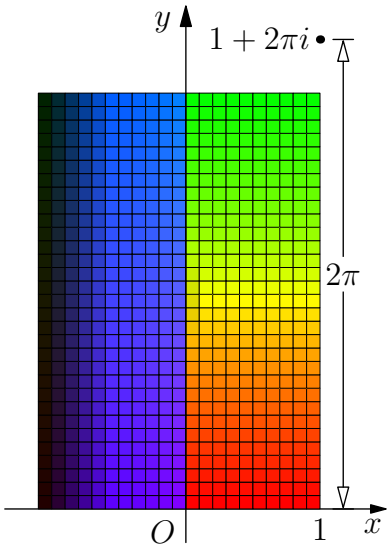


Figura 4.14: Piano z.

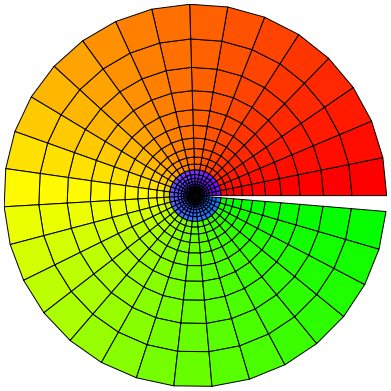


Figura 4.15: Piano $w = e^z$.

Combinando (1) e (2), si vede che l'intero piano-w (con l'eccezione di $w = 0$) è riempito dall'immagine di una striscia orizzontale, nel piano-z, di altezza 2π. È lasciato come esercizio dimostrare che linee rette nel piano z si trasformano in spirali nel piano w.

A partire dall'esponenziale si definiscono le funzioni trigonometriche e iperboliche.

Seni e coseni

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} \quad \text{e} \quad \sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

equivalentemente

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad \text{e} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Seni e coseni iperbolici

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Funzioni intere Una funzione $f(z)$ che, come l'esponenziale, le funzioni trigonometriche e iperboliche, non ha singolarità nel piano complesso è detta *funzione intera*. Come l'esponenziale, le funzioni trigonometriche e iperboliche, una funzione intera può essere espressa da una serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

con raggio di convergenza infinito.

Problemi

Problema 4.1. ☐ Dimostrare che la serie armonica

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

diverge.

Problema 4.2. ☐ Dimostrare che la serie

$$z(1-z)+z^2(1-z)+z^3(1-z)+\ldots$$

converge per $|z|<1$ e trovarne la somma.

Problema 4.3. ☐ Dimostrare che la funzione somma del problema 4.2 è discontinua per $z=1$.

Problema 4.4. ☐ Dimostrare che la funzione somma del problema 4.2 è assolutamente convergente per $|z|<1$.

Problema 4.5. ☐ Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$$

converge assolutamente per $|z|\leq 1$.

Problema 4.6. ☐ Trovare la regione di convergenza della serie

$$\frac{1}{1-z}+\frac{2z}{(1-z)^2}+\frac{4z^2}{(1-z)^3}+\ldots$$

Problema 4.7. ☐ Dare un esempio di una coppia di serie di potenze centrate nell'origine, diciamo $P(z)$ e $Q(z)$, tali che il disco di convergenza del prodotto $P(z)Q(z)$ è maggiore di ciascuno dei due dischi di convergenza di $P(z)$ e $Q(z)$.

Problema 4.8. ☐ Mostrare che ciascuna delle seguenti serie ha il cerchio unitario come disco di convergenza,

$$\text{(i)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}z^n, \qquad \text{(ii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} \qquad \text{(iii)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$$

Investigare quindi la convergenza delle serie *sul* disco $|z|=1$.

N. B. Per (ii) non si chiede una soluzione completa, ma di trovare, se ci sono, dei punti in cui la serie converge oppure diverge. Per la soluzione completa di (iii), si veda l'esercizio 4.8 nei complementi.

Problema 4.9. ☐ Si consideri la serie del problema 4.2.

(a) Dimostrare che la serie converge uniformemente alla somma z per $|z|\leq 1/2$.

(b) La serie converge uniformemente nel disco chiuso $|z|\leq r$, $r<1$? Spiegare. Che cosa si può dire per $r=1$?

Problema 4.10. ☐ Si consideri la successione

$$\frac{1}{1+nz}\,, \quad n=0,1,2,3,\ldots$$

(a) Dimostrare che la successione è uniformemente convergente a 0 per ogni z tale $|z|\geq 2$.

(b) Si può estendere la regione di uniforme convergenza data in (a)? Spiegare.

Problema 4.11. ☐ Dimostrare che il limite del problema 4.10 è una funzione discontinua in $z=0$.

Problema 4.12. ☐ Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$

nella regione $|z|\leq 1$.

Problema 4.13. ☐ Verificare l'uniforme convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nz}{n^3}$$

nella regione $|z|\leq 1$.

Problema 4.14. ☐ Si consideri la serie geometrica $P(z)=\sum_{j=0}^{\infty}z^j$. La serie converge a

$$\frac{1}{1-z}$$

dentro il disco unitario. I polinomi approssimanti sono $P_m(z)=\sum_{j=0}^{m}z^j$.

(a) Mostrare che l'errore $E_m(z)\equiv|P(z)-P_m(z)|$ è dato da

$$E_m(z)=\frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(b) Se z è un punto qualunque dentro il disco di convergenza, che cosa accade all'errore quando $m\to\infty$?

(c) Se fissiamo m, che cosa succede all'errore quando z si avvicina al bordo $|z| = 1$?

(d) Supponiamo di volere approssimare questa serie nel disco $|z| \leq 0.9$ e supponiamo inoltre che l'errore massimo che vogliamo tollerare è $\epsilon = 0.01$. Trovare il polinomio $P_m(z)$ di grado più basso che approssima $P(z)$ in tutto il disco con la precisione desiderata.

Soluzioni

Problema 4.1. □ Si raggruppino i termini della serie nel seguente modo

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\ldots$$

Ogni parentesi è maggiore di $1/2$ perché contiene 2^{n-1} termini tutti maggiori di $1/2^n$. Quindi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \quad > \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

e poiché la serie a destra ovviamente diverge anche quella sinistra deve divergere.

Problema 4.2. □ Poiché la somma dei primi n termini della serie è

$$\begin{aligned} S_n(z) &= z(1-z)+z^2(1-z)+\ldots+z^n(1-z) \\ &= z-z^2+z^2-z^3+\ldots+z^n-z^{n+1} \\ &= z-z^{n+1} \end{aligned}$$

dal problema 1.7 segue che

$$S(z)\equiv\lim_{n\to\infty}S_n=z \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z|<1$$

(incluso $z=0$, dove la serie vale 0). Alternativamente, una dimostrazione autosufficiente è la seguente: $|S_n(z)-z|=|-z^{n+1}|=|z|^{n+1}|<\epsilon$ per $(n+1)\ln|z|<\ln\epsilon$, cioè

$$n+1>\frac{\ln\epsilon}{\ln|z|} \quad \Rightarrow \quad n>\frac{\ln\epsilon}{\ln|z|}-1 \quad \text{se} \quad z\neq 0$$

Se $z=0$, $S_n(0)=0$ e $|S_n(0)-0|<\epsilon$ per ogni n. Quindi, la somma della serie è

$$S(z)=\lim_{n\to\infty}S_n=z \quad \text{per ogni } z \text{ tale che } |z|<1 \text{ (incluso } z=0!)$$

Problema 4.3. □ Dal problema 4.2, $S_n(z)=z-z^{n+1}$, $S(z)=\lim S_n(z)$. Se $|z|<1$, $S(z)=z$. Se $z=1$, $S_n(z)=S_n(1)=0$ e $\lim S_n(1)=0$. Quindi $S(z)$ è discontinua in $z=1$.

Problema 4.4. □ La serie non è di potenze. Forniamo una dimostrazione diretta. Sia

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(z) &= |z(1-z)|+|z^2(1-z)|+\ldots+|z^n(1-z)| \\ &= |1-z|\left[|z|+|z|^2+\ldots+|z|^n\right] \\ &= |1-z||z|\left[\frac{1-|z|^n}{1-|z|}\right]. \end{aligned}$$

Se $|z| < 1$, $z|^n$ tende a zero per n che va all'infinito: il limite di $\tilde{S}_n(z)$ esiste e la serie è assolutamente convergente. (Si osservi che la serie dei valori assoluti converge a $(|z||1-z|)/(1-|z|)$.)

PROBLEMA 4.5. □ Se $|z| \leq 1$,

$$\left|\frac{z^n}{n(n+1)}\right| = \frac{|z|^n}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\sum(1/n^2)$ converge, per confronto segue l'assoluta convergenza della serie.

PROBLEMA 4.6. □ La serie è geometrica (non di potenze) con primo termine $1/(1-z)$ e ragione $2z/(1-z)$. Converge quando

$$|2z| < |1-z|\,,$$

cioè quando z è dentro al cerchio d'equazione

$$3x^2 + 3y^2 + 2x - 1 = 0\,.$$

PROBLEMA 4.7. □ Lasciato alla fantasia.

PROBLEMA 4.8. □

(i) La serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge a $\frac{1}{1-z}$ per $|z| < 1$. Sul cerchio $|z| = 1$ diverge (i termini della serie non vanno a zero).

(ii) La serie

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge per $|z| < 1$. Sul cerchio $|z| = 1$, per alcuni punti converge e per altri no; ad esempio, diverge per $z = 1$ (serie armonica); converge per $z = -1$ (infatti, $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots = \ln 2$). Per lo studio completo della convergenza si veda la sezione 4.8.

(iii) La serie

$$z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{9} + \frac{z^4}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

converge *assolutamente* per $|z| \leq 1$ (quindi anche sul cerchio unitario).

PROBLEMA 4.9. □

(a) Nel problema 4.2 si è dimostrato che

$$|S_n(z) - z| < \epsilon \quad \text{per ogni} \quad n > \frac{\ln \epsilon}{\ln |z|} - 1 \quad \text{se} \quad |z| < 1 \,.$$

Quindi, a fortiori, la serie converge per $z \leq 1/2$. Ora, se $z \leq 1/2$ il massimo valore dell'errore si ha quando $|z| = 1/2$ ed è dato da

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(1/2)} - 1$$

Ne segue che $|S_n(z) - z| < \epsilon$ per ogni $n > N^*$, dove N^* dipende solo da ϵ e non dal particolare valore di z dentro $|z| \leq 1/2$.

(b) La stessa argomentazione fatta in (a) serve a dimostrare che la serie converge alla somma z per $|z| \leq 0.9$ o $|z| \leq 0.99$, usando rispettivamente

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(0.9)} - 1 \quad \text{e} \quad N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(0.99)} - 1$$

È chiaro che non si può estendere la dimostrazione a $|z| \leq 1$, perché ciò richiederebbe

$$N^* = \frac{\ln \epsilon}{\ln(1)} - 1 \,,$$

che è infinito, non esiste cioè un valore finito di N^* che possa essere impiegato in questo caso. Quindi per $|z| \leq 1$ la serie non converge uniformemente.

PROBLEMA 4.10. □

(a) Si ha

$$\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon \quad \text{per} \quad \frac{1}{|1+nz|} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |1+nz| > \frac{1}{\epsilon} \,.$$

Ora,

$$|1+nz| \leq |1| + |nz| = 1 + n|z| \quad \text{e} \quad 1 + n|z| \geq \frac{1}{\epsilon} \quad \text{per} \quad n > \frac{1/\epsilon - 1}{|z|}$$

Quindi per $|z| > 2$ la successione converge a 0.

Per dimostrare che converge uniformemente a 0, si osservi che il massimo valore di

$$\frac{1}{|z|}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$$

in $|z > 2$ si ha per $|z| = 2$ ed è dato da

$$N^* = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) \,.$$

ne segue che

$$\left| \frac{1}{1+nz} - 0 \right| < \epsilon$$

per ogni $n > N^*$, dove N^* dipende solo da ϵ e non dal particolare z in $|z| > 2$. Quindi la successione è uniformemente convergente a zero in questa regione.

(b) Se δ è un numero positivo qualsiasi, il massimo di

$$\frac{1}{|z|}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$$

in $z \leq \delta$ si ha per $|z| \geq \delta$ ed è

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right)$$

Come in (a) ne segue che la successione converge uniformemente a zero per ogni z per cui $|z| \geq \delta$, cioè in ogni regione che non comprenda punti di un intorno di $z = 0$. Poiché δ è arbitrario, questa regione può essere arbitrariamente piccola (ma non ridursi ad un punto).

PROBLEMA **4.11.** □ Dal problema 4.10, se si scrive

$$u_n(z) = \frac{1}{1+nz} \quad \text{e} \quad U(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)\,,$$

si ha $U(z) = 0$ se $z \neq 0$ e $U(0) = 1$. Quindi $U(z)$ è discontinua in $z = 0$.

PROBLEMA **4.12.** □ Poiché

$$\frac{z^n}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}\,,$$

per $|z| \leq 1$, la serie data converge uniformemente (e assolutamente) per il criterio M di Weirstrass.

PROBLEMA **4.13.** □ La funzione $\cos nz$ è ovunque limitata sull'asse reale, ma non sull'asse immaginario:

$$\begin{aligned}\cos nz &= \frac{1}{2}\left[e^{inz} - e^{-inz}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{in(x+iy)} - e^{-in(x+iy)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-ny}e^{inx} - e^{ny}e^{-inx}\right]\end{aligned}$$

Quindi, per $n \to \infty$, $\cos nz$ esplode esponenzialmente sia sull'asse immaginario positivo sia su quello negativo, fatta eccezione per $y = 0$. Se ne conclude che la serie data non converge in $|z| \leq 1$ (on in qualunque disco $|z| \leq r < 1$). La serie converge solo sull'asse reale ($y = 0$), e vi converge uniformemente (criterio M di Weirstrass).

PROBLEMA **4.14.** □ Polinomio approssimante

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} z^k$$

(a) Errore: $E_m(z) \equiv |P(z) - P_m(z)|$

$$E_m(z) = |P(z) - P_m(z)| = |z^{m+1} + z^{m+2} + \dots| = \frac{|z|^{m+1}}{|1-z|}$$

(perché per $S \equiv z^{m+1} + z^{m+2} + \dots$ si ha $S = z(z^m + S)$)

(b) Per $|z| < 1$, $E_m(z) \to 0$ per $m \to \infty$.

(c) Per m fissato $E_m(z) \to \infty$ per $z \to 1$. Per $|z| \to 1$, $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0$ si ha

$$E_m(z) \to \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}$$

(d) Per $|z| \leq r = 0.9$

$$E_m(z) \leq \frac{r^{m+1}}{1-r} = \frac{0.9^{m+1}}{0.1} = \epsilon = 0.01 \quad \Rightarrow \quad m \approx 67$$

Risulta così dimostrato che la serie geometrica converge *uniformemente* nel disco di raggio r.

Complementi

Somma di Cesaro

È importante aver chiaro che, per quanto la definizione di somma infinita come limite della successione delle somme parziali s_n appaia molto naturale, è pur sempre una definizione: non è l'unica possibile, né l'unica rilevante in analisi e in matematica applicata. Ad esempio, la nozione di somma infinita di Cesaro, che è il limite, quando esiste, delle *medie aritmetiche* delle somme parziali,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$$

svolge un ruolo altrettanto importante, ad esempio nella teoria delle serie di Fourier e nella fisica matematica dei processi diffusivi. Si osservi che quando si cambia la nozione di sommabilità, una serie che prima era divergente può diventare convergente. Ad esempio, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ è divergente secondo la definizione usuale, ma è sommabile secondo Cesaro.

Ernesto Cesàro (1859–1906) è stato un matematico italiano. Ha dato importanti contributi alla geometria differenziale e alla teoria delle serie infinite.

Esercizio 4.7. Qual è la somma di Cesaro della serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$?

Soluzione. La successione delle somme parziali della serie $1-1+1-1+\ldots$ è

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

La successione delle medie aritmetiche delle somme parziali è

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \ldots .$$

Poiché questa successione converge a $1/2$, la somma di Cesaro della serie è $1/2$. □

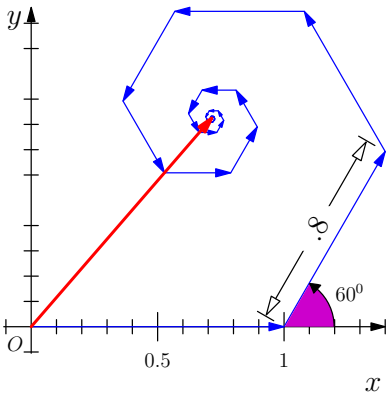
Visualizzazione geometrica delle serie di potenze

Una serie di numeri complessi, per quanto infinita, è pur sempre una somma di vettori nel piano. È dunque utile farsene una rappresentazione geometrica. Siamo interessati al caso in cui n diventa infinitamente grande, e quindi al caso in cui la lunghezza dei vettori (= modulo = norma) varia, in particolare, diventa sempre più piccola man mano che n aumenta. Come nel caso della diffrazione di una grata, consideriamo il caso più semplice di serie con stessa differenza di fase tra termini successivi, cioè la serie geometrica

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots .$$

La studieremo graficamente con un programma di grafica vettoriale (Asymptote), usando il seguente codice elementare:

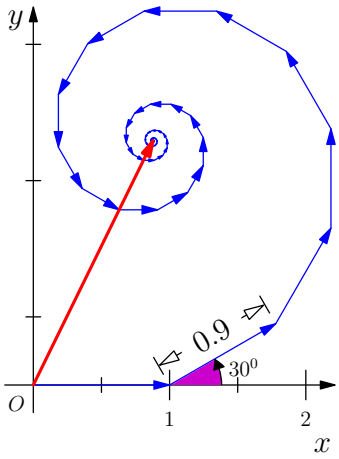
```
pair O= (0,0);  //origine nel piano complesso
pair z = r* dir(theta); // r e theta sono rispettivamente modulo e angolo di z
int m ; // numero di iterazioni (m-esima somma parziale della serie)
pair [ ] s=  new pair[m];
s[0] = (1,0);
for(int n=1; n<=m-1 ; ++n)
s[n] =   s[n-1] + z^n ;
for(int n=1; n<=m-1 ; ++n)
draw(s[n-1]--s[n], Arrow);
```

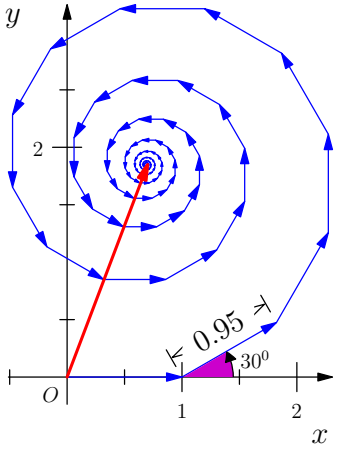


Incominciamo con un vettore dentro il disco unitario. Per $r = 0.8$ e $\theta = 60^0$, si ottiene la figura a lato. Il primo vettore della serie è 1, il secondo è z. In figura ne abbiamo indicato la lunghezza. Il vettore in rosso denota la somma dei vettori (solita regola del parallelogramma). Facendo variare m si vede che il risultato numerico si stabilizza attorno alla somma

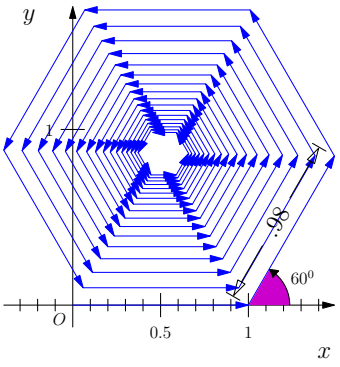
$$\frac{1}{1 - 0.8\angle(60^0)}$$

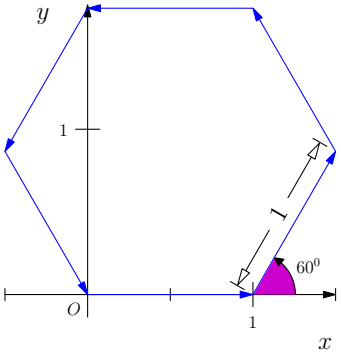
Adesso facciamo avvicinare z al bordo del disco. Ecco i risultati per $r = 0.9$ (figura a sinistra) e $r = 0.95$ (e $\theta = 30^0$):



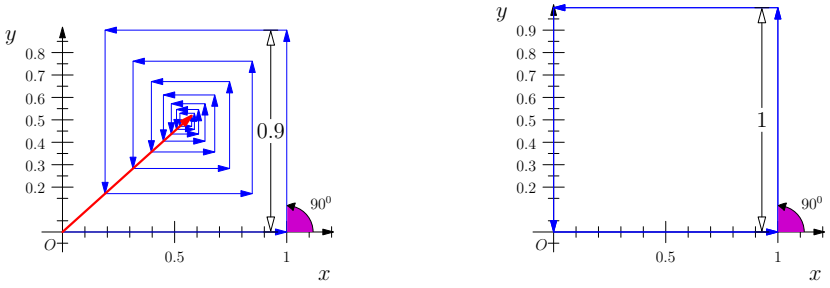


Com'era da aspettarsi, la convergenza per $r = 0.95$ è molto più lenta. Adesso mettiamo a confronto z vicinissimo al cerchio unitario e z sul cerchio per $\theta = 60^0$:

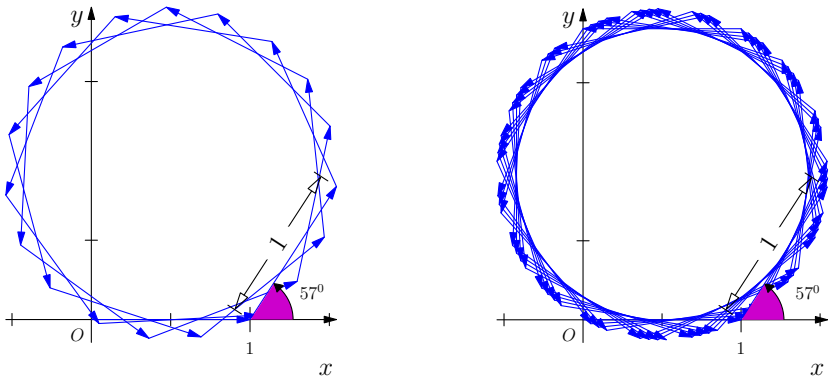




Nel primo caso ($r = 0.98$, a sinistra) la convergenza è lentissima: $m = 100$, ma la serie non si à ancora stabilizzata (potete indovinare dove finirà?). La figura a destra mostra che per $z = 1$ non ci potrà mai essere convergenza: l'"orbita"della serie è periodica e l'esagono regolare è percorso indefinitivamente all'aumentare di m, senza che mai ci sia stabilizzazione della somma. Ecco un altro esempio dello stesso tipo, per $\theta = 90^0$:



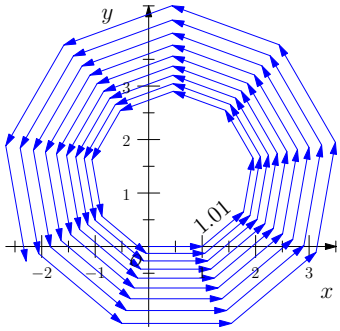
Il fatto che quando z è sul cerchio, compaia un poligono regolare non è generico: è solo dovuto al fatto che 60 e 90 sono divisori interi di 360. Per una diversa scelta dell'angolo, l'orbita cessa d'essere periodica. Ecco i risultati per $\theta = 57^0$: nella figura a sinistra, $m = 20$, in quella a destra, $m = 80$:

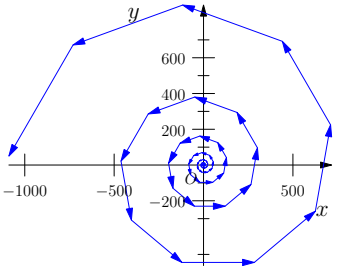


La figura a destra mostra che al crescere di m l'orbita copre uniformemente un anello circolare (si potrebbe dimostrare che lo compre densamente, ma questo esula dai nostri scopi). Quindi non ci può essere convergenza.

Infine, appena z esce dal disco, la serie tende all'infinito. Ecco due

casi: per $r = 1.01$ e $r = 1.1$ ($\theta = 40^0$ in entrambi i casi):





Regolarizzazione di Abel

Abel inventò anche un metodo per regolarizzare serie divergenti sul cerchio $\mathbb{T}$. Introdusse quella che oggi è nota come sommabilità o regolarizzazione di Abel,

$$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\theta} \equiv \lim_{r\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

In altre parole, il valore di Abel della serie sul cerchio unitario nel punto θ è quello ottenuto come limite $r \to 1$, lungo la direzione θ, della serie dentro al disco. La sommabilità secondo Abel è molto liberale e rende finite somme che sarebbero altrimenti infinite come limite delle somme parziali. Ad esempio, per la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ si ha

$$A\text{-}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \lim_{r\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n = \lim_{r\to 1} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}$$

Valgono i seguenti teoremi:

- Se una serie è sommabile nel senso usuale, allora è sommabile secondo Abel.
- Se una serie è sommabile secondo Abel, allora è sommabile secondo Cesaro (ma non necessariamente viceversa).

Il metodo di Abel si applica non solo allle serie, ma anche agli integrali divergenti. La regolarizzazione di Abel per gli integrali è

$$A\text{-}\int f(x)dx \equiv \lim_{\lambda\downarrow 0} \int e^{\lambda x} f(x)dx$$

In fisica, il metodo di Abel per regolarizzare serie e integrali è più usato di quello di Cesaro — forse perché la sommabilità secondo Abel è ancora più liberale di quella secondo Cesaro.

Che cosa succede sul cerchio di convergenza

ESERCIZIO 4.8. Investigare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

sul cerchio $|z| = 1$.

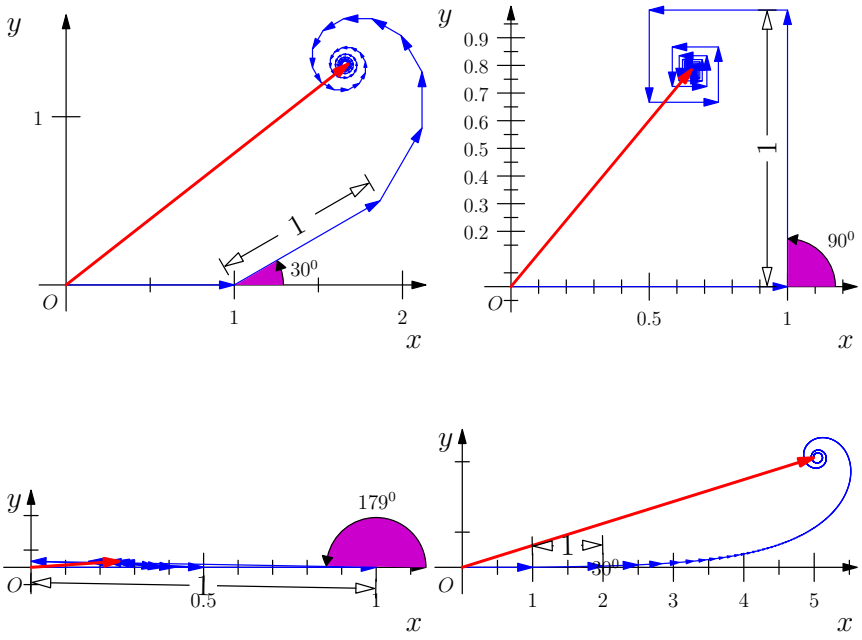
Nel problema 4.8 si è stabilito che la serie converge per $|z| < 1$. Per z sul cerchio, si ponga $z = e^{i\theta}$ e si riscriva la serie come

$$e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \frac{1}{4}e^{4i\theta} + \dots \tag{4.31}$$

Non sembra azzardato scommettere sulla convergenza di questa serie. Poichè $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ converge, lo stesso potrebbe essere vero per (4.31): dopo tutto, al variare di n, i termini

$$e^{ni\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

hanno anch'essi alternanze di segno che potrebbero essere tali da produrre le compensazioni giuste e quindi la convergenza. L'analisi numerica della convergenza della serie sembra dare supporto a questa congettura. Ecco quattro grafici che si ottengono studiando numericamente la serie per diversi valori dell'angolo:



Il primo in alto a sinistra è per $\theta = 30^0$, il secondo in alto per $\theta = 90^0$. L'analisi numerica di $\theta = 180^0$ non dà buoni frutti: la convergenza è estremamente lenta. Comunque, teoricamente, sappiamo

che la serie converge a $\ln 2$. La prima figura sotto a sinistra illustra il caso $\theta = 179^0$, quella a destra, $\theta = 1^0$; per $\theta = 0$ sappiamo che la serie diverge (serie armonica). Le serie sono state troncate al grado n del polinomio per cui si ha stabilità numerica della somma (vettore rosso).

Dati questi risultati numerici, dovrebbe essere possibile dimostrare che (4.31) converge. Tuttavia, i criteri usuali sembranon funzionare in quanto coinvolgono il modulo dell'n-esimo termine della serie, e il modulo non distingue tra la serie (4.31) e la serie armonica, che diverge. Quando si è in difficoltà conviene ragionare partendo dai principi di base, in questo caso dalla definizione di serie convergente e dal criterio di Cauchy.

Consideriamo le somme parziali $n-$esima e $m-$esima ($n>m$).

$$S_m = e^{i\theta} + \frac{1}{2}e^{2i\theta} + \frac{1}{3}e^{3i\theta} + \ldots + \frac{1}{m}e^{mi\theta} \tag{4.32}$$

$$S_n = S_m + \frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\theta} + \ldots + \frac{1}{n}e^{ni\theta} \tag{4.33}$$

Se ne facciamo la differenza,

$$S_n - S_m = \frac{1}{m+1}e^{(m+1)i\theta} + \ldots + \frac{1}{n}e^{ni\theta} \tag{4.34}$$

e poi stimiamo il modulo, sembrerebbe che siamo punto e daccapo perché l'*unico modo* che abbiamo per stimare il modulo di una somma (a meno che non siamo in grado di calcolarla esplicitamente, come è il caso per la progressione geometrica!) è

$$|z_1 + \ldots + z_p| \leq |z_1| + \ldots + |z_p| \tag{4.35}$$

L'idea che ci fa uscire dall'impasse è questa: *moltiplicare* (4.32) *e* (4.33) *per un numero α dipendente da θ, in modo che*

$$|\alpha S_n - \alpha S_m|$$

dia qualcosa che, stimato con la (4.35)*, possa essere reso più piccolo di un qualunque ϵ, per n e m sufficientemente grandi*. Dopo vari tentativi ed errori, si scopre che $\alpha = (e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})$ fornisce proprio quello che si vuole. Infatti,

$$\begin{aligned}
\alpha(S_n - S_m) = {} & \frac{1}{m+1}e^{(m+1+\frac{1}{2})i\theta} + \frac{1}{m+2}e^{(m+2+\frac{1}{2})i\theta} + \ldots + \frac{1}{n-1}e^{(n-1+\frac{1}{2})i\theta} + \frac{1}{n}e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} \\
& \qquad \searrow \qquad\qquad \searrow \qquad\qquad\qquad \searrow \\
& - \frac{1}{m+1}e^{(m+1-\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{m+2}e^{(m+2-\frac{1}{2})i\theta} - \ldots - \frac{1}{m-1}e^{(m-1+\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{n}e^{(n-\frac{1}{2})i\theta} \\
& = e^{(m+1+\frac{1}{2})i\theta}\left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right] + \ldots + e^{(n-1+\frac{1}{2})i\theta}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] \\
& + \frac{1}{n}e^{(n+\frac{1}{2})i\theta} - \frac{1}{m+1}e^{(m+1-\frac{1}{2})i\theta}
\end{aligned}$$

da cui, applicando la (4.35),

$$|\alpha(S_n - S_m)| \leq \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right] + \ldots + \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n} + \frac{1}{m+1}$$
$$= \frac{2}{m+1}$$

quindi, per n e m sufficientemente grandi, $|S_n - S_m|$ è più piccolo di un qualunque ϵ. Risulta così dimostrato che la serie (4.31) converge nell'intervallo aperto $\theta \in (0, 2\pi)$ [che in $\theta = 0$ diverga, era già stato stabilito].

Nella dimostrazione la forma esplicita dei coefficienti $c_n = 1/n$ non gioca un ruolo essenziale, conta soltanto il fatto che $c_n \to 0$ (per potere applicare il criterio di Cauchy). Sulla falsariga dell'esempio sopra, risulta così dimostrato il teorema di Abel (4.17).

5
Derivate e integrali

Indice

5.1 *La nozione di derivata* 99
5.2 *Derivate di trasformazioni non-lineari* 102
5.3 *Applicazioni ai sistemi dinamici* 105
5.4 *La nozione di integrale* 110
5.5 *Integrali di linea, di superficie e di volume* 112
5.6 *Integrali impropri* 115
5.7 *Convergenza uniforme di integrali impropri* 118
5.8 *Derivazione sotto il segno di integrale* 119
5.9 *Integrali di gaussiane* 120
COMPLEMENTI 124

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) è stato un matematico, filosofo, scienziato, logico, diplomatico, giurista, storico, magistrato e bibliotecario tedesco. A lui si deve il termine "funzione" (coniato nel 1694) che egli usò per individuare varie quantità associate ad una curva, tra cui il suo valore, la pendenza, la perpendicolare e la corda in un punto. A Leibniz, assieme a Isaac Newton, vengono generalmente attribuiti l'introduzione e i primi sviluppi del calcolo infinitesimale, in particolare del concetto di integrale, per il quale si usano ancora oggi molte delle sue notazioni. È considerato un precursore dell'informatica e del calcolo automatizzato: fu inventore di una calcolatrice meccanica detta appunto Macchina di Leibniz.

5.1 *La nozione di derivata*

Al cuore del calcolo differenziale c'è la nozione di derivata. Una funzione f di variabile reale x è detta differenziabile in un punto $a \in \mathbb{R}$, se esiste un numero, denotato $f'(a)$, tale che

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)\,. \tag{5.1}$$

Il numero $f'(a)$ è detto derivata della funzione nel punto a. L'equazione (5.1) non ha senso nel caso generale di una funzione vettoriale, ma può essere trasformata facilmente in una che lo ha.

Sia L è la trasformazione lineare definita da $L(x-a) = f'(a)(x-a)$, allora (5.1) è equivalente a

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - L(x-a)|}{|x-a|} = 0\,. \tag{5.2}$$

Questa equazione di solito si interpreta dicendo che $f(a) + L(x-a)$, (la retta tangente alla funzione in a) è una buona approssimazione di f in a.

Questo si estende facilmente a funzioni vettoriali. Sia $\mathbf{F}$ una funzione vettoriale da (un sottoinsieme di) $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$. Allora la sua approssimazione lineare nel punto $\mathbf{a}$ (se esiste) sarà $\mathbf{F}(\mathbf{a}) + L(\mathbf{r}-\mathbf{a})$, dove L è una *trasformazione lineare* che mappa variazioni $\mathbf{r}-\mathbf{a}$ della variabile indipendente, cioè vettori in $\mathbb{R}^n$, in vettori di $\mathbb{R}^m$. La nozione di distanza tra punti, anziché dal modulo $|\cdot|$, sarà data dalla norma (o modulo o lunghezza) $||\cdot||$ in $\mathbb{R}^n$ e in $\mathbb{R}^m$. Segue la definizione:

La funzione $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è *differenziabile* in un punto $\mathbf{a}$ del suo dominio se esiste una trasformazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che

$$\lim_{\|\mathbf{r}-\mathbf{a}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) - L(\mathbf{r}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{r}-\mathbf{a}\|} = 0\,. \tag{5.3}$$

Se $\mathbf{F}$ è differenziabile in tutti i punti di una regione Ω contenuta in $\mathbb{R}^n$, allora $\mathbf{F}$ è detta differenziabile in Ω.

La trasformazione lineare L nel punto $\mathbf{a}$ è detta *derivata* di $\mathbf{F}$ in $\mathbf{a}$ e, come nel caso unidimensionale, usualmente si denota con $\mathbf{F}'(\mathbf{a})$. Per come è stata definita, essa fornisce l'approssimazione lineare di una funzione $\mathbf{F}$ in $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{r}-\mathbf{a}) + o(\,||\mathbf{r}-\mathbf{a}||\,)\,,$$

dove $o(\,||\mathbf{r}-\mathbf{a}||\,)$ denota una quantità che è di ordine superiore rispetto a $\mathbf{r}-\mathbf{a}$, (cioè tende a zero più rapidamente di $||\mathbf{r}-\mathbf{a}||$).

È utile riscrivere la definizione di derivata, per un generico punto $\mathbf{r} \in \Omega$ come (denotando con $\mathbf{dr}$ una variazione finita)

$$\lim_{\|\mathbf{dr}\|\to 0} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{r}+\mathbf{dr}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}'(\mathbf{r})(\mathbf{dr})\|}{\|\mathbf{dr}\|} = 0\,, \tag{5.4}$$

La rappresentazione matriciale di $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$, rispetto alle basi naturali di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, è denotata $[\mathbf{F}'(\mathbf{r})]$ ed è detta *matrice jacobiana*. Al variare di $\mathbf{r}$ in Ω risulta definito il campo si trasformazioni $\mathbf{F}' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e il corrispondente campo $[\mathbf{F}']$ di matrici jacobiane.

ESERCIZIO 5.1. Dimostrare che la matrice jacobiana è

$$[\mathbf{F}'(\mathbf{r})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{r}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{r}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{r}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Soluzione di 5.1. Siano $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ e $\mathbf{u}_1, \dots \mathbf{u}_m$ le basi ortonormali naturali in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$. Allora

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n \quad \text{e}$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f_1(\mathbf{r})\mathbf{u}_1 + \dots + f_m(\mathbf{r})\mathbf{u}_m\,.$$

Per determinare la matrice $D\mathbf{F}(\mathbf{r})$ rispetto a tali basi, basta determinare come la trasformazione lineare $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ agisce sui vettori di base; occorre cioè calcolare $\mathbf{F}'(\mathbf{r})(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots n$. Questo è facile: si ponga $\mathbf{dr} = \epsilon\mathbf{e}_i$ nella (5.4). Allora

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{e}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \epsilon\mathbf{F}'(\mathbf{r})(\mathbf{e}_i)\|}{\epsilon} = 0$$

avendo usato che $\mathbf{e}_i$ ha norma pari a 1. Dividendo per ϵ,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \left\| \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r}+\epsilon\mathbf{e}_i) - \mathbf{F}(\mathbf{r})}{\epsilon} - \mathbf{F}'(\mathbf{r})(\mathbf{e}_i) \right\| = 0\,,$$

riconosciamo nel limite del quoziente la derivata parziale di $\mathbf{F}$ rispetto a x_i. Quindi,

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r})(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i}(\mathbf{r}) = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{r})\mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{r})\mathbf{u}_m\,,$$

da cui segue che la matrice jacobiana è

$$[\mathbf{F}'(\mathbf{r})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{r}) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{r}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{r}) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{r}) \end{bmatrix}$$

□

DIFFERENZIALE La nozione di derivata è molto semplice, ma, sfortunatamente ci sono diversi modi e notazioni per dire la stessa cosa. Di solito, si introduce il differenziale $\mathbf{dF} = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, in termini del quale si esprime l'approssimazione lineare della funzione come $\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{dF}$. Poiché $\mathbf{dF}$ dipende linearmente dalla variazione $\mathbf{r} - \mathbf{a}$, la nozione di differenziale e di derivata sono sostanzialmente la stessa cosa. Di solito, si pone $\mathbf{r} - \mathbf{a} = \mathbf{dr}$, intendendo con ciò che il simbolo "$\mathbf{dr}$" rappresenta una variazione finita e non infinitamente piccola della variabile indipendente $\mathbf{r}$ (vedi sotto). Riassumendo,

$$\mathbf{dF} = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{dr})\,. \tag{5.6}$$

Sebbene $\mathbf{dF}$ e $d\mathbf{r}$ siano definiti senza alcun riferimento a quantità infinitamente piccole, cioè più piccole di qualunque quantità finita, si finisce prima o poi usare tali espressioni. Contrariamente a quello che talvolta si dice, è proprio perché disponiamo di definizioni rigorose come la (5.3), che tale uso è giustificato. Occorre solo tenere a mente che uguaglianze tra infinitesimi significano uguaglianze tra quantità finite *a meno di termini di ordine superiore nei differenziali*. Ad esempio, se si scrive $\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{dr}) = \mathbf{dF}$, si intende che a secondo membro si trascurano termini di ordine superiore in $\mathbf{dr}$, cioè termini che vanno a zero più rapidamente di $\mathbf{dr}$. Ma questo è proprio ciò che la definizione (5.3) significa.

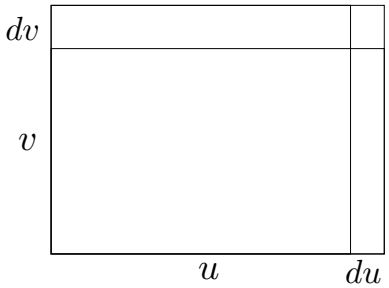


Figura 5.1: Leibniz basò il calcolo differenziale per funzioni a più variabili sulla regola di trascurare gli infinitesimi di ordine superiore. Con riferimento alla figura sopra, è geometricamente ovvio che la variazione dell'area del rettangolo è $d(uv) = udv + vdu + dudv$. Trascurando $dudv$ si ha la regola di Leibniz (5.8). A loro volta, u e v possono dipendere da altre quantità, ad esempio $v = t$ e $u = t^2$. Allora $dv = dt$ e $du = 2tdt$, che è la regola della funzione composta. A partire da queste due regole, Leibniz sviluppò tutto il calcolo.

Nelle mani di Leibniz, gli infinitesimi furono il motore per lo sviluppo del calcolo differenziale. Se utilizzati nel senso sopra indicato, sono ancora molto utili per ottenere rapidamente risultati in modo euristico. Ad esempio, si possono ottenere le regole fondamentali del calcolo, come la regola della funzione composta,

$$\mathbf{d}(\mathbf{F} \circ \mathbf{g}) = \mathbf{dF} \circ \mathbf{dG}\,, \tag{5.7}$$

dove "$\circ$" a secondo membro significa composizione di trasformazioni lineari, cioè moltiplicazione delle corrispondenti matrici jacobiane (naturalmente (5.7) ha senso se $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$) , o la regola di Leibniz per funzioni scalari u e v a più variabili,

$$\mathbf{d}(uv) = u\mathbf{d}v + (\mathbf{d}u)v\,. \tag{5.8}$$

Naturalmente, la giustificazione di (5.7) e (5.8) è nelle dimostrazioni rigorose basate sulla definizione (5.3), ma è utile sapere che si possono ottenere anche, in modo euristico, usando l'idea di Leibniz degli infinitesimi, cioè mediante uguaglianze in cui si trascurano quantità di ordine superiore; si veda la didascalia che accompagna la figura 5.1.

CAMPI SCALARI Una prima applicazione della derivata è ai campi scalari, cioè alle funzioni f su $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$. Assumiamo per semplicità $n = 3$. Allora la derivata $f'(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, è rappresentata da una matrice jacobiana 1×3, il vettore riga

$$[f'(\mathbf{r})] = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

ed è quindi la seguente forma lineare sui vettori $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$

$$df = f'(\mathbf{r})(d\mathbf{r}) = \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial dx}dx + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}dy + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}dz\,, \tag{5.9}$$

Se $\mathbb{R}^3$ è lo spazio euclideo, lo spazio vettoriale delle variazioni $d\mathbf{r}$, è dotato di prodotto scalare naturale e di norma indotta dal prodotto scalare. Allora lo spazio delle forme lineari su di esso è canonicamente isomorfo a $\mathbb{R}^3$, secondo la corrispondenza discussa nella sezione 2.8, e quindi la derivata può essere equivalentemente espressa mediante il vettore

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}) \equiv \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z}\mathbf{k}\,. \tag{5.10}$$

Al variare di $\mathbf{r}$ in $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r})$ definisce un campo vettoriale su $\mathbb{R}^3$, detto *gradiente* di f. Usualmente, quando è chiaro quale sia la variabile indipendente, si omette il pedice $\mathbf{r}$ e si scrive semplivemente $\boldsymbol{\nabla}$. Se si rappresenta la derivata con il gradiente, la sua azione sulla variazione della variabile indipendente è data dal prodotto scalare,

$$f'(\mathbf{r})(d\mathbf{r}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r}\,,$$

che, ovviamente, coincide con la (5.9). Quando la derivata è applicata ad una variazione $\mathbf{n}$ di norma 1, si ha la *derivata direzionale* di f nella direzione di $\mathbf{n}$:

$$\nabla_{\mathbf{n}} f(\mathbf{r}) \equiv (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{r}) \bullet \mathbf{n} \tag{5.11}$$

Se $\mathbb{R}^3$ rappresenta lo spazio fisico, è chiaramente da intendersi come spazio euclideo, ma, nelle applicazioni, non sempre $\mathbb{R}^3$, o in generale $\mathbb{R}^n$, sono da ritenersi spazi euclidei. Ad esempio, nelle applicazioni del calcolo differenziale alla termodinamica, la nozione appropriata di derivata è quella originaria di forma lineare. Questo perché nello spazio degli stati termodinamici, ad esempio U (energia interna), V (volume) e N (numero di moli), non c'è alcuna nozione di distanza che abbia significato invariante. In questo caso, ad esempio, la derivata dell'entropia S è

$$dS = S'(U, V, N)(dU, dV, dN) = \frac{\partial S}{\partial U}dU + \frac{\partial S}{\partial V}dV + \frac{\partial S}{\partial N}dN$$

5.2 *Derivate di trasformazioni non-lineari*

Soffermiamoci adesso su funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$. Nelle applicazioni, esserappresentano trasformazioni non lineari di $\mathbb{R}^n$ o campi vettoriali

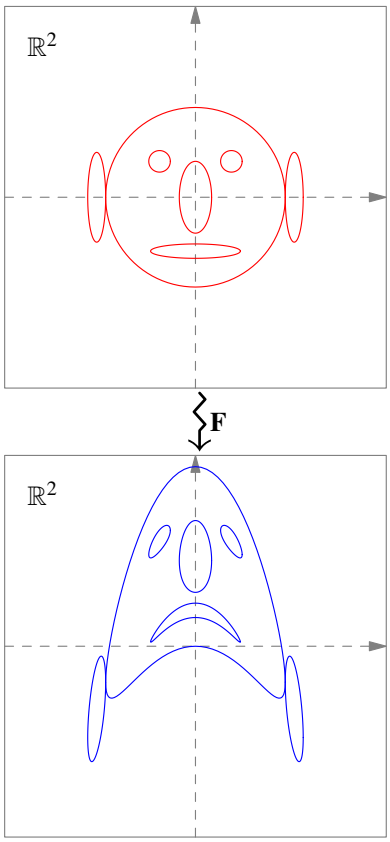


Figura 5.2: Trasformazione non-lineare **F**:

$$u = x\,,\quad v = 1 - ax^2 + y\,.$$

(per disegnare la figura si è scelto a=1.4). Questa funzione è associata alla cosidetta mappa di Henon che è studiata in teoria dei sistemi dinamici.

definiti su $\mathbb{R}^n$. Il secondo caso è quello del campo di velocità di un fluido o dei campi elettrici e magnetici, il primo si incontra in teoria dell'elasticità, nello studio delle coordinate curvilinee e nella teoria dei sistemi dinamici. La figura 5.2 illustra una trasformazione del piano, che emerge nello studio di un sistema dinamico, mostrando come vengono distorte certe regioni del piano.

Naturalmente, le trasformazioni lineari o operatori sono un caso particolare di trasformazioni di $\mathbb{R}^n$ in sé stesso e la loro derivata $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ è rappresentata da una matrice con elementi costanti. Invece la derivata di una trasformazione non-lineare è rappresentata da una matrice $n \times n$ non costante, la matrice jacobiana (5.5),

$$[\mathbf{F}'(\mathbf{r})] = \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} \; \cdots \; \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n} \right] ,$$

dove $\partial \mathbf{F}/\partial x_i$ sono da intendersi come vettori colonna per ciascun $i = 1, \ldots, n$. Se $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ è la base naturale di $\mathbb{R}^n$, i vettori della matrice jacobiana sono i trasformati dei vettori della base,

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} = \mathbf{F}'(\mathbf{e}_i) \, . \tag{5.12}$$

Conveniamo di chiamare tali vettori $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{r})$ (in quanto dipendono dal punto $\mathbf{r}$). La derivata descrive la *struttura locale* della trasformazione $\mathbf{F}$ e, per mettere in evidenza questo fatto, si può usare il linguaggio degli infinitesimi, ponendo $\mathbf{d}x_i = dx_i \mathbf{e}_i$ e riscrivendo la (5.12) così

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r})(\mathbf{d}\mathbf{x}_i) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_i} dx_i \, . \tag{5.13}$$

Esempio 5.1. Si consideri la trasformazione di $\mathbb{R}^2$ data dalla funzione $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (u, v)$, $\mathbf{r} = (x, y)$,

$$u = x^2 - 2y^2$$
$$v = xy$$

Allora (applicando direttamente la regola di Leibniz)

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x dx - 4y dy \\ y dx + x dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -4y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

da cui segue che la matrice jacobiana è

$$[\mathbf{F}'(x, y)] = \begin{bmatrix} 2x & -4y \\ y & x \end{bmatrix} .$$

Quindi i vettori di base $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono trasformati nei vettori $\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -4y \\ x \end{bmatrix}$. Equivalentemente, i vettori infinititesimi $\mathbf{d}x = dx\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{d}y = dy\mathbf{e}_2$, sono trasformati nei vettori $dx\mathbf{f}_1$ e $dy\mathbf{f}_2$.

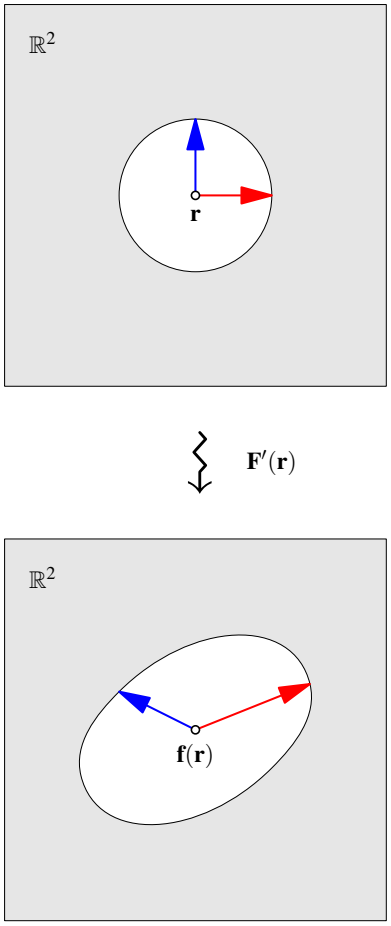


Figura 5.3: Struttura locale della funzione $\mathbf{F}$ dell'esempio 5.1 nel punto $\mathbf{r} = (x, y)$. I due vettori ortogonali di lunghezza unitaria $\mathbf{e}_1$ (in rosso) e $\mathbf{e}_2$ (in blu) sono trasformati da $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ nei vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ di diversa lunghezza e con angoli di rotazione differenti.

ESEMPIO 5.2. Si consideri la trasformazione $\mathbf{F}$ del piano generata dalla funzione complessa z^2 incontrata nel Capitolo 1,

$$\begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned} \tag{1.13}$$

Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova

$$[\mathbf{F}'(x,y)] = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} .$$

Ma adesso i due vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ sono ortogonali tra loro (essendo nullo il loro prodotto scalare). Posto $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$, si ottiene

$$[\mathbf{F}'(x,y)] = 2r \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

che è il prodotto di un fattore di scala $2r$ per una matrice di rotazione ortogonale. Adesso la situazione è quella mostrata in figura 5.4: tutti i vettori centrati in $\mathbf{r}$ vengono riscalati dello stesso fattore $2r$ e ruotati dello stesso angolo θ. In particolare, il cerchio si trasforma in un cerchio di raggio $2r$ e i vettori ortogonali $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ si trasformano nei vettori ortogonali $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$.

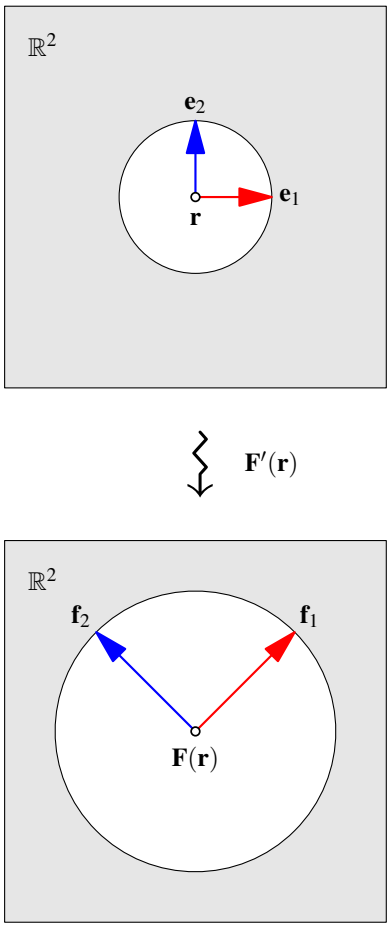


Figura 5.4: Struttura locale della funzione $\mathbf{F}$ dell'esempio 5.2 nel punto $\mathbf{r}$. I due vettori ortogonali di uguale lunghezza $\mathbf{e}_1$ (in rosso) e $\mathbf{e}_2$ (in blu) sono trasformati da $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ in vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ di uguale lunghezza e ruotati dello stesso angolo. La figura mostra chiaramente che l'effetto locale della trasformazione è una dilatazione combinata con una rotazione ortogonale, per cui un cerchio è trasformato in un cerchio (in generale di raggio differente).

La trasformazione (1.13) ha una *struttura locale* particolarmente semplice. Ciò che è sorprendente è che questa struttura non dipende dalla particolare scelta della funzione, ma vale per qualunque trasformazione $\mathbf{F}$ del piano in sé stesso che sia data da una *funzione analitica*. Si può dire che questa caratteristica geometrica sia il marchio di fabbrica *geometrico* delle funzioni analitiche.

DETERMINANTE JACOBIANO Come risulta chiaro dagli esempi precedenti (e come si può facilmente dimostrare in generale), gli elementi vettoriali della matrice jacobiana (5.5),

$$[\mathbf{F}'(\mathbf{r})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

rappresentano come si trasformano gli elementi della base $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Allora il determinate della derivata

$$J(\mathbf{r}) = \det(\mathbf{F}'(\mathbf{r})) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n} \end{vmatrix} , \tag{5.14}$$

detto *determinante jacobiano*, è il volume del parallelepipedo con spigoli di base $\partial\mathbf{F}/\partial x_1, \ldots \partial\mathbf{F}/\partial x_n$. Si veda la nota sul significato geometrico del determinante a p. 35. Quindi, il determinante jacobiano, fornisce un'importante informazione sulla struttura locale della funzione $\mathbf{F}$, ci dice come si trasformano localmente i volumi. Il segno

del terminate contiene informazione sull'orientazione del parallelepipedo trasformato; se interessa il volume vero e proprio si prenderà il modulo del determinante. Se si considera il parallelepipedo rettangolare determinato dalla base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, con spigoli di lunghezza $dx_1, \dots, dx_n$ e con vertice nel punto $\mathbf{r}$, allora il suo volume è $dx_1 \cdots dx_n$ e il volume del parallelepipedo trasformato è

$$\left|\det(\mathbf{F}'(\mathbf{r}))\right| dx_1 \cdots dx_n \tag{5.15}$$

Sovente, per il determinate jacobiano si usa la notazione

$$J(\mathbf{r}) = \frac{\partial(F_1, F_1, \dots F_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)} \tag{5.16}$$

Operatori differenziali Sia $\mathbf{F}$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$. Dalla la sua derivata $\mathbf{F}'$ si estraggono[1] operatori differenziali rilevanti nelle applicazioni, tra questi, la *divergenza* div $\mathbf{F}$, che è la traccia di $[\mathbf{F}']$

[1] Nel senso della (3.40).

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{F}\,. \tag{5.17}$$

Per $n = 3$, la parte antisimmetrica della matrice jacobiana è associata (nel senso della (3.44)) al *rotore* $\operatorname{rot} \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}$.

Un operatore differenziale molto importante è l'operatore di Laplace o Laplaciano di un campo scalare f così definito

$$\Delta f = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} \bullet \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} f = \boldsymbol{\nabla}^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,. \tag{5.18}$$

Nelle applicazioni, sovente si usano coordinate diverse dalle cartesiane, ed quindi importante conoscere le espressioni degli operatori differenziali nei sistemi di coordinate più usati. Il laplaciano in coordinate cilindriche è $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, z,

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{5.19}$$

e in coordinate sferiche $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$, è

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}. \tag{5.20}$$

(Per il calcolo di (5.19) e (5.20), si vedano i complementi a pag. 124.)

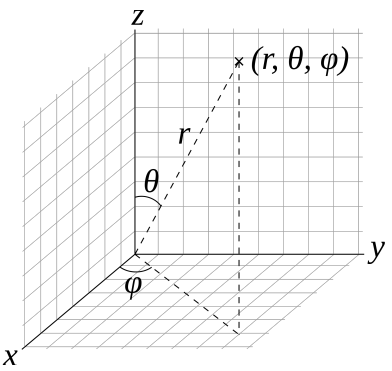


Figura 5.5: Coordinate sferiche, secondo la convenzione comunemente usata in fisica.

5.3 *Applicazioni ai sistemi dinamici*

La derivata fornisce un importante strumento nella studio della struttura locale di un sistema dinamico. Un sistema dinamico è un sistema il cui stato $\mathbf{r}_t$ evolve nel tempo secondo il sistema di equazioni

differenziali del prim'ordine

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \tag{5.21}$$

dove $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, è un campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$, detto campo di velocità. $\mathbb{R}^n$ è detto lo *spazio delle fasi* del sistema. La condizione che $\mathbf{v}$ non dipenda dal tempo non è restrittiva: se dipendesse dal tempo basterebbe aggiungere la variabile $x_{n+1} = t$ e passare al sistema in $\mathbb{R}^{n+1}$ con equazione aggiuntiva $\dot{x}_{n+1} = 1$. Dunque, qualunque equazione differenziale di ordine m o qualunque sistema di equazioni differenziali può essere trasformato in un sistema dinamico con spazio delle fasi $\mathbb{R}^n$ per n opportuno; per esempio, un'equazione del secondo ordine in t con termini dipendenti da t può essere trasformata in un istema dinamico con spazio delle fasi $\mathbb{R}^3$. Se il campo $\mathbf{v}$ è abbastanza regolare la soluzione di (5.21), per una data condizione iniziale $\mathbf{r}_0$ al tempo $t = 0$ esiste di è unica. La soluzione è data da una famiglia ad un parametro di funzioni $\mathbf{F}(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, detta *flusso*, che trasforma lo stato iniziale $\mathbf{r}_0$ stato $\mathbf{r}_t$ al tempo t, vale a dire, $\mathbf{r}_t = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t)$. La relazione tra campo di velocità e flusso è

$$\left.\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) \,.$$

Il flusso ha l'importante proprietà di composizione

$$\mathbf{F}(\cdot, t + s) = \mathbf{F}(\cdot, t) \circ \mathbf{F}(\cdot, s) \tag{5.22}$$

che corrisponde al fatto che $\mathbf{r}_{t+s} = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t), s)$.

Il vantaggio di trasformare equazioni differenziale o sistemi di equazioni differenziali nella forma di un sistema dinamico (5.21) sta nel poter utilizzare metodi geometrici e il linguaggio idrodinamico per studiare il sistema. Le soluzioni di (5.21) possono infatti essere interpretate come le line di flusso delle particelle di un fluido nello spazio delle fasi: al variare di t, la soluzione $\mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t)$ descrive come evolve nel corso del tempo la traiettoria di una particella del fluido che inizialmente, al tempo $t = 0$, si trovava nel punto $\mathbf{r}_0$. Le linee di flusso non si intersecano e in ogni punto il campo di velocità è tangente ad esse. Perciò, la semplice rappresentazione grafica del campo di velocità fornisce già un'informazione utile sulle soluzioni del sistema. Tale rappresentazione grafica è detta *ritratto di fase*.

La figura 5.6 fornisce un "ritratto di fase" del pendolo semplice (in un'unità di misura opportune)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x \end{aligned}$$

Le soluzioni sono le linee di flusso del campo $\mathbf{v} = (y, -\sin x)$.

Esempio 5.3.

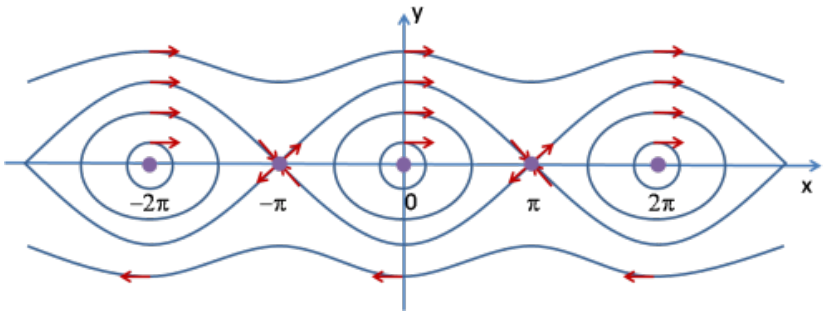


Figura 5.6: Ritratto di fase del pendolo semplice. Le freccette rosse indicano alcuni vettori del campo $\mathbf{v} = (y, -\sin x)$. Sono raffigurate linee di flusso del campo che rappresentano le traiettorie del sistema nello spazio delle fasi.

I punti fissi del sistema sono i punti per cui il campo $\mathbf{v}$ si annulla, sono cioè le soluzioni $\mathbf{a}$ dell'equazione $\mathbf{v}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, e sono anche detti punti di equilibrio o, nel linguaggio idrodinamico, punti di stagnazione del fluido. Il primo passo nello studio di un sistema dinamico è lo studio di come evolvono *piccole* perturbazioni $\mathbf{dr} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ nell'intorno di un punto di equilibrio $\mathbf{a}$. In questo studio, la derivata di $\mathbf{v}$ gioca un ruolo importante. Infatti, sostituendo $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{dr}$ nella (5.21), si ottiene

$$\dot{\mathbf{dr}} = \mathbf{v}(\mathbf{a} + \mathbf{dr}) = \mathbf{v}(\mathbf{a}) + \mathbf{v}'(\mathbf{a})\mathbf{dr} + o(||\mathbf{dr}||) = \mathbf{v}'(\mathbf{a})\mathbf{dr} + o(||\mathbf{dr}||),$$

dove, come di consueto, $o(||\mathbf{dr}||)$ denota una quantità che tende a zero più rapidamente di $||\mathbf{dr}||$. Trascurando questa quantità, si ottiene l'*approssimazione lineare* del sistema nel punto $\mathbf{a}$:

$$\dot{\mathbf{dr}} = A\mathbf{dr}, \tag{5.23}$$

dove si è posto $A = \mathbf{v}'(\mathbf{a})$. Essendo A una trasformazione lineare, (5.23) è un sistema lineare e le sue soluzioni possono essere facilmente trovate. Se A è rappresentata da un matrice diagonalizzabile, si può usare il metodo esposto nella sezione 3.5.

Poichè la (5.23) governa l'evoluzione temporale di una piccola perturbazione nell'intorno di un punto di equilibrio, essa ci fornisce informazioni utili sul sistema. Altrettanto utile è sapere come evolvono piccole perturbazioni dell'intorno di un qualunque punto, non necessariamente d'equilibrio. Questo serve, in particolare, a determinare se il sistema è caotico, cioè se piccole perturbazioni divergono esponenzialmente nel corso del tempo. L'argomento è molto interessante, ma esula dai nostri scopi. Vogliamo invece accennare a come si trasformano i volumi nello spazio delle fasi, essendo questo collegato ad importante teorema di meccanica e una applicazione naturale della nozione di determinate jacobiano.

Soluzione di 5.2. I punti di equilibrio sono le soluzioni di $\mathbf{v} = (y, -\sin x) = (0,0)$. Queste sono $(0, n\pi)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (i punti in viola nella figura 5.6). Basta studiare l'approssimazione lineare della dinamica in $(0,0)$ e $(0,\pi)$, essendo le altre ottenute da queste per periodicità. Calcoliamo $[\mathbf{v}'(x,y)]$:

$$[\mathbf{v}'(x,y)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{bmatrix}$$

Siano $A_0 = [\mathbf{v}'(0,0)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_\pi = [\mathbf{v}'(0,\pi)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Poniamo $\mathbf{dr} = (u,v)$. Allora l'approssimazione lineare della dinamica nell'intorno di $(0,0)$ è

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix}$$

mentre nell'intorno di $(0,\pi)$ è

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = A_\pi \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$$

Nel primo caso, si tratta della dinamica dell'oscillatore armonico lineare: le traiettorie sono cerchi centrati nell'origine, con legge oraria che è combinazione lineare di $\cos(t)$ e $\sin(t)$. L'origine è un punto di equilibrio stabile. Nel secondo caso, le soluzioni sono combinazioni lineari di $\exp(t)$ e $\exp(-t)$. Il punto $(0,\pi)$ è un punto di equilibrio instabile. □

ESERCIZIO 5.2. Trovare l'approssimazione lineare del pendolo semplice nei suoi punti di equilibrio.

TEOREMA DI LIOUVILLE Consideriamo il parallelepipedo rettangolo, con spigoli determinati dalla base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ di volume unitario con vertice nella condizione iniziale $\mathbf{r}_0$. Vogliamo sapere come varia il suo volume dopo un tempo t in conseguenza della trasformazione $\mathbf{r}_t = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t)$. La risposta è data dalla (5.14), con la sola differenza che la funzione $\mathbf{F}$ adesso dipende anche dal parametro t:

$$J(\mathbf{r}_0, t) = \left|\det(\mathbf{F}'(\mathbf{r}_0, t))\right| \tag{5.24}$$

Il seguente teorema stabilisce come $J(\mathbf{r}_0, t)$ evolve nel corso del tempo:

Teorema di Liouville. Il tasso di variazione percentuale di volume nell'intorno di un punto dello spazio del fasi è dato dalla divergenza del campo di velocità in quel punto:

$$\frac{1}{J(\mathbf{r}_0, t)} \frac{dJ(\mathbf{r}_0, t)}{dt} = \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{v}(\mathbf{r}_t) \tag{5.25}$$

dove $\mathbf{r}_t = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t)$.

Ad esempio, la divergenza del campo $\mathbf{v} = (y, -\sin x)$ del pendolo semplice è

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{v} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(-\sin x)}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

e quindi il volume non varia nel corso del tempo. Si osservi che se si introduce un termine di smorzamento e si considera il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y - \sin x\,, \end{aligned}$$

la divergenza di $\mathbf{v} = (y, -\gamma y - \sin x)$ è adesso uguale a $-\gamma$. Quindi $\dot{J} = -\gamma J$ e dunque il volume decresce esponenzialmente nel corso del tempo.

Un sistema dinamico è detto Hamiltoniano se il suo spazio delle fasi è pari, cosicché $\mathbf{r}$ può essere scritto come $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, con $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ di uguale dimensione, e se esiste un campo scalare sullo spazio delle fasi $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, detto hamiltoniana, tale che

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}), -\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right)\,. \tag{5.26}$$

Il pendolo semplice (senza smorzamento) è un esempio di sistema hamiltoniano, con hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}y^2 + \cos x$$

Dimostrazione di (5.25). Consideriamo l'evoluzione tra t e $t + dt$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{t+dt} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}_t, t + dt) \\ &= \mathbf{r}_t + \left.\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_t} dt + o(dt) \\ &= \mathbf{r}_t + \mathbf{v}(\mathbf{r}_t)dt + o(dt) \end{aligned}$$

Calcoliamone la derivata rispetto a $\mathbf{r}_t$

$$\mathbf{F}'_{t+dt}(\mathbf{r}_t) = I + \mathbf{v}'(\mathbf{r}_t)dt + o(dt)$$

La variazione di volume tra t e $t + dt$ è data dal determinante jacobiano

$$\begin{aligned} J(\mathbf{r}_t, t + dt) &= \det\left[\mathbf{F}'_{t+dt}(\mathbf{r}_t)\right] \\ &= \det\left[I + \mathbf{v}'(\mathbf{r}_t)dt + o(dt)\right] \end{aligned}$$

Ricordando la formula $\det(I + \epsilon A) = 1 + \operatorname{tr}(A)\epsilon + O(\epsilon^2)$, si ottiene

$$\begin{aligned} J(\mathbf{r}_t, t + dt) &= 1 + \operatorname{tr}\left[\mathbf{v}'(\mathbf{r}_t)\right] dt + o(dt) \\ &= 1 + \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{v}(\mathbf{r}_t)dt + o(dt) \end{aligned}$$

Si consideri adesso $J(\mathbf{r}_0, t + dt)$. Dalla (5.22) (ricordando che il determinante di una funzione composta è il prodotto dei determinanti) segue che

$$J(\mathbf{r}_0, t + dt) = J(\mathbf{r}_t, t + dt)J(\mathbf{r}_0, t)$$

Allora, sostituendo il valore trovato per $J(\mathbf{r}_t, t + dt)$, si ottiene

$$J(\mathbf{r}_{t+dt}; \mathbf{r}_0) = \left[1 + \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{v}(\mathbf{r}_t)dt\right] J(\mathbf{r}_0, t) + o(dt)\,.$$

vale a dire

$$J(\mathbf{r}_{t+dt}; \mathbf{r}_0) - J(\mathbf{r}_0, t) = \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{v}(\mathbf{r}_t)dt\, J(\mathbf{r}_0, t) + o(dt)\,.$$

Passando al limite $dt \to 0$, il teorema risulta dimostrato. □

N. B. Si può dimostrare il teorema anche usando la nozione di derivata idrodinamica. Vista l'importanza di questa nozione, spieghiamo che cosa sia. Data una quantità $\Phi(\mathbf{r}, t)$ (campo scalare, vettoriale , etc.), la sua derivata rispetto al flusso $\mathbf{r}_t = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0, t)$ è definita nel seguente modo:

$$\frac{D\Phi}{Dt}(\mathbf{r}, t) \equiv \left[\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{r}_t, t)\right]_{\mathbf{r}_t=\mathbf{r}}$$

ed è detta *derivata idrodinamica*. Usando la regola della derivata della funzione composta e osservando che $\dot{\mathbf{r}}_t = \mathbf{v}$, si ottiene

$$\frac{D\Phi}{Dt}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{r}) \bullet \boldsymbol{\nabla})\,\Phi(\mathbf{r}, t)$$

Questa derivata fornisce una misura del tasso di variazione della quantità Φ lungo le linee di flusso. Usando la derivata idrodinamica, il teorema di Liouville diventa

$$\frac{DJ}{Dt}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{v}(\mathbf{r})J(\mathbf{r}, t)\,.$$

(che a meno di una costante arbitraria è l'energia totale del pendolo, essendo y la velocità e x la posizione). Si osservi che la (5.26) implica che il sistema dinamico ha forma di Hamilton

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{y}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{5.27}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{5.28}$$

Se il campo $\mathbf{v}$ ha la forma (5.26) allora la sua divergenza è nulla. Infatti,

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{x}} \bullet \nabla_{\mathbf{y}} H - \nabla_{\mathbf{y}} \bullet \nabla_{\mathbf{x}} H = 0$$

(assumendo, ovviamente, che H sia abbastanza liscia in modo tale che lo scambio delle derivate parziali sia legittimo). *La dinamica hamiltoniana conserva dunque il volume nello spazio delle fasi*. Le regioni dello spazio delle fasi possono deformarsi in modo orrendo, ma il loro volume non cambia. Un esempio di questo tipo è la funzione della figura 5.2, che è l'analogo a tempo discreto di un sistema hamiltoniano: la dinamica distrorce la faccetta che, dopo un po' di iterazioni, diventa decisamente irriconoscibile, ma la sua area è conservata.

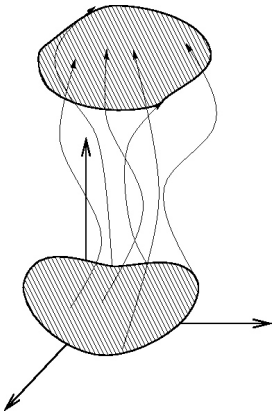


Figura 5.7: Evoluzione temporale nello spazio delle fasi. Il flusso $\mathbf{F}$ di un sistema hamiltoniano conserva il volume.

Un valore negativo della divergenza di $\mathbf{v}$ è il marchio di fabbrica dei sistemi dissipativi, di cui un (famoso) esempio è il sistema di Lorenz.

ESERCIZIO 5.3. Il sistema

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz$$

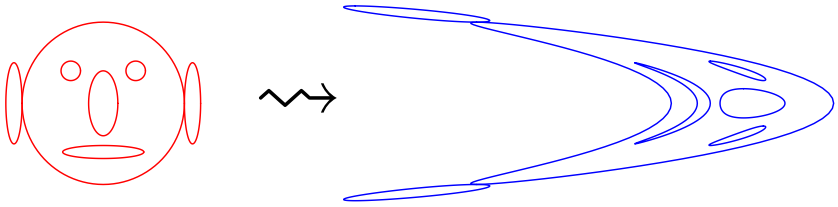
$$\dot{z} = xy - bz$$

dove σ, r e b sono parametri, fu ottenuto da Lorentz come approssimazione della dinamica di un fluido che è soggetto ad un gradiente di temperatura. Trovare per quale valore dei parametri il sistema è dissipativo.

ESERCIZIO 5.4. La mappa di Henon

$$\mathbf{F} = (u, v), \quad u = y + 1 - ax^2, \; v = by,$$

distorce il piano e produce l'effetto mostrato nella figura sotto



Studiare come cambia il volume quando la mappa di Henon è iterata n volte.

Per disegnare la figura, sono stati scelti $a = 1.4$ e $b = .7$. Iterando questa trasformazione, $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{r}) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{r})) \mapsto \ldots \mathbf{F}^n(\mathbf{r}) \ldots$, si ottiene una dinamica a tempo discreto, che è stata estensivamente studiata in teoria dei sistemi dinamici. In particolare, per il valore di a scelto e per $b = .3$, la dinamica è dissipativa (verificare!) e caotica. Nel limite $n \to \infty$ la dinamica tende ad un attrattore strano di dimensione frattale maggiore di 1.

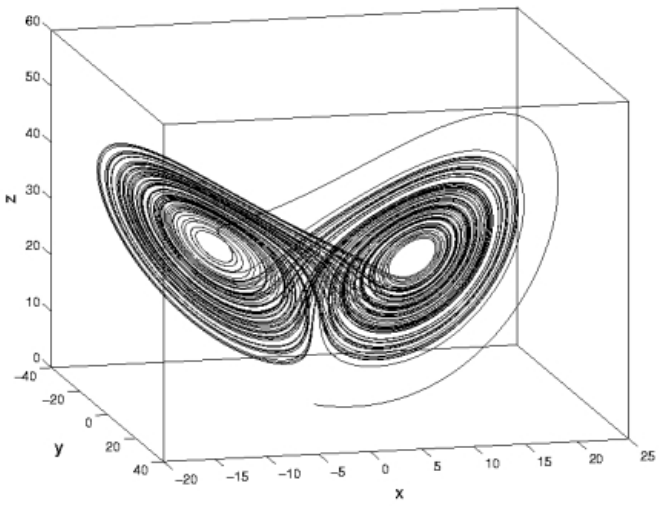


Figura 5.8: Attrattore strano del sistema di Lorenz. Per valori opportuni dei parametri, il volume di qualunque regione tende esponenzialmente a zero e la dinamica schiaccia lo spazio delle fasi su una varietà di volume nullo. Questa varietà si ottiene mediante simulazione numerica, facendo evolvere il sistema con condizione iniziale tipica. L'effetto è mostrato in figura. Tale varietà è un esempio di "attrattore strano".

5.4 *La nozione di integrale*

L'integrale di una funzione di variabile reale x su un intervallo $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx$$

è definito informalmente come l'area della regione nel piano xy limitata dal grafico della funzione f, l'asse delle x e le linee verticali $x = a$ e $x = b$ in modo tale che l'area sopra l'asse delle x è aggiunta al totale e quella sotto è sottratta dal totale.

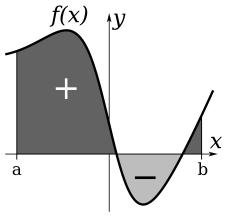


Figura 5.9: Integrale come area con segno.

I principi dell'integrazione furono formulati indipendentemente da Newton e Leibniz. Attraverso il teorema fondamentale del calcolo che essi svilupparono indipendentemente, l'integrazione e collegata alla differenziazione: se f è una funzione continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, l'integrale di f sul questo intervallo è

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \tag{5.29}$$

dove F è un'antiderivata (o primitiva) di f, cioè una funzione F tale che la sua derivata è f.

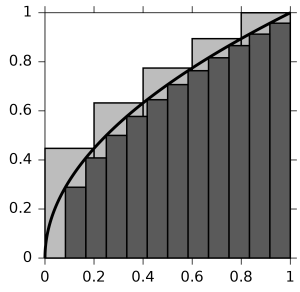


Figura 5.10: Integrale come limite di somme di Riemann (inferiori e superiori).

Nel XIX secolo teorie rigorose dell'integrazione furono avviate da Cauchy e portate a compimento da Riemann. La teoria classica dell'integrazione dei testi di calcolo differenziale e integrale è quella di Riemann: l'integrale è definito come limite di approssimazioni mediante rettangoli dell'area:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\,, \tag{5.30}$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ è una partizione in sottointervalli di $[a,b]$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ e ξ_k è un qualunque numero in $[x_{k-1}, x_k]$. Se il limite $\Delta x_k \to 0$, $n \to \infty$ esiste ed è indipendente da come la suddivisone viene compiuta, la funzione è detta *integrabile* (secondo Riemann) su $[a,b]$ e il limite definisce l'integrale di f su $[a,b]$. L'integrale di Riemann è una trasformazione lineare a valori reali, cioè un funzionale lineare: se f e g sono integrabili e α e β sono costanti, allora anche $\alpha f + \beta g$ è integrabile e

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

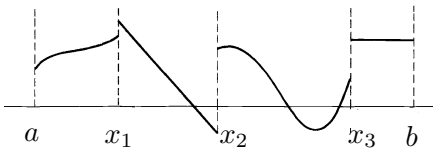
Si dice che un insieme di punti sull'asse x ha *misura nulla* se la lunghezza di degli intervalli che ricoprono tutti i punti dell'insieme può essere resa piccola a piacere. Si può dimostrare che ogni insieme numerabile sull'asse reale ha misura nulla. In particolare l'insieme dei razionali, che è numerabile, ha misura nulla. Quando una proprietà vale tutti i punti, eccetto che per un insieme di misura nulla, si dice che la proprietà vale *quasi ovunque*.

L'applicabilità della teoria classica dell'integrazione è resa trasparente dal seguente teorema.

Una funzione su un intervallo compatto $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann se e solo se è limitata e continua quasi ovunque. (5.31)

Un esempio di funzione non integrabile, in quanto discontinua ovunque, è la funzione di Dirichlet che vale 1 se x è razionale e 0 se x è non razionale.

Definizione di funzione generalmente continua. Si dice che una funzione è generalmente continua in un intervallo $[a,b]$ se è possibile dividere l'intervallo in un numero finito di intervalli in ognuno dei quali la funzione sia *continua* e abbia limite destro e limite sinistro *finiti*. Nella figura sotto è rappresentato un esempio di funzione $f(x)$ generalmente continua.



La funzione rappresentata ha discontinuità in x_1, x_2 e x_3. I limiti destro e sinistro, ad esempio in x_2 sono rappresentati rispettivamente da

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(x_2+\epsilon) = f(x_2+0) = f(x_2+)$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(x_2-\epsilon) = f(x_2-0) = f(x_2-),$$

dove $\epsilon > 0$. Segue immediatamente da (5.31) che *una funzione generalmente continua in un intervallo $[a,b]$ è integrabile*.

Esempio 5.4. La nozione di somma di Riemann (5.30) non ha solo un valore teorico, ma ha anche utilità pratica. Nelle applicazioni può accadere di trovarsi di fronte a limiti del seguente tipo

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{ak}{N}\right)\frac{a}{N}.$$

In questi casi, è importante riconoscere l'approssimazione di Riemann di un integrale: si ha una partizione dell'intervallo $[0,a]$ in intervallini Δx_k di ampiezza uguale e pari a a/N e $f(ka/N)$ è il valore della funzione calcolata nell'estremo destro dei Δx_k. Dunque,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{ak}{N}\right)\frac{a}{N} = \int_0^a f(x)dx\,.$$

Ad esempio, nello studio del fenomeno di Gibbs in teoria delle serie di Fourier, si incontra il seguente limite:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{N}\right)}{k\frac{\pi}{N}}\frac{\pi}{N} = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$$

5.5 *Integrali di linea, di superficie e di volume*

La nozione di integrale di Riemann come limite di approssimazioni si estende facilmente a più dimensioni. Un *integrale di linea* è definito per funzioni di due o più variabili, e l'intervallo di integrazione $[a, b]$ è sostituito da una certa curva che collega due punti sul piano o nello spazio. In un *integrale di superficie*, la curva è sostituito da un pezzo di una superficie in uno spazio tridimensionale o n-dimensionale e in un integrale di volume, la superficie è sostituita da una regione in $\mathbb{R}^n$. Integrali di forme differenziali svolgono un ruolo fondamentale nella moderna geometria differenziale. Queste generalizzazioni degli integrali nacquero dalle esigenze di fisica e svolgono un ruolo importante nella formulazione di molte leggi fisiche, in particolare quelle dell'elettrodinamica. Riassumiamo brevemente le definizioni di questi integrali in $\mathbb{R}^3$.

Gli integrali di linea, superficie e volume di un campo scalare f sono

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt \tag{5.32}$$

$$\int_S f\, dS = \iint_T f(\mathbf{r}(s,t)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial t} \right| ds\, dt \tag{5.33}$$

$$\int_{\mathcal{R}} f dv = \iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z) dx dy dz \tag{5.34}$$

Nel primo caso, C è una *curva liscia a tratti* e $\mathbf{r} : [a, b] \to C$ è un'arbitraria parametrizzazione biettiva della curva della curva C tale che $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$ sono i punti terminali della curva C e $a < b$. Nel secondo caso $\mathbf{r} : T \to S$ è un'arbitraria parametrizzazione biettiva della della superficie S, dove T è una qualche regione del piano e (s, t) è un punto in essa; "$\times$" denota il prodotto vettore. Nel terzo caso $\mathcal{R}$ è una regione chiusa dello spazio. Gli integrali sono definiti come limiti di opportune somme di Riemann, per esempio l'integrale di linea è

$$\int_C f\, ds = \lim_{\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{r}(t_i)) \Delta s_i.$$

e analogamente gli altri.

Particolarmente utile in fisica, e l'integrale di linea di un campo vettoriale $\mathbf{F}$ lungo una una curva liscia a tratti C, parametrizzata nel senso sopra descritto,

$$I = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\, dt, \tag{5.35}$$

Analogamente all'integrale di un campo scalare, I è definito come limite di somme di Riemann.

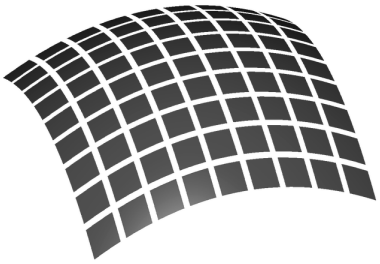


Figura 5.11: La definizione dell'integrale di superficie si basa sul suddividere la superficie in piccoli elementi di superficie, sulla costruzione delle corrispondenti somme di Riemann e sul passaggio al limite quando il numero degli elementi di superficie tende all'infinito.

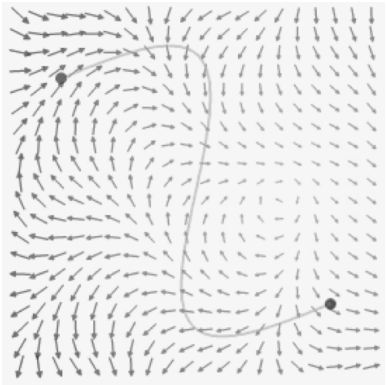


Figura 5.12: Integrale di linea come lavoro del campo di forse su una particella che si muove lungo una curva.

Se $\mathbf{F}$ rappresenta un campo di forze, l'integrale rappresenta il lavoro del campo su una particella che si sposta da $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(b)$ lungo la curva C. Se C è una *curva semplice chiusa*, cioè una curva che non interseca mai sé stessa, l'integrale di linea lungo C è detto circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo C; per denotarlo scriviamo

$$\Gamma(\mathbf{F}, C) \equiv \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}\,. \tag{5.36}$$

Se $\mathbf{F}$ è il gradiente di un campo scalare G (cioè se $\mathbf{F}$ è conservativo), vale a dire $\nabla G = \mathbf{F}$, allora la derivata della composizione di di G e $\mathbf{r}$ è

$$\frac{dG(\mathbf{r}(t))}{dt} = \nabla G(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\,,$$

e quindi

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\, dt = \int_a^b \frac{dG(\mathbf{r}(t))}{dt}\, dt = G(\mathbf{r}(b)) - G(\mathbf{r}(a)),$$

che è dunque l'analogo del teorema fondamentale del calcolo per integrali di linea (fatta salva l'importante differenza che non tutti i campi vettoriali sono gradienti). In altre parole, l'integrale di $\mathbf{F}$ su C dipende solo dai valori di G nei punti $\mathbf{r}(a)$ e $\mathbf{r}(b)$ ed è perciò indipendente dal cammino tra di loro.

Un integrale di superficie di un campo vettoriale è l'analogo bidimensionale dell'integrale di linea:

$$\int_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dS = \iint_T \mathbf{F}(\mathbf{r}(s,t)) \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}(s,t)}{\partial t} \right) ds\, dt\,,$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie in ogni punto. Fisicamente, l'integrale rappresenta il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}$ attraverso la superficie S. Per una superficie semplice chiusa, scriviamo

$$\Phi(\mathbf{F}, S) \equiv \oint_S \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S}\,. \tag{5.37}$$

Teoremi di Gauss e Stokes I teoremi fondamentali del calcolo vettoriale sono:

$$\int_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \mathbf{F}\, dv = \oint_{\partial \mathcal{R}} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} \quad (\textit{Teorema della divergenza o di Gauss}) \tag{5.38}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \bullet d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \quad (\textit{Teorema del rotore o di Stokes}) \tag{5.39}$$

Nella (5.38), $\mathcal{R}$ è una regione di $\mathbb{R}^3$ che è compatta che ha come bordo liscio a tratti la superficie chiusa $S = \partial \mathcal{R}$. Nella (5.39), S è una superficie che ha come bordo liscio a tratti la curva chiusa $C = \partial S$.

Identità di Green Dal teorema della divergenza applicato al campo $\mathbf{F} = \psi \nabla \varphi$ seguono due importanti equazioni dette *identità di*

Green. Siano φ e ψ due funzioni scalari definite in qualche regione $\mathcal{R}$ di $\mathbb{R}^3$ e si supponga che φ sia continuamente differenziabile due volte e ψ una sola volta. Allora la prima identità di Green è[2]

$$\int_{\mathcal{R}} (\psi \Delta\varphi + \boldsymbol{\nabla}\varphi \bullet \boldsymbol{\nabla}\psi)\, d\nu = \oint_{\partial\mathcal{R}} (\psi \boldsymbol{\nabla}\varphi) \bullet d\mathbf{S}\,, \tag{5.40}$$

dove Δ è il laplaciano. Se entrambe φ e ψ sono continuamente differenziabili due volte, per scambio di φ con ψ e sottrazione, si ottiene la seconda identità di Green:

$$\int_{\mathcal{R}} (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi)\, d\nu = \oint_{\partial\mathcal{R}} (\psi \boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi \boldsymbol{\nabla}\psi) \bullet d\mathbf{S}\,. \tag{5.41}$$

[2] Per ottenerla dal teorema della divergenza si usa la regola del prodotto

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet (g\mathbf{F}) = g\boldsymbol{\nabla} \bullet (\mathbf{F}) + \boldsymbol{\nabla}(g) \bullet \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{F})$$

e l'identità $\Delta = \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{\nabla}$.

Teorema di Green nel piano Consideriamo i teoremi di Gauss e Stokes nel piano per $\mathbf{F} = (u, v)$ e $\mathcal{R}$ una regione del piano delimitata da una curva C. Allora il primo membro del teorema della divergenza diventa

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy\,,$$

e il secondo diventa il flusso attraverso C. Poiché $\mathbf{n}$ è normale alla curva (si veda la figura a margine), si ha $d\mathbf{S} = (dy, -dx)$. Allora

$$\Phi(\mathbf{F}, C) = \oint_C u dy - v dx \tag{5.42}$$

e quindi il teorema della divergenza diventa

$$\oint_C -v dx + u dy = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \tag{5.43}$$

Calcoliamo adesso la circuitazione di $\mathbf{F}$ lungo C

$$\Gamma(\mathbf{F}, C) = \oint_C u dx + v dy\,. \tag{5.44}$$

Ma il rotore di $\mathbf{F}$ è ortogonale al piano e il suo flusso attraverso $\mathcal{R}$ vale

$$\int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy$$

e quindi il teorema del rotore diventa

$$\oint_C u dx + v dy = \int_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy \tag{5.45}$$

Sostituendo u con $-v$ e v con u in quest'ultima equazione, si ritrova la (5.43). La conclusione è che, nel piano, i teoremi della divergenza e del rotore sono la stessa cosa. La (5.45) è chiamata *teorema di Green* nel piano.

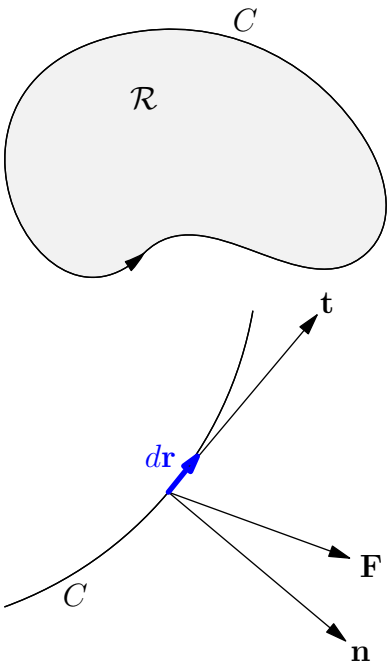


Figura 5.13: In alto: regione del piano delimitata da una curva semplice chiusa. In basso: incremento $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ in un punto $\mathbf{r}$ della curva nella direzione del vettore $\mathbf{t}$, tangente alla curva in $\mathbf{r}$; $\mathbf{n}$ è il vettore normale a $\mathbf{t}$ e $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS = (dy, -dx)$.

Cambiamento delle variabili di integrazione Nel valutare l'integrale su una regione $\mathcal{R}$, riesce spesso utile operare con coordinate diverse da quelle cartesiane e cioè con coordinate curvilinee,

come ad esempio, le coordinate sferiche. Analizziamo la situazione nel caso particolare del calcolo di un integrale di una funzione scalare $f = f(x,y)$ su $\mathbb{R}^2$ e siano $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ coordinate curvilinee nel piano. La corrispondenza tra coordinate x, y e coordinate u, v è biunivoca e quindi si ha anche $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$ in modo tale che ad ogni punto del piano x, y corrisponde un punto del piano u, v e viceversa. In tal caso, la regione $\mathcal{R}$ nel piano x, y viene trasformata nella regione $\mathcal{R}'$ nel piano u, v Risulta quindi

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\mathcal{R}'} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial u,v)}\right| dudv\,, \tag{5.46}$$

dove $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial u,v)}$ è il determinate jacobiano (5.16). Intuitivamente, questa formula è una conseguenza immediata del significato geometrico del determinante jacobiano come volume infinitesimo.

5.6 *Integrali impropri*

La definizione originale di integrale di Riemann non si applica a funzioni come $1/x^2$ sull'intervallo $[1, \infty]$, perché in questo caso il dominio di integrazione è illimitato. Tuttavia, l'integrale di Riemann può sovente essere esteso per continuità, definendo l'integrale improprio come limite

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

La nozione di integrale di Riemann non si applica neanche alla funzione$1/\sqrt{x}$ nell'intervallo $[0,1]$. Il problema adesso è che l'integrando è una funzione illimitata nel domino di integrazione (la definizione richiede che sia il dominio di integrazione sia la funzione integranda siano limitati). Tuttavia esiste, come integrale improprio se inteso come il limite

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = 2.$$

Nel primo caso si parla di *integrale improprio di prima specie*, nel secondo, di *integrale improprio di seconda specie*.

Un integrale improprio converge se il limite che lo definisce esiste. Così, per esempio, si dice che l'integrale improprio $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ esiste ed è uguale a L se l'integrale sotto il limite esiste per tutti i t sufficientemente grandi, e il valore del limite è pari a L. È anche possibile per un integrale improprio a divergere all'infinito. In tal caso, si può assegnare il valore di ∞ (o di $-\infty$) all'integrale. Per

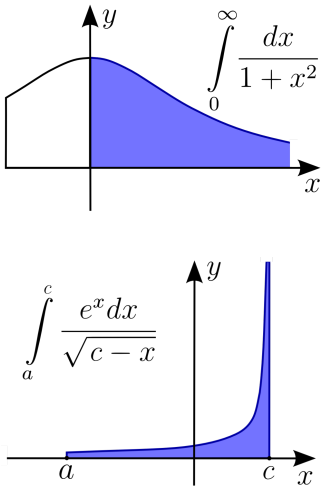


Figura 5.14: In alto: integrale improprio di prima specie (il dominio di integrazione è illimitato) In basso: integrale improprio di seconda specie (la funzione è illimitata nel dominio di integrazione).

esempio, $\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$. Tuttavia, altri integrali impropri possono semplicemente divergere in nessuna direzione particolare, come ad esempio $\lim_{b\to\infty} \int_1^b x \sin x\,\mathrm{d}x$, che non esiste, neanche come numero reale esteso.

Una limitazione della tecnica di integrazione impropria è che il limite deve essere preso rispetto ad un estremo di integrazione alla volta. Così, per esempio, un integrale improprio della forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ è definito prendendo due limiti separati; cioè $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, purché il doppio limite sia finito. Dalle proprietà dell'integrale, questo può anche essere scritto come una coppia di integrali impropri distinti di prima specie: $\lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, dove c è un punto qualsiasi nel dominio di integrazione. A volte è possibile definire integrali impropri in cui entrambi gli estremi sono infiniti, come l' integrale gaussiano $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Ma non si può definire altri integrali di questo tipo in modo inequivocabile, come ad esempio $\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x$, poiché il diverge doppio limite diverge:

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^c x\,\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_c^b x\,\mathrm{d}x$$

In questo caso, si può tuttavia definire un integrale improprio nel senso del *valore principale Cauchy*:

$$\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Le domande che si devono affrontare nel determinare un integrale improprio sono: il limite esiste? Può essere calcolato? La prima domanda è una questione di analisi matematica. La seconda può essere affrontato con tecniche di calcolo standard e, in alcuni casi, con tecniche di integrazione nel piano complesso (come vedremo nella terza parte), oppure mediante trasformate di Fourier o altri metodi (accenneremo a uno di questi più avanti in questa sezione).

Riguardo alla prima domanda per integrali impropri di prima specie, la situazione è analoga a quella delle serie e si possono dare criteri per l'esistenza del limite. Si introduce la nozione di *assoluta convergenza* che corrisponde alla convergenza di $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$. Si può allora facilmente dimostrare che l'integrale improprio è assolutamente convergente allora è convergente. In particolare, questo significa che se la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito, tende a zero più rapidamente di $1/x$ allora $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ è convergente. Più esplicitamente, una *condizione sufficiente* per la convergenza di integrali di prima specie è che per $p > 1$ si abbia

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A\,, \tag{5.47}$$

dove A è una costante finita, si richiede cioè che all'infinito $f(x)$ sia di ordine x^p, per $p > 1$. Se a è un punto in cui la funzione diverge, allora una *condizione sufficiente* per la convergenza dell'integrale improprio di seconda specie è che per $p < 1$ si abbia

$$\lim_{x\to a}(x-a)^p f(x) = A\,, \tag{5.48}$$

dove A è una costante finita, il che vuol dire richiedere che per x che tende ad a, $f(x)$ sia di ordine x^p, per $p < 1$.

Questi criteri (e altri che non abbiamo menzionato) sono comunque soltanto sufficienti, ma non necessari. Ci possono essere funzioni che, pur non soddisfacendo tali criteri, risultano ugualmente integrabili secondo la definizioni data di integrale improprio. Ciò accade, per esempio, quando sia da integrare tra a e ∞ una funzione che cambi di segno infinite volte, in modo che l'area si ottenga come somma di infiniti termini di segno contrario e di valore assoluto decrescente e tendente a zero; si veda la figura 5.15. Tale somma si presenterebbe allora come una serie di termini segno alterno soddisfacente allacondizione di sommabilità (4.5). È questo il caso dell'integrale $I = \int_0^\infty \sin x^2 dx$ che si può scrivere

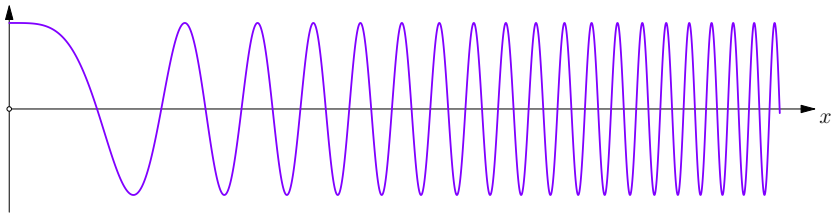


Figura 5.15: $f(x) = \sin x^2$.

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 dx + \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 dx + \ldots + \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin x^2 dx + \ldots$$

I riusulta somma di una serie di termini a segno alterno convergente ed ha quindi un valore finito, senza che la funzione sotto il segno di integrale tenda a zero più rapidamente di $1/x$.

Esercizio 5.5. Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx\,.$$

Esercizio 5.6. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \sin \alpha x\, e^{-sx} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + s^2} \tag{5.49}$$

$$\int_0^\infty \cos \alpha x\, e^{-sx} dx = \frac{s}{\alpha^2 + s^2} \tag{5.50}$$

per $s > 0$ e per ogni valore reale di α.

5.7 *Convergenza uniforme di integrali impropri*

Consideriamo la funzione definita come l'integrale improprio

$$g(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx\,. \tag{5.51}$$

per y in qualche intervallo $[y_1, y_2]$. La (5.51) è analoga ad una serie di funzioni. Al fine di determinare condizioni sufficienti per la differenziabilità e integrabilità rispetto a y di $g(y)$, è conveniente introdurre la nozione di convergenza uniforme per questi integrali, in completa analogia alla nozione di convergenza uniforme delle serie.

Sia $g_u(y) = \int_a^u f(x,y)dx$. Allora si dice che l'integrale
$$g(y) = \lim_{u\to\infty} g_u(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$$
è uniformemente convergente in $[y_1, y_2]$ se, dato $\epsilon > 0$, esiste un numero U, non dipendente da u, tale che per tutti gli y in $[y_1, y_2]$ e $u > U$ si ha $|g(y) - g_u(y)| < \epsilon$. (5.52)

Per decidere se un integrale del tipo (5.51) è uniformemente convergente, si può usare un criterio del tutto analogo al criterio M di Weirstrass. Anche in questo caso il criterio è sufficiente, ma per niente necessario. Inoltre, sotto l'ipotesi che $f(x,y)$ sia continua per $x \geq a$ e per $y_1 \leq y \leq y_2$ e $g(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ sia uniformemente convergente per $y_1 \leq y \leq y_2$, valgono teoremi del tutto analoghi a quelli considerati nella sezione 4.5:

(A) $g(y)$ è continua per $y_1 \leq y \leq y_2$ [analogo di (4.10′)].

(B) È possibile integrare $g(y)$ rispetto a y e si ottiene

$$\int_{y_1}^{y_2} g(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} \left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right] dy = \int_a^\infty \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy\right] dx \tag{5.53}$$

Risulta cioè lecito scambiare l'ordine di integrazione [analogo di (4.12′)].

(C) Se si suppone inoltre che $f(x,y)$ sia dotata di derivata parziale continua rispetto a y per $x \geq a$ e che $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dy$ sia uniformemente convergente, allora

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \tag{5.54}$$

[analogo di (4.13′)].

La definizione (5.52) e le proprietà connesse con l'uniforme convergenza che abbiamo trattato riguardano integrali impropri di prima

specie. Analoghi risultati si ottengono per gli integrali impropri di seconda specie.

Osserviamo infine che se si permette che a sia una funzione di y e che l'estremo superiore non sia ∞, ma una funzione di y si ritrova il teorema fondamentale del calcolo nella forma di Leibniz:

$$\frac{d}{dy}\int_{a(y}^{b(y)} f(x,y)dx = \frac{db(y)}{dy}f(b(y),y) - \frac{da(y)}{dy}f(a(y),y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx \tag{5.55}$$

Esercizio 5.7. Dimostrare che

$$\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \arctan\frac{1}{s} - \frac{s}{2}\ln(s^{-2}+1)\,, \quad s>0\,.$$

Esercizio 5.8. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\,, \quad s>0\,.$$

Esercizio 5.9. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

5.8 *Derivazione sotto il segno di integrale*

Il metodo della derivazione sotto il segno di integrale è un metodo per calcolare integrali ingegnoso e semplice: si introduce un parametro nella funzione integranda in modo tale che per derivazione o integrazione rispetto a tale parametro, sfruttando le proprietà illustrate nella sezione precedente, ci si possa ricondurre a integrali noti o a equazioni differenziali risolvibili. Illustriamo questo metodo con alcuni esempi.

Esercizio 5.10. Calcolare

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}\,.$$

Soluzione. Consideriamo

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M \frac{dx}{x^2+a^2} = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{a}\left(2\arctan\frac{M}{a}\right) = \frac{\pi}{a}$$

Allora

$$\frac{d}{da}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{d}{da}\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{a^2}$$

Si lascia come esercizio verificare che le condizioni di uniforme convergenza sono soddisfatte per $a^2 \geq 1$. Quindi si può portare la derivata sotto il segno di integrale e ottenere così

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{2adx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{a^2}\,.$$

Per $a = 1$ si ottiene il risultato desiderato,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

□

ESERCIZIO 5.11. Verificare che

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

con il metodo di derivazione sotto il segno di integrale.

Soluzione. Consideriamo

$$I(s) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-st} dt$$

L'integrale che si vuole calcolare è $I(0)$. Consideriamo la derivata di $I(s)$,

$$I'(s) = -\int_0^{\infty} \sin t \, e^{-st} dt$$

Si sa che (si veda l'esempio 5.6)

$$\int_0^{\infty} \sin t \, e^{-st} dx = \frac{1}{1+s^2} \, .$$

Integrando $I(s)$, si ottiene

$$I(s) = -\arctan(s) + c$$

Poichè $I(\infty) = 0 = -\pi/2 + c$, si ha $c = \pi/2$ e quindi

$$I(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$$

per $s = 0$,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = I(0) = \frac{\pi}{2}$$

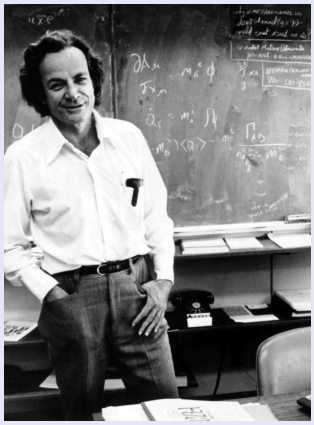
□

5.9 *Integrali di gaussiane*

Integrali di funzioni gaussiane sono molto importanti in fisica e probabilità. Trattiamo questo argomento sotto forma di esercizi.

ESERCIZIO 5.12. Dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{5.56}$$



Richard Feynman (1918–1988) è stato un fisico americano, noto per il suo lavoro in elettrodinamica quantistica, la rappresentazione delle soluzioni delle equazioni della meccanica quantistica in termini di integrali su cammini, la fisica della superfluidità e il modello a partoni nella fisica delle particelle elementari.

* * *

In *Surely You're Joking, Mr. Feynman!*, a proposito del calcolo di integrali, Feynman scrisse: "One thing I never did learn was contour integration. I had learned to do integrals by various methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me. . . . That book also showed how to differentiate parameters under the integral sign—it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals. The result was, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me."

Soluzione. Risolviamo prima ponendo $a = 1$ e, essendo la funzione pari, considerando metà dell'integrale

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

Questo integrale è chiaramente convergente in quanto e^{-x^2} decresce all'infinito più rapidamente di qualunque potenza di x. Si ponga $\lim_{M\to\infty} I_M = I$ e sia

$$I_M = \int_0^M e^{-x^2} dx = \int_0^M e^{-y^2} dy$$

il valore dell'integrale. Allora

$$\begin{aligned} I_M &= \left(\int_0^M e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^M e^{-y^2} dy\right) = \int_0^M \int_0^M e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\ &= \iint_{\mathcal{R}_M} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \end{aligned}$$

dove $\mathcal{R}_M$ è il quadrato $OACE$ di lato M mostrato in figura 5.16. Essendo la funzione integranda positiva, si può scrivere

$$\iint_{\mathcal{R}_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \le I_M^2 \le \iint_{\mathcal{R}_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

dove $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono le regioni del primo quadrante limitate da cerchi di raggio rispettivamente M e $M\sqrt{2}$. Passando a coordinate polari, si ottiene

$$\int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{M} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi \le I_M^2 \le \int_{\phi=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{M\sqrt{2}} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\phi$$

cioè

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-M^2}) \le I_M^2 \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2M^2}) .$$

Il limite di quest'ultima equazione per $M \to \infty$ fornisce $\lim_{M\to\infty} I_M^2 = I^2 = \pi/4$ e quindi $I = \sqrt{\pi}/2$ che, moltiplicato per 2, fornisce

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} ,$$

da cui, con semplice cambiamento di scala, si ottiene (5.56). □

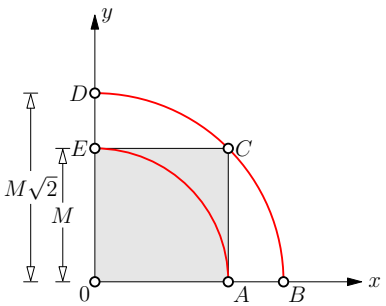


Figura 5.16: Regioni di integrazione per il calcolo dell'integrale della gaussiana.

ESERCIZIO 5.13. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx , \qquad m \quad \text{intero positivo} , \qquad a \quad \text{reale positivo}$$

Soluzione. Per m dispari, essendo la funzione integranda dispari, l'integrale è nullo. Consideriamo m pari e poniamo $m = 2n$. Allora, per quel che riguarda

$$I(n,a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx , \qquad n \quad \text{intero positivo} , \qquad a \quad \text{reale positivo}$$

bastano i primi della lista, ottenuti per derivazione sotto il segno di integrale, poi si indovina facilmente lo schema:

$$
\begin{aligned}
I(0,a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
I(1,a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\
I(2,a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) \\
I(3,a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) \\
I(n,a) &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n a^n}
\end{aligned}
$$

□

Esercizio 5.14. Mostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(kx)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}} \tag{5.57}$$

Soluzione. Sia

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(kx)dx$$

e calcoliamo la derivata di g rispetto a k:

$$
\begin{aligned}
\frac{dg(k)}{dk} &= \int_{-\infty}^{\infty} -xe^{-ax^2}\sin(kx)dx = \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(-2ax)e^{-ax^2}}\,\underbrace{\sin(kx)}\,dx \\
&= \frac{1}{2a}\left[e^{-ax^2}\sin(kx)\right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}(-k)\cos(kx)dx \\
&= 0 - \frac{k}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(kx)dx = -\frac{k}{2a}g(k)
\end{aligned}
$$

La derivazione sotto il segno di integrale è giustificata dal teorema (C) a pag. 118 e dal fatto che l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-ax^2}\sin(kx)dx$ è uniformemente convergente per tutti i valori di k (per il criterio di Weierstrass). Per il teorema (A) di pag. 118, $g(k)$ è una funzione continua per cui

$$g(0) = \lim_{k\to 0} g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Si ha così l'equazione differenziale

$$\frac{dg(k)}{dk} = -\frac{k}{2a}g(k)\,, \qquad g(0) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

che si risolve a vista

$$\frac{dg}{g} = -\frac{k}{2a}dk \;\Rightarrow\; \ln g = -\frac{k^2}{4a} + c \;\Rightarrow\; g(k) = g(0)e^{-\frac{k^2}{4a}}\,,$$

da cui,

$$g(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} .$$

□

L'integrale (5.57) è importante nelle applicazioni perché è la trasformata di Fourier della gaussiana. La *trasformata di Fourier* di una funzione $f(t)$ è definita come la funzione di ω

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt , \tag{5.58}$$

ovvero, separando parte reale e parte immaginaria,

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt . \tag{5.59}$$

Per una funzione pari, come è la gaussiana, la parte immaginaria non dà contributo, allora dalla (5.57) si ha

$$\mathscr{F}\left\{e^{-at^2}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} . \tag{5.60}$$

Si osservi che la trasformata di Fourier di una gaussiana è ancora una gaussiana con larghezza inversamente proporzionale alla larghezza della gaussiana originaria.

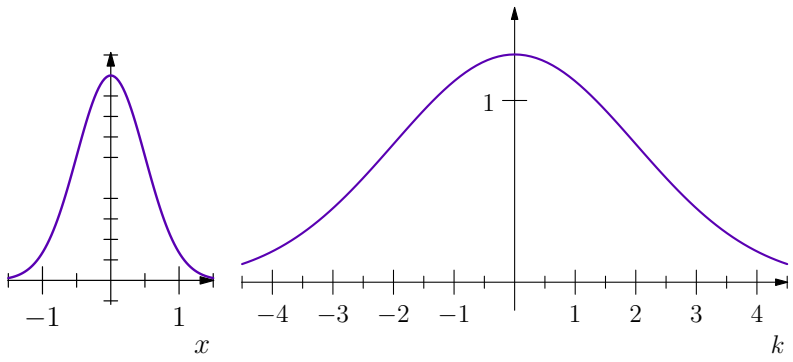


Figura 5.17: Confronto tra la gaussiana con $a = 2$ (a sinistra) e la sua trasformata di Fourier (a destra). Si osservi la variazione inversamanente proporzionale della larghezza della gaussiana.

Esercizio 5.15. Mostrare che

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(u^2 + \frac{A}{u^2}\right)} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{A}} \tag{5.61}$$

per $A > 0$.

Complementi

Coordinate curvilinee ortogonali

Sia $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, dove le coordinate cartesiane x, y, z sono funzioni delle coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3:

$$x = x(u_1, u_2, u_3) \quad y = y(u_1, u_2, u_3) \quad z = z(u_1, u_2, u_3) \tag{5.62}$$

Due esempi notevoli sono: le coordinate cilindriche,

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z \tag{5.63}$$

e le coordinate sferiche,

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{5.64}$$

Le superfici $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, dove c_1, c_2, c_3 sono costanti, sono dette superfici coordinate. L'intersezione di ciascuna coppia definisce la curva coordinata corrispondente. Se le intersezioni delle curve coordinate formano angoli retti, il sistema di coordinate curvilinee è detto ortogonale; vedere la figura 5.18.

La (5.62) può essere riscritta come $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2, u_3)$. Il vettore tangente in $\mathbf{r}$ alla curva u_i = costante è $\partial\mathbf{r}/\partial u_i$. Posto $h_i = ||\partial\mathbf{r}/\partial u_i||$, il versore nella stessa direzione è

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_i}$$

Il sistema di coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3 è detto ortogonale se $\mathbf{e_i} \bullet \mathbf{e_j} = 0$, per $i \neq j$. Le grandezze h_1, h_2, h_3 sono dette fattori di scala. I versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ hanno le direzioni in cui i u_1, u_2, u_3 sono, rispettivamente, crescenti.

Esercizio 5.16. Mostrare che le coordinate cilindriche ρ, ϕ, z sono ortogonali e e che i rispettivi fattori di scala sono

$$h_\rho = 1\,, \quad h_\phi = \rho\,, \quad h_z = 1\,. \tag{5.65}$$

Esercizio 5.17. Mostrare che le coordinate sferiche r, θ, ϕ sono ortogonali e che i rispettivi fattori di scala sono

$$h_r = 1\,, \quad h_\theta = r\,, \quad h_\phi = r\sin\theta\,. \tag{5.66}$$

Dato un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{z}$, la sua rappresentazione in coordinate curvilinee ortogonali è

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}\bullet\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{F}\bullet\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{F}\bullet\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \equiv F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3 \tag{5.67}$$

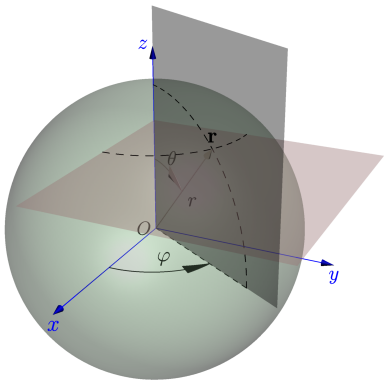


Figura 5.18: Coordinate sferiche. Superfici r = cost. , θ = cost. , ϕ = cost. . L'intersezione di r = cost. e ϕ = cost. definisce la curva delle θ, di r = cost. e θ = cost. , quella delle ϕ, di ϕ = cost. e θ = cost. , quella delle r.

Soluzione di 5.16. Si ha

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,.$$

Allora i vettori tangenti alle curve ρ, ϕ, z sono, rispettivamente

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\rho\sin\phi\mathbf{i} + \rho\cos\phi\mathbf{j}$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}$$

I primi due vettori sono chiaramente ortogonali al terzo e sono ortogonali tra loro in quanto

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\bullet\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\cos\phi\rho\sin\phi + \sin\phi\rho\cos\phi = 0\,.$$

I fattori di scala corrispondenti sono

$$h_\rho = \left|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\right|\right| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$$
$$h_\phi = \left|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi}\right|\right| = \sqrt{\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi} = \rho$$
$$h_z = \left|\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right|\right| = 1\,.$$

Allora

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{1}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi} = -\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}$$
$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$

è una base ortonormale. □

ELEMENTI D'ARCO, DI SUPERFICIE E DI VOLUME Consideriamo adesso la derivata di $\mathbf{r}$ rispetto a $\mathbf{u}$ per una variazione $\mathbf{du} = (du_1, du_2, du_3)$,

$$\mathbf{dr} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \tag{5.68}$$

Allora la l'*elemento d'arco* ds è determinato da

$$ds^2 = \mathbf{dr} \bullet \mathbf{dr} = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \,.$$

Ad esempio, in coordinate sferiche

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \,,$$

da cui segue la nota formula per l'energia cinetica di un punto materiale di massa m in coordinate sferiche

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]$$

La figura 5.19 è cruciale per capire tutte le relazioni geometriche. Essa mostra che l'elemento d'arco lungo u_1 è $ds_1 = h_1 du_1$; analogamente, gli elementi d'arco lungo u_2 e u_3 sono $ds_2 = h_2 du_2$ e $ds_3 = h_3 du_3$. Essendo il parallelepipedo rettangolo (al primo ordine), le proprietà geometriche sono quelle usuali. L'*elemento di superficie* sulla superficie $u_3 = c_3$ è

$$dS_3 = (h_1 du_1)(h_2 du_2) = h_1 h_2 du_1 du_2 \,.$$

Analogamente per $u_2 = c_2$ e $u_1 = c_1$ si trova, rispettivamente, $dS_2 = h_1 h_3 du_1 du_3$ e $dS_1 = h_2 h_3 du_2 du_3$. Per esempio, l'elemento di superficie sulla sfera $r = \text{cost.}$ è $dS = h_\theta h_\phi d\theta d\phi = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$. Infine, l'*elemento di volume* è

$$dV = (h_1 du_1)(h_2 du_2)(h_3 du_3) = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \,.$$

Dunque in coordinate sferiche $dV = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$.

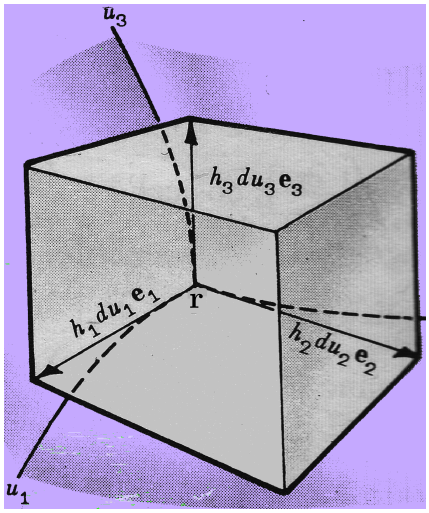


Figura 5.19: Coordinate curvilinee ortogonali: parallelepipedo infinitesimo dV nel punto $\mathbf{r}$.

OPERATORI DIFFERENZIALI IN COORDINATE CURVILINEE Per trovare la forma degli operatori differenziali in coordinate curvilinee ortogonali conviene fare riferimento a relazioni invarianti. Per il gradiente di un campo scalare f, consideriamo

$$df = (\boldsymbol{\nabla} f) \bullet \mathbf{dr} \,. \tag{5.69}$$

Dalle (5.67) e (5.68) si ha

$$\begin{aligned} df &= [(\nabla f)_1 \mathbf{e}_1 + (\nabla f)_2 \mathbf{e}_2 + (\nabla f)_3 \mathbf{e}_3] \bullet [h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3] \\ &= (\nabla f)_1 h_1 du_1 + (\nabla f)_2 h_2 du_2 + (\nabla f)_3 h_3 du_3 \,. \end{aligned}$$

D'altro canto,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial u_3} du_3 \,.$$

Allora, per confronto,

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} = (\nabla f)_i h_i \quad \text{cioè} \quad (\nabla f)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \,.$$

Quindi,

$$(\boldsymbol{\nabla} f) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 \tag{5.70}$$

Per trovare la divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{F}$, partiamo dalla relazione invariante data dal teorema della divergenza, applicato al volume infinitesimo dV della figura 5.19:

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{F} = \frac{\oint_{dV} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, dS}{dV} \tag{5.71}$$

Il flusso complessivo attraverso la direzione $\mathbf{e}_1$ è

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -F_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + \left[F_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + \left(\frac{\partial}{\partial u_1} F_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \right) du_1 \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1} \left(F_1 h_2 h_3 \right) du_1 du_2 du_3 \end{aligned}$$

Analogamente, si trovano i flussi nelle altre due direzioni,

$$\Phi_2 = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(F_2 h_1 h_3 \right) du_1 du_2 du_3 \,, \quad \Phi_3 = \frac{\partial}{\partial u_3} \left(F_3 h_1 h_2 \right) du_1 du_2 du_3 \,,$$

Il flusso totale attraverso il parallelepipedo è $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ e il volume è $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$. Allora,

$$\frac{\oint_{dV} \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \, dS}{dV} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3}{h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3}$$

da cui,

$$\boldsymbol{\nabla} \bullet \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(F_1 h_2 h_3 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(F_2 h_1 h_3 \right) + \left(F_3 h_1 h_2 \right) \right] \tag{5.72}$$

Dalla (5.72), per $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ dato dalla (5.70), si ottiene il laplaciano $\Delta f = \boldsymbol{\nabla} \bullet \boldsymbol{\nabla} f$ in coordinate curvilinee ortogonali:

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_2 h_1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right] \tag{5.73}$$

Mediante i fattori di scala (5.65), calcoliamo il laplaciano in coordinate cilindriche

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{1\cdot\rho\cdot 1}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\rho\cdot 1}{1}\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1\cdot 1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho\cdot 1}{1}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,,\end{aligned}$$

che è la (5.19). Mediante i fattori di scala (5.66), calcoliamo il laplaciano in coordinate sferiche

$$\begin{aligned}\Delta f &= \frac{1}{1\cdot r\cdot r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\cdot r\sin\theta}{1}\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1\cdot r\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{r\cdot 1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right]\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

che è la (5.20).

Il calcolo del rotore in coordinate curvilinee ortogonali è lasciato come esercizio.

Soluzioni di alcuni esercizi

ESERCIZIO 5.5 Spezziamo l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \int_0^a \frac{1-\cos x}{x^2}dx + \int_a^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx\,.$$

Il primo integrale a secondo membro è un integrale *proprio*, poiché

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Il secondo integrale è un integrale improprio convergente, in quanto

$$\left|\frac{1-\cos x}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2}$$

ESERCIZIO 5.6 Dal calcolo integrale elementare, ricordiamo le formule (facilmente ottenibili mediante integrazione per parti ripetuta)

$$\int e^{bx}\sin ax dx = \frac{e^{bx}(b\sin ax - a\cos ax)}{a^2+b^2} \tag{5.74}$$

$$\int e^{bx}\cos ax dx = \frac{e^{bx}(b\cos ax + a\sin ax)}{a^2+b^2} \tag{5.75}$$

$$\int_0^\infty \sin\alpha x\, e^{-sx}dx = \lim_{M\to\infty}\frac{e^{-sx}(-s\sin\alpha x - \alpha\cos\alpha x)}{s^2+\alpha^2}\Bigg|_0^M = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$$\int_0^\infty \cos\alpha x\, e^{-st}dx = \lim_{M\to\infty}\frac{e^{-sx}(-s\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x)}{s^2+\alpha^2}\Bigg|_0^M = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$$

ESERCIZIO 5.7 Si chiede di dimostrare che

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \arctan \frac{1}{s} - \frac{s}{2} \ln(1+s^{-2}), \quad s > 0.$$

Derivando $F(s)$ due volte si ottiene

$$F''(s) = \int_0^\infty e^{-sx}(-x)^2 \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \int_0^\infty e^{-sx}[1-\cos x]dx = \int_0^\infty e^{-sx}dx - \int_0^\infty e^{-sx}\cos x dx$$

Il primo integrale nell'ultimo membro vale

$$\int_0^\infty e^{-sx}dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s},$$

mentre il secondo è dato dall'esercizio 5.6. Si ha quindi

$$F''(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Allora

$$F'(s) = \int \frac{ds}{s} - \int \frac{s}{s^2+1} ds + c_1 = \ln s - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s^2+1} ds^2 + c_1 = \ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+1) + c_1,$$

dove c_1 è una costante di integrazione. Poiché

$$F'(s) = \int_0^\infty e^{-sx}(-x)\frac{1-\cos x}{x^2} dx = -\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1-\cos x}{x} dx$$

è convergente, deve valere

$$\lim_{s\to\infty} F'(s) = 0.$$

Poiché

$$\lim_{s\to\infty}\left[\ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+1)\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{2}\ln\left[\frac{s^2}{s^2+1}\right] = \frac{1}{2}\ln 1 = 0,$$

si deve avere $c_1 = 0$ e quindi

$$F'(s) = \ln s - \frac{1}{2}\ln(s^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{s^2}{s^2+1}\right].$$

Allora (usando le tavole di integrali)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int F'(s)ds + c_2 = s\ln s - \frac{s}{2}\ln(s^2+1) - \arctan s + c_2 \\ &= -\frac{s}{2}\ln\frac{1}{s^2} - \frac{s}{2}\ln(s^2+1) - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{s} + c_2 \\ &= -\frac{s}{2}\ln\left[1+\frac{1}{s^2}\right] + \arctan\frac{1}{s} - \frac{\pi}{2} + c_2 \end{aligned}$$

$F(s)$ deve tendere a zero per $s \to \infty$, e questo è quello che fanno i primi due termini a secondo membro. Allora deve essere $c_2 = \pi/2$ e quindi il risultato del calcolo è

$$F(s) = \arctan\frac{1}{s} - \frac{s}{2}\ln\left[1+\frac{1}{s^2}\right]$$

ESERCIZIO 5.8 Tenuto conto del risultato dell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx &= \lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-sx}\frac{1-\cos x}{x^2}dx \\ &= \lim_{s\to 0}\left\{\arctan\frac{1}{s} - \frac{s}{2}\ln\left[1+\frac{1}{s^2}\right]\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.9 Integrando per parti

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \left(\frac{-1}{x}\right)(1-\cos x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$

Quindi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Essendo inoltre,

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = 2\int_0^\infty \frac{\sin^2(x/2)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^2}du$$

si ottiene,

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

6
Fisica ed equazioni alle derivate parziali

Indice

6.1 ***Introduzione*** 131
6.2 ***Equazioni di Maxwell*** 131
6.3 ***Equazione di continuità*** 132
6.4 ***Equazione di Laplace*** 133
6.5 ***Equazione delle onde*** 134
6.6 ***Equazione del calore*** 136
6.7 ***Equazione di Navier-Stokes*** 137
6.8 ***Equazione di Hamilton-Jacobi*** 138
6.9 ***Equazione di Schrödinger*** 140

6.1 Introduzione

Un'*equazione alle derivate parziali*, è un'equazione che contiene come incognita una funzione di due o più variabili e le sue derivate parziali rispetto a queste variabili. Da Newton in poi, le equazioni alle derivate parziali si sono rivelate uno strumento essenziale per esprimere le leggi della fisica. Sono anche fondamentali in branche della matematica, come la geometria differenziale e i processi stocastici. Oggi trovano anche molte applicazioni in chimica, biologia, ingegneria e economia. In questa capitolo passiamo in rassegna alcune equazioni alle derivate parziali che svolgono un ruolo rilevante nella fisica.

6.2 Equazioni di Maxwell

Le leggi di Maxwell per il campo elettrico **E** e il campo magnetico **B** in funzione della densità di carica ρ e l densità di corrente **J** sono

espresse dalle equazioni:

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \tag{6.1}$$

$$\nabla \bullet \mathbf{B} = 0 \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \tag{6.4}$$

dove $\epsilon_0 = 8.854\ldots \times 10^{12}$ F·m^{-1} e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ V· s/(A· m) sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto rispettivamente; come è noto, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 299,792,458$ m/s è la velocità della luce nel vuoto. Queste equazioni sono alle derivate parziali e sono dette *equazioni di Maxwell*. Insieme con la legge di Lorentz per la forza $\mathbf{F}$ che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ esercitano su una carica q in moto con velocità $\mathbf{v}$,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,,$$

costituiscono le leggi dell'elettrodinamica classica. *Tutti i fenomeni elettromagnetici che non risentono di effetti quantistici sono completamente spiegati da queste leggi.* Per includere gli effetti relativistici, nella legge Newton $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ per una carica q di massa m occorre modificare la relazione classica tra quantità di moto $\mathbf{p}$ e velocità $\mathbf{v}$ e usare invece la relazione

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2/c^2}}\,,$$

che fu proposta per la prima volta da Lorentz.

James Clerk Maxwell (1831–1879) è stato un fisico matematico scozzese. Il suo successo maggiore fu quello di formulare la teoria classica dell'elettromagnetismo in termini delle equazioni che prendono il suo nome. Le equazioni di Maxwell unificano tutte le osservazioni sperimentali e le leggi dell'elettricità, del magnetismo e dell'ottica precedenti, e mostrano che elettricità, magnetismo e luce sono tutti manifestazioni della stessa realtà, il campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. Maxwell sviluppò anche la teoria cinetica dei gas. Insieme a Boltzmann e Gibbs è uno dei padri della moderna meccanica statistica.

6.3 *Equazione di continuità*

Ricordando che la divergenza di un rotore è identicamente nulla, si prenda la divergenza della (6.4). Tenuto conto della (6.1) e scambiando la derivata rispetto al tempo con la divergenza, si ottiene

$$0 = \mu_0 \left(\nabla \bullet \mathbf{J} + \epsilon_0 \nabla \bullet \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\nabla \bullet \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

L'equazione così ottenuta,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet \mathbf{J} = 0 \tag{6.5}$$

è detta *equazione di continuità* e vale per tutte le quantità fisiche che, come la carica elettrica, sono conservate localmente. Ad esempio, vale per la massa di un fluido con densità di massa ρ e densità di flusso $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, essendo $\mathbf{v}$ è la velocità locale del fluido. Integrando

la (6.5) in una regione Ω dello spazio e applicando il teorema di Gauss-Green, si ottiene la forma integrale della (6.5)

$$-\frac{d}{dt}\underbrace{\int_\Omega \rho\, d^3\mathbf{r}}_{\text{quantità contenuta in } \Omega} = \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \bullet d\mathbf{S}}_{\text{quantità che nell'unità di tempo attraversa il bordo di } \Omega}$$

6.4 *Equazione di Laplace*

Sia Δ l'*operatore di Laplace*, o *laplaciano* delle funzione $u = u(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$,

$$\Delta u = \nabla \bullet \nabla u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \quad \text{(in coordinate cartesiane)}.$$

L'equazione alle derivate parziali

$$\Delta u = 0 \tag{6.6}$$

si presenta in questioni di svariatissima natura ed è detta *equazione di Laplace*. Ogni sua soluzione *regolare* (cioè finita e continua con le sue derivate prime e che ha derivate seconde) in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si chiama *funzione armonica* in Ω.

Pierre Simon, marchese di Laplace (1749–1827) è stato un fisico e matematico francese che diede importanti contributi allo sviluppo della meccanica celeste e della probabilità. Fu il primo a ipotizzare l'esistenza di corpi così massivi da cui neanche la luce può fuggire. Introdusse la trasformata di Laplace come strumento nello studio delle distribuzioni di probabilità. Famoso per aver scritto (1812): "Un'Intelligenza che conoscesse, ad un istante dato, tutte le forze che animano la natura e la rispettiva collocazione degli enti che la costituiscono, ... nulla sarebbe incerto per essa, e l'avvenire come il passato sarebbe di fronte ai suoi occhi"'. Meno noto il fatto che quest'idea venne espressa nel suo trattato *Théorie analytique des probabilités* per sottolineare che noi NON siamo come quell'intelligenza e le nostre previsioni e i nostri ragionamenti non possono che essere probabilistici.

ESERCIZIO 6.1. Derivare l'equazione di Laplace per il potenziale elettrostatico $\mathbf{E} = -\nabla V$ in una regione Ω dello spazio in cui non ci sono cariche elettriche.

Soluzione. Dalle equazioni di Maxwell in regime stazionario (le derivate temporali sono nulle) si ottengono le equazioni dell'elettrostatica. Per una regione di spazio Ω in cui non ci sono cariche, queste sono

$$\nabla \bullet \mathbf{E} = 0 \ \text{(in } \Omega), \qquad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \ \text{(ovunque)}$$

dove $\mathbf{E}$ è il campo elettrico. La soluzione della seconda è $\mathbf{E} = -\nabla V$, che, inserita nella prima, fornisce la (6.6) per $u = V$ e $n = 3$. □

L'equazione

$$\Delta u = j \tag{6.7}$$

è la variante inomogenea della (6.6) ed è detta *equazione di Poisson*. Nell'interpretazione elettrostatica, $j = \rho/\epsilon_0$, essendo ρ è la densità volumetrica di carica elettrica.

Maxwell chiamava il laplaciano di u nel punto P la *concentrazione di u* in quel punto, essendo esso una misura della differenza tra la media della funzione su una piccola superficie sferica centrata in P e il valore della funzione in quel punto. Questo fatto, che stabiliremo rigorosamente nel capitolo successivo, risulta evidente

quando si considera il laplaciano discretizzato su un reticolo. In una dimensione,

$$\Delta u = u''(x) \approx \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} \approx \frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h}$$
$$= \frac{1}{h^2}\left[u(x+h) + u(x-h) - 2u(x)\right] ,$$

in due,

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u$$
$$\approx \frac{1}{h^2}\left[u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y+h) - 4u(x,y)\right]$$

e in d dimensioni:

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2}\left[\text{somma dei valori di } u \text{ nei primi vicini di } P - 2d \times u(P)\right]$$

Quindi l'annularsi del laplaciano discretizzato in P implica

$$u(P) = \frac{1}{2d}\left[\text{somma dei valori di } u \text{ nei primi vicini di } P\right]$$
$$= \left[\text{media di } u \text{ nell'intorno di } P\right]$$

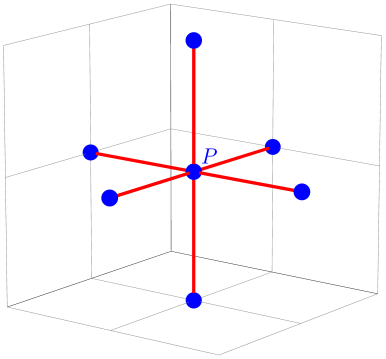


Figura 6.1: Funzioni armoniche su un reticolo tri-dimensionale: se il laplaciano discretizzato di u si annulla in P, allora $u(P)$ è pari ad $1/6$ della somma dei valori di u nei primi vicini di P (che sono 6, e in d dimensioni sono $2d$).

6.5 *Equazione delle onde*

L'equazione delle onde, detta anche *equazione di d'Alembert*, è l'equazione che descrive lo sviluppo di un'onda, che si propaga in un mezzo. Descrive, per esempio, lo spostamento verticale di una corda vibrante, la propagazione di un'onda elettromagnetica attraverso lo spazio, di un'onda sonora nell'aria e di onde d'acqua nel mare di vario tipo. Una funzione $u = u(\mathbf{r}, t)$ soddisfa l'equazione delle onde

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 . \tag{6.8}$$

dove v è una costante che ha le dimensioni di una velocità. Introducendo l'operatore di D'Alembert, o dalembertiano,

$$\Box = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta \tag{6.9}$$

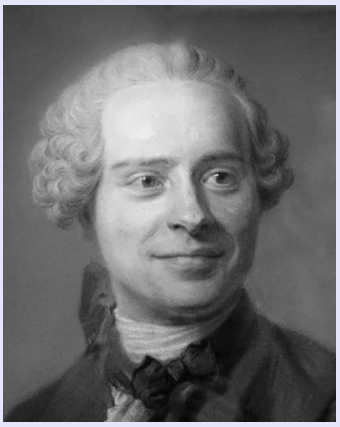
l'equazione può essere scritta nella forma compatta

$$\Box u = 0 . \tag{6.10}$$

La sua variante inomogenea è

$$\Box u = j \tag{6.11}$$

ed è ad, esempio, l'equazione soddisfatta da ogni componente dal potenziale quadrivettore in elettrodinamica (nel gauge di Lorentz).



Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) è stato un fisico e matematico francese. Editore con Diderot dell'Enciclopedia, diede importanti contributi allo sviluppo della meccanica analitica, della fisica dei fluidi e dei sistemi vibranti. Noto per aver detto "Allez en avant, et la foi vous viendra" a chi riteneva le regole del calcolo differenziale oscure e non rigorose.

ESERCIZIO 6.2. Il caso più semplice è un'onda che si propaga lungo una corda di densità costante sotto l'effetto di una tensione costante. Dimostrare che lo spostamento verticale della corda, $y = u(x,t)$, nel punto x e al tempo t (nel limite in cui tale spostamento sia molto piccolo) soddisfa l'equazione delle onde (6.8) in una dimensione (spaziale),

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{6.12}$$

Si assuma che la corda sia fissata ad entrambi gli estremi a distanza L e che sia inizialmente in equilibrio lungo l'asse x, con uno degli estremi posto nell'origine. La corda vibrante è un problema in cui le forze sono esercitate nelle direzioni x e y, risultando in un movimento nel piano x-y quando la corda è spostata dalla sua posizione di equilibrio nel piano x-y e quindi rilasciata.

ESERCIZIO 6.3. Mostrare che nel vuoto ciascuna componente del campi elettrico $\mathbf{E}$ e del campo magnetico $\mathbf{B}$ soddisfa l'equazione delle onde.

Dimostrazione. Nel vuoto $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$, dunque le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned}
\nabla \bullet \mathbf{E} &= 0\\
\nabla \bullet \mathbf{B} &= 0\\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\
\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

(essendo $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$, la velocità della luce nel vuoto). Ricordando l'identità vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \bullet \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}\,,$$

prendiamo il rotore della terza equazione (scambiando la derivata temporale con il rotore),

$$\nabla(\nabla \bullet \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B}\,.$$

Tenuto conto della prima e della quarta, otteniamo

$$-\Delta \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

vale a dire,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = 0\,.$$

Prendendo il rotore della quarta equazione e procedendo in modo analogo, si ottiene

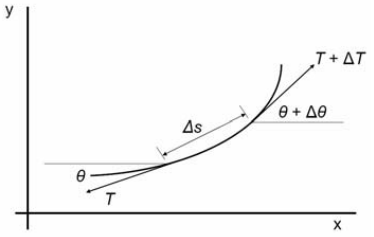
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{B} = 0\,.$$

Risulta così dimostrato che nel vuoto ogni componente u dei campi elettrici e magnetici soddisfa l'equazione delle onde per $v = c$. □

EQUAZIONE DEL TELEGRAFISTA Un'altra equazione associata all'equazione delle onde è la cosiddetta *equazione del telegrafista*

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + \gamma\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = 0\,, \tag{6.13}$$

Soluzione di 6.2. Il diagramma del corpo libero per un elemento di corda di lunghezza Δs soggetto ad una tensione $\mathbf{T}$ è mostrato nella figura a margine.



Il materiale di cui è fatta la corda ha densità lineare di massa costante μ; con s denotiamo la lunghezza d'arco lungo la corda. L'equazione del moto è ottenuta applicando la seconda legge di Newton ad un elemento di lunghezza Δs (ed ignorando effetti di torsione). La componente x dell'equazione è

$$(T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta) - T\cos\theta = \mu \Delta s \overline{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}$$

la componente y è

$$(T+\Delta T)\sin(\theta+\Delta\theta) - T\sin\theta = \mu \Delta s \overline{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

La barra sopra le derivate significa l'accelerazione mediata sull'elemento di massa in Δs. Dividendo per Δs e passando al limite $\Delta s \to 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}(T\cos\theta) &= \mu\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\\
\frac{\partial}{\partial s}(T\sin\theta) &= \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

Ma, per piccoli θ,

$$\cos\theta = \frac{\partial x}{\partial s} \approx 1\,, \quad \sin\theta \approx \frac{\partial y}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial}{\partial s} \approx \frac{\partial}{\partial x}\,.$$

In definitiva,

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\mu}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}
\end{cases}$$

La prima equazione è banalmente risolta e stabilisce che lungo x non c'è deformazione elastica; la seconda, posto $v = \sqrt{T/\mu}$, è proprio l'equazione delle onde (6.12) □

dove γ e α sono costanti positive. Questa equazione descrive la propagazione dei campi elettromagnetici in un metallo oppure di segnale elettromagnetico come la tensione o la corrente lungo una linea di trasmissione.

ESERCIZIO 6.4. Mostrare che in un conduttore ideale ciascuna componente del campi elettrico $\mathbf{E}$ e del campo magnetico $\mathbf{B}$ si propaga in accordo con l'equazione del telegrafista (6.13).

Soluzione di 6.4. Un conduttore è ideale se è omogeneo, isotropico, non dispersivo e vale la legge di Ohm con resistività costante σ, cioè $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Inoltre per un conduttore $\rho = 0$. Allora le equazioni di Maxwell diventano

$$\begin{aligned}\nabla \bullet \mathbf{E} &= 0\\ \nabla \bullet \mathbf{B} &= 0\\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu\left(\mathbf{J} + \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

dove ϵ e μ sono la costante dielettrica e la permeabilità costante del materiale. Procedendo come nell'esercizio precedente, cioè prendendo il rotore della terza equazione e tendendo conto della prima, si ottiene

$$\begin{aligned}-\Delta\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{B} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\mathbf{J} + \mu\epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\\ &= -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}\,.\end{aligned}$$

avendo usato $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ nell'ultimo passaggio. Quindi

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{E} + \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

che è proprio l'equazione del telegrafista per $v^2 = 1/\mu\epsilon$, $\gamma = \mu\sigma$ e $\alpha = 0$. In modo analogo si trova che anche $\mathbf{B}$ soddisfa la stessa equazione. □

6.6 *Equazione del calore*

L'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u\,, \tag{6.14}$$

dove D è una costante positiva, si presenta in molti problemi di diversissima natura. Fu scoperta da Fourier nei primi anni dell'800.

La *legge di Fourier* di propagazione del calore stabilisce che il tasso temporale di calore trasferito attraverso un materiale è proporzionale al gradiente negativo di temperatura e all'area perpendicolare a quel gradiente, attraverso cui il calore fluisce. In termini della densità locale di flusso di calore $\mathbf{J}$, essa può essere espressa come

$$\mathbf{J} = -k\nabla T\,, \tag{6.15}$$

dove k è la conduttività termica del materiale. Poiché l'energia si conserva localmente, vale l'equazione di continuità (6.5) per la densità di energia $\rho = c_p\rho T + \text{cost.}$, dove c_p e ρ sono rispettivamente calore specifico a pressione costante e densità del materiale,

$$c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \bullet \mathbf{J}\,. \tag{6.16}$$

Prendendo la divergenza di ambo i membri della (6.15), e tenuto conto della (6.16), si ottiene

$$-c_p\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -k\nabla^2 T\,,$$

che è proprio l'equazione (6.14) per $u = T$ e $D = k/(c_p\rho)$.

L'equazione del calore governa anche i processi diffusivi: se c è la concentrazione di un fluido che si diffonde (nel vuoto o in un altro fluido), allora in una dimensione (spaziale) vale legge di Fick $\mathbf{J} = -D\nabla c$ per la densità di flusso $\mathbf{J}$ del fluido che diffonde. Allora, tenuto conto della legge di conservazione locale della massa, si arriva all'equazione (6.14), che è quindi anche detta *equazione di diffusione*.

Un semplice modello statistico per la diffusione è in termini di camminata casuale. Si consideri un camminatore (ubriaco) che si

Joseph Fourier (1768–1830) è stato un matematico e fisico francese noto per aver introdotto nel 1807 le serie e gli integrali che prendono il suo nome ed averli applicati a problemi di conduzione del calore e ai sistemi vibranti. Da grandi matematici del tempo, il suo lavoro fu inizialmente giudicato poco rigoroso e carente di giustificazioni.

muove lungo una retta, facendo ogni *tau* secondi un passo di lunghezza h a destra o a sinistra con probabilità $1/2$. Si ponga $t = n\tau$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, e $x = \alpha h$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. Allora la probabilità $p(t, x)$, che al tempo $t + \tau$ il camminatore si trovi nel punto x è

$$p(t + \tau, x) = \frac{1}{2} p(t, x + h) + \frac{1}{2} p(t, x - h) .$$

Si riscriva questa equazione nel seguente modo

$$\frac{p(t + \tau, x) - p(t, x)}{\tau} = \frac{h^2}{2\tau} \left[\frac{p(t, x + h) - 2p(t, x) + p(t, x - h)}{h^2} \right]$$

Allora nel limite continuo $\tau \to 0$, $h \to 0$, $n, \alpha \to \infty$, $h^2/2\tau = D=$ costante, si ottiene l'equazione di diffusione

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \Delta p ,$$

dove Δ è la derivata seconda rispetto a x, cioè il laplaciano in una dimensione. Procedendo in modo analogo per una camminata casuale in due o in tre dimensioni, si trova l'equazione di diffusione in due o in tre dimensioni. Si passa infine dalla densità di probabilità p alla concentrazione del fluido che diffonde, assumendo che il moto di ciascuna molecola del fluido sia una camminata casuale indipendente e invocando la legge dei grandi numeri, la quale garantisce che per un numero elevato di molecole, a meno di piccole fluttuazioni, la probabilità diventa la frazione media locale di molecole, cioè la concentrazione c del fluido che diffonde.

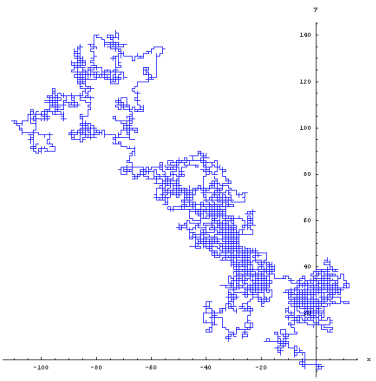
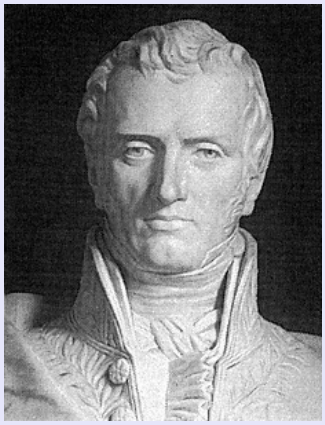


Figura 6.2: Camminata casuale nel piano.



Claude-Louis Navier (1785–1836) è stato un ingenere e fisico francese.

6.7 *Equazione di Navier-Stokes*

Se $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ è la densità di massa di un fluido e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ la sua velocità locale, la conservazione locale della massa è espressa dall'equazione di continuità (6.5) per $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Se il fluido è incompressibile, $\rho =$ costante, l'equazione di continuità diventa

$$\nabla \bullet \mathbf{v} = 0 , \tag{6.17}$$

L'equazione di Navier-Stokes per la velocità locale $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ di un fluido incompressibile è

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} , \tag{6.18}$$

dove P è la pressione, $\mathbf{f}$ le forze esterne per unità di volume e μ la viscosità dinamica del fluido. Se si trascura la viscosità e si considera l'acqua "asciutta", per usare l'efficace espressione che Feynman usa

Sir George Stokes (1819–1903), è stato un matematico e fisico irlandese che diede importanti contributi alla dinamica dei fluidi, all'ottica e alla fisica-matematica

nelle sue *Lecture notes*, si ottengono le *equazioni di Eulero* per un fluido incompressibile *non viscoso*

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v}\right) = -\nabla P + \mathbf{f}\,, \tag{6.22}$$

Esercizio 6.5. Mostrare che in condizioni stazionarie la velocità di un un fluido irrotazionale $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ è derivabile da un potenziale V che soddisfa l'equazione di Laplace. Si mostri inoltre sotto queste condizioni vale l'equazione di Bernoulli

$$\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + P + \phi = \text{costante}$$

(assumendo la forza esterna derivabile da un potenziale $\mathbf{f} = -\nabla\phi$).

Soluzione. Se $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ allora esiste V tale che $\mathbf{v} = -\nabla V$; poiché per un fluido incompressibile $\nabla \bullet \mathbf{v} = 0$, ne segue che $\Delta V = 0$. Dall'identità vettoriale

$$\nabla(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \bullet \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \bullet \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

segue che

$$\frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}) = \mathbf{v} \bullet \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$$

In condizioni stazionarie $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ e dunque l'equazione di Eulero diventa

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + P + \phi\right) = 0$$

da cui segue l'equazione di Bernoulli. □

Esercizio 6.6. Le onde acustiche sono onde longitudinali che si propagano in un mezzo materiale mediante compressioni e decompressioni. Mostrare che la loro propagazione in un fluido è governata dall'equazione delle onde. Per semplicità si consideri il caso uni-dimensionale.

6.8 Equazione di Hamilton-Jacobi

Il problema fondamentale della meccanica consiste nel determinare la legge del moto $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, t)$ di un dato sistema in funzione delle sue configurazione e velocità iniziali $\mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}_0$. L'equazione del moto è la seconda legge di Newton, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, per una particella di massa m soggetta a una forza $\mathbf{F}$. Quando il sistema è definito in termini di una Lagrangiana $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$, per esempio $L = (1/2)m\dot{\mathbf{q}}^2 - U$ per una particella di massa m e energia potenziale U, le equazioni di Newton assumono la forma di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\,.$$

Soluzione di 6.6. Consideriamo l'equazione di continuità (6.5) per $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. In una dimensione essa diventa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \tag{6.19}$$

Adesso, a differenza di prima, non assumiamo assoluta incompressibilità, ma soltanto che le variazioni percentuali di densità rispetto alla densità media costante ρ_0 sia piccole:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \epsilon \ll 1\,.$$

Allora la (6.19) può essere riscritta come

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_0\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 v + \rho_0 v\epsilon) = 0$$

Si assuma che il fluido sia inizialmente a riposo con velocità nulla e che la sua velocità v sia dovuta solamente alla variazione di densità e dunque, al primo ordine, proporzionale ad ϵ. Allora il termine $\rho_0 v\epsilon$ nell'equazione di continuità è trascurabile, inoltre, essendo ρ_0 costante, può essere portato fuori dalla derivata ed eliminato. Quindi l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{6.20}$$

Assumiamo adesso che per il fluido valga l'equazione di Eulero in una dimensione

$$(\rho_0 + \rho_0\epsilon)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial(P_0 + p)}{\partial x}$$

dove abbiamo espresso la pressione P come somma della pressione costante di equilibrio P_0 e della pressione p dovuta alla piccola variazione di densità del fluido ϵ. Essendo v di ordine ϵ

$$(\rho_0 + \rho_0\epsilon)\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho_0\frac{\partial v}{\partial t} + \text{ordini superiori in } \epsilon$$

Inoltre,

$$\frac{\partial(P_0 + p)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\,,$$

essendo P_0 costante. In conclusione, l'equazione di Eulero diventa

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{6.21}$$

(continua nella pagina successiva) □

(Secondo le convenzioni della meccanica, $\partial/\partial\mathbf{q}$ denota il gradiente $\nabla_{\mathbf{q}}$ rispetto alla variabile $\mathbf{q}$.)

Sovente risulta conveniente passare alla forma di Hamilton delle equazioni del moto. Definita l'Hamiltoniana

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)\,, \tag{6.25}$$

dove $\dot{\mathbf{q}}$ a secondo membro va inteso come la funzione di $\mathbf{p}$ definita implicitamente dall'equazione

$$\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)}{\partial\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p}\,,$$

le equazioni di Newton assumono la forma di Hamilton

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}} \tag{6.26}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}\,. \tag{6.27}$$

C'è un terzo modo di risolvere il problema fondamentale del moto (trovare $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ in funzione di $\mathbf{q}_0$ e $\dot{\mathbf{q}}_0$), riformulandolo nel modo seguente. (1) Si consideri una qualunque funzione $S_0(\mathbf{q})$ tale che

$$\mathbf{p}_0 = \left.\frac{\partial S_0(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0} \tag{6.28}$$

(chiaramente sono moltissime le scelte possibili per S_0!). (2) Si determini come questa funzione evolve nel corso del tempo, vale a dire si trovi $S = S(\mathbf{q},t)$, con condizione iniziale S_0, tale che tale che ad ogni tempo t si abbia

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\partial S(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}}\,. \tag{6.29}$$

(3) Da $\mathbf{p}(t)$, come funzione di $\mathbf{q}$ e t si risalga a $\dot{\mathbf{q}}(t)$ come funzione di $\mathbf{q}$ e t. Si chiami $\mathbf{v}(\mathbf{q},t)$ questa funzione. Allora $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ si trova integrando l'equazione del primo ordine

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v}(\mathbf{q},t)\,. \tag{6.30}$$

Per esempio, per $L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 - U$, si ha $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{q}}$ e la (6.30) diventa

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m}\frac{\partial S(\mathbf{q},t)}{\partial\mathbf{q}}\,.$$

Fine.

Resta solo da determinare $S = S(\mathbf{q},t)$. Si può dimostrare che

$$S(\mathbf{q},t) = \int_0^t L(\mathbf{q}(s),\dot{\mathbf{q}}(s),s)\,ds + S_0(\mathbf{q}_0)\,, \tag{6.31}$$

Soluzione di 6.6. (continuazione dalla pagina precedente) Prendiamo adesso la derivata rispetto al tempo della (6.20) e la derivata spaziale della (6.21),

$$\frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x} = 0\,, \qquad \rho_0\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x} = 0$$

Se moltiplichiamo la prima equazione per ρ_0 e facciamo la differenza delle due equazioni, otteniamo

$$\rho_0\frac{\partial^2\epsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x} = 0 \tag{6.23}$$

Adesso ci serve un po' di termodinamica. I processi di compressione e rarefazione delle onde acustiche sono adiabatici, cioè isoentropici. Il modulo di elasticità adiabatico è

$$K_S = -V\left.\frac{dP}{dV}\right|_{S=\text{ cost.}} = \rho\left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{S=\text{ cost.}}$$

("S" sta per entropia). Ma nel caso che stiamo considerando

$$\rho_0\frac{P-P_0}{\rho-\rho_0} = \rho_0\left.\frac{dP}{d\rho}\right|_{S=\text{ cost.}} = K_S\,.$$

Allora

$$\epsilon = \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{K_S}(P-P_0) = \frac{1}{K_S}p\,.$$

Sostituendo questa espressione per ϵ nella (6.24), si ottiene

$$\frac{\rho_0}{K_S}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x} = 0 \tag{6.24}$$

che è proprio l'equazione delle onde con velocità di propagazione $c = \sqrt{K_S/\rho_0}$. Per un gas ideale $K_S = \gamma P$, dove $\gamma = C_p/C_v$ e la velocità del suono nell'aria (trattata come un gas ideale) è

$$c = \sqrt{\frac{K_S}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma PV}{M}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}\,,$$

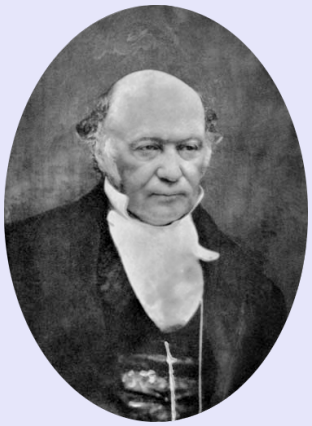
dove R è la costante universale dei gas, T è la temperatura assoluta del gas e M la sua massa molare. □

dove $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$, $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ e l'integrazione della lagrangiana è lungo le soluzioni delle equazioni del moto. È importante fare attenzione al fatto che essendo $\mathbf{p}_0$ fissato dalla (6.28), $\mathbf{q}_0$ non può essere scelto a piacere, ma è quel solo punto che nel tempo t evolve nel punto $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}$, per la data velocità iniziale $\mathbf{p}_0$. Si può inoltre dimostrare che la funzione $S = S(\mathbf{q}, t)$ definita dalla (6.31) soddisfa l'equazione alle derivate parziali

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{6.32}$$

con condizione iniziale (6.31). L'equazione (6.32) è nota come *equazione di Hamilton-Jacobi*.

Ora, per calcolare (6.31) occorre aver prima risolto le equazioni del moto, ma se si risolve direttamente l'equazione (6.32), senza passare per la (6.31), si ha una maniera alternativa per risolvere il problema del moto: risolvendo un'equazione alle derivate parziali e non un sistema di equazioni alle derivate ordinarie. Il metodo è abbastanza "cervellotico" in quanto il problema di partenza è trasformato in un problema chiaramente più complesso. Sorprendentemente, questo metodo aiuta a risolvere problemi concreti. Molti problemi, risolti con questo metodo, non sono in generale risolubili con metodi diversi.



William Rowan Hamilton (1805–1865) è stato un matematico, fisico e astronomo irlandese, noto per i suoi contributi nello sviluppo dell'ottica, della meccanica e dell'algebra. Il suo più grande contributo è forse la riformulazione della meccanica newtoniana. È noto anche come l'inventore dei quaternioni.

6.9 *Equazione di Schrödinger*

L'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\hbar^2}{2m_k} \Delta_k \psi + U\psi, \tag{6.33}$$

dove

$$\Delta_k = \nabla_{\mathbf{k}} \bullet \nabla_{\mathbf{k}} = {\nabla_k}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_k} + \frac{\partial^2}{\partial y_k} + \frac{\partial^2}{\partial z_k}$$

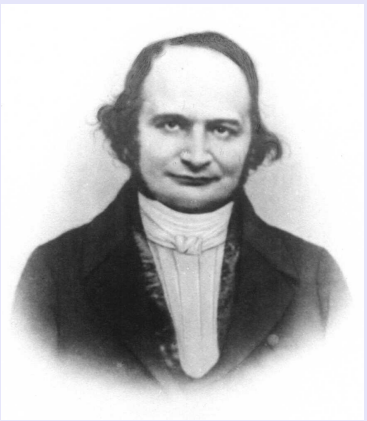
e $\hbar$ è la costante di Planck, è l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda $\psi = \psi(\mathbf{r_1} \ldots, \mathbf{r}_N)$ di un sistema di N particelle di masse $m_1, \ldots, m_N$ per cui l'energia potenziale del corrispondente problema classico è la funzione $U = U(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N)$.

Per una singola particella con energia potenziale classica U, l'equazione di Schrödinger diventa

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi, \tag{6.34}$$

Questa equazione emerge naturalmente dall'assunzione che la relazione di de Broglie valga localmente per una generica onda non necessariamente piana e che

$$\rho = |\psi|^2 = \overline{\psi}\psi \tag{6.35}$$



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851) è stato un matematico tedesco.Nel 1829 scrisse il suo trattato classico sulle funzioni ellittiche, di grande importanza in fisica matematica, in cui affrontava il problema di "integrare le equazioni del secondo ordine ottenute dall'energia cinetica". Fu uno dei primi cultori della teoria dei determinanti. Notevoli i suoi contributi alla meccanica celeste.

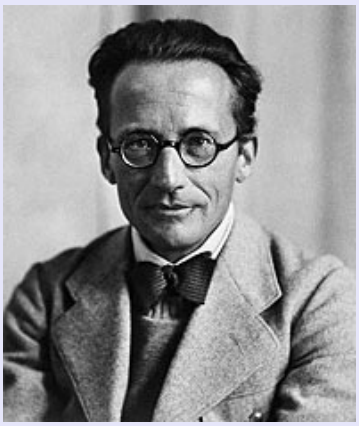
sia una quantità localmente conservata. Mostriamo come.

La relazione di de Broglie $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, un rimarchevole e misterioso distillato dei fatti sperimentali associati all'inizio della meccanica quantistica, collega una proprietà particellare, l'impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, con una proprietà ondulatoria, il numero d'onde $\mathbf{k}$. Compresa nella maniera più semplice, dice che la velocità di una particella è il rapporto tra $\hbar\mathbf{k}$ e la massa della particella. Ma il vettore d'onda $\mathbf{k}$ è definito solo per un'onda piana. Per un'onda generale $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$, la generalizzazione ovvia di $\mathbf{k}$ è il numero d'onde locale $\nabla S(\mathbf{r}, t)/\hbar$, dove S è la fase della funzione d'onda definita dalla sua rappresentazione polare

$$\psi = |\psi| e^{iS/\hbar}. \tag{6.36}$$

Con questa scelta la relazione di de Broglie diventa

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\nabla S. \tag{6.37}$$



Erwin Schrödinger (1887 – 1961) è stato un fisico teorico austriaco. È famoso per il suo fondamentale contributo alla meccanica quantistica, in particolare modo per l'equazione di Schrödinger, per la quale vinse il Premio Nobel nel 1933. Fu uno dei critici più lucidi e acuti dell'interpretazione dortodossa della meccanica quantistica.

Assumiamo adesso che valga l'equazione di continuità (6.5) per $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, dove ρ è dato dalla (6.35) e $\mathbf{v}$ dalla (6.37). Osserviamo che $\mathbf{v}$ può essere riscritto nella forma

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}\nabla S = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right).$$

Infatti, per la (6.36),

$$\frac{\nabla\psi}{\psi} = \frac{(\nabla|\psi|)e^{iS/\hbar} + |\psi|(i/\hbar)(\nabla S)e^{iS/\hbar}}{|\psi|e^{iS/\hbar}} = \frac{\nabla|\psi|}{|\psi|} + i\frac{\nabla S}{\hbar},$$

da cui segue che

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) = i\frac{\nabla S}{\hbar}.$$

Infatti,

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla S}{m} = \frac{1}{m}\nabla\frac{\hbar}{i}\ln\frac{\psi}{|\psi|} = \frac{\hbar}{mi}\nabla\frac{\psi}{|\psi|} =$$

//DA FINIRE//

Parte II

Metodi di Fourier

Indice

7 *Equazioni alle derivate parziali* 151

7.1 Introduzione 151

7.2 Integrale generale e particolare 152

7.3 Equazioni alle derivate parziali lineari 154

7.4 Principio di sovrapposizione 155

7.5 Metodo di separazione delle variabili 157

Problemi 159

Soluzioni 160

8 *L'equazione di Laplace* 161

8.1 Armoniche a simmetria sferica 161

8.2 Funzioni armoniche nel piano 162

8.3 Armoniche sferiche 165

8.4 Armoniche cilindriche 166

8.5 Trasformazioni di funzioni armoniche 167

8.6 Proprietà generali delle funzioni armoniche 171

8.7 Funzione di Green e metodo delle immagini 172

8.8 Polinomi di Legendre 174

Problemi 177

SOLUZIONI 179

9 *Polinomi omogenei e armoniche sferiche* 189

9.1 *Armoniche sferiche* 189
9.2 *Polinomi omogenei* 190
9.3 *Polinomi armonici omogenei* 191
9.4 *Decomposizione in armoniche di un polinomio* 193
9.5 *Armoniche sferiche e rotazioni* 195
9.6 *Distribuzione di temperatura all'interno di un corpo sferico* 196
9.7 *Armoniche sferiche e polinomi di Legendre* 197

10 *Delta di Dirac, convoluzioni e nuclei* 199

10.1 *La delta di Dirac o funzione impulso* 199
10.2 *La delta in più dimensioni* 203
10.3 *Prodotto di convoluzione* 204
10.4 *Il nucleo di Poisson e il pettine di Dirac* 205
10.5 *Convergenza uniforme del nucleo di Poisson* 206
10.6 *Il nucleo di Dirichlet e il lemma di Riemann-Lebesgue* 207
10.7 *Funzioni generalizzate** 209
PROBLEMI 213
SOLUZIONI 214

11 *Problemi al contorno per le onde e il calore* 217

11.1 *Problemi di Cauchy* 217
11.2 *Problemi al contorno* 219
11.3 *Il metodo delle immagini* 221
11.4 *Il metodo di Fourier* 225
11.5 *Il metodo di Fourier nel linguaggio degli spazi vettoriali* 229
PROBLEMI 231

Soluzioni 234

12 *Tre vie che portano a Fourier* 241

12.1 *La via originaria* 241
12.2 *Serie di Fourier di soli seni o coseni* 243
12.3 *Serie di Fourier completa* 246
12.4 *Convergenza delle serie di Fourier* 248
12.5 *Il fenomeno di Gibbs* 252
12.6 *La via delle funzioni armoniche* 254
12.7 *La via della migliore approssimazione ai minimi quadrati* 257
Problemi 260
Soluzioni 261

13 *Proprietà delle serie di Fourier* 263

13.1 *Derivazione delle serie di Fourier* 263
13.2 *Andamento all'infinito dei coefficienti di Fourier* 264
13.3 *Velocità di convergenza delle somme parziali** 266
13.4 *Integrazione delle serie di Fourier* 266
13.5 *Teorema di convoluzione* 267
Problemi 269
Soluzioni 270

14 *Funzioni ortogonali e serie di Fourier* 271

14.1 *Convergenza in norma* 271
14.2 *Basi ortonormali in spazi infinito-dimensionali* 275
14.3 *Successioni a quadrato sommabile* 278
14.4 *Basi ortonormali per funzioni a quadrato integrabile* 279
14.5 *Completezza del sistema trigonometrico* 282
14.6 *Serie di Fourier in più variabili* 283
Problemi 285

Soluzioni 287
Complementi 290

15 *Teoria di Sturm-Liouville* **301**

15.1 Equazioni differenziali lineari e omogenee 301
15.2 Autovalori e autofunzioni 304
15.3 Forma normale e analisi qualitativa delle equazioni 307
15.4 Equazione di Sturm-Liouville 309
15.5 Operatore di Sturm-Liouville 310
15.6 Problemi di Sturm-Liouville 312
15.7 Problemi di Sturm-Liouville non regolari 314
15.8 Il sistema ortogonale delle funzioni di Hermite 314
Problemi 317
Soluzioni 319

16 *Integrali di Fourier* **331**

16.1 Dai problemi al contorno agli integrali di Fourier 331
16.2 Integrali di Fourier come limiti di serie di Fourier 336
16.3 Il paradiso degli integrali di Fourier 337
16.4 La trasformata di Fourier di operatori 339
16.5 Autovettori della trasformazione di Fourier 342
16.6 La trasformazione di Fourier in L^2 344
16.7 Trasformate di Fourier di funzioni generalizzate 345
16.8 Applicazioni alle equazioni differenziali e integrali 347
16.9 Applicazioni alla probabilità 352
Tavole di trasformate di Fourier 355
Problemi 357
Soluzioni 360

17 *La trasformata di Laplace* **371**

17.1 La trasformata di Laplace 371

17.2 Proprietà e applicazioni di base 373
17.3 Altre proprietà della trasformata di Laplace 376
17.4 Funzioni a scalino e impulso 379
17.5 Funzione di trasferimento 381
17.6 Antitrasformata di funzioni razionali 382
17.7 Funzioni particolari 385
17.8 Applicazioni ai problemi al contorno 388
Tavola di trasformate di Laplace 390
Problemi 391
Soluzioni 392

7
Equazioni alle derivate parziali

Indice

7.1 ***Introduzione*** 151
7.2 ***Integrale generale e particolare*** 152
7.3 ***Equazioni alle derivate parziali lineari*** 154
7.4 ***Principio di sovrapposizione*** 155
7.5 ***Metodo di separazione delle variabili*** 157
PROBLEMI 159
SOLUZIONI 160

7.1 Introduzione

Un'equazione alle derivate parziali è un'equazione che contiene come incognita una funzione di due o più variabili e le sue derivate parziali rispetto a queste variabili. Per esempio, una generica equazione alle derivate parziali in due variabili indipendenti x e y può essere scritta come[1]

$$F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u, \partial_{xx} u, \partial_{xy} u, \partial_{yy} u) = 0\,, \tag{7.1}$$

dove F è una funzione di 8 variabili. Una forma analoga alla (7.1) può essere data ad un equazione in n variabili indipendenti $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ nell'incognita $u = u(x_1, \dots, x_n)$:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \partial_{x_1 x_1} u, \partial_{x_1 x_2} u, \dots \partial_{x_n x_n} u, \dots) = 0\,, \tag{7.2}$$

L'*ordine* di una equazione alle derivate parziali è l'ordine della derivata più elevata. Risolvere l'equazione significa trovare una funzione $u = u(x_1, \dots x_n)$ in qualche regione Ω di $\mathbb{R}^n$ tale che l'equazione è soddisfatta per tutti i punti $(x_1, \dots x_n)$ in quella regione.

Un importante problema associato ad una equazione alle derivate parziali consiste nella ricerca di tutte le soluzioni che soddisfano certe

[1] Per brevità, abbiamo usato la notazione

$$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \partial_{xy} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \dots \partial_{yy} u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

condizioni dette *condizioni al contorno*. In genere si tratta di condizioni sui valori della funzione incognita (e/o delle sue derivate) sul bordo della regione, dentro cui si cerca la soluzione. Il problema così posto è detto *problema al contorno*.

Sfortunatamente, NON ESISTE una teoria generale di risoluzione di tutte le equazioni alle derivate parziali ed è estremamente improbabile che una teoria di questo tipo verrà mai trovata, data la ricchissima varietà di fenomeni fisici, geometrici e probabilistici che sono governati da equazioni alle derivate parziali. Invece, la ricerca matematica si concentra su varie equazioni particolari che sono importanti per le applicazioni. Un corso di meccanica quantistica è sostanzialmente dedicato allo studio dell'equazione di Schrödinger, ma anche se il corso è avanzato, solo una piccola parte di ciò che è noto sulle soluzioni di questa equazione è coperto. Lo stesso dicasi per l'equazione di Navier-Stokes, di cui molto è ancora non compreso.

Tuttavia, il fatto che non esista una teoria generale, non vuol dire che non ci siano metodi abbastanza generali che facilitino lo studio di particolari equazioni alle derivate parziali. Questo è particolarmente vero per le equazioni lineari e gran parte di questo corso è proprio dedicato a fornire le nozioni elementari per lo studio delle equazioni lineari. Lo studio riguarderà il metodo delle trasformate di Laplace e Fourier, la teoria generale delle funzioni ortogonali e metodi di analisi complessa.

7.2 *Integrale generale e particolare*

L'*integrale generale* di una equazione alle derivate parziali è una soluzione che contiene un numero di funzioni arbitrarie indipendenti pari all'ordine dell'equazione. Un *integrale particolare* è una soluzione che che può essere ottenuta dall'integrale generale mediante una scelta particolare delle funzioni arbitrarie. Un *integrale singolare* è una soluzione che non si può ottenere dall'integrale generale con particolare scelta delle funzioni arbitrarie.

ESERCIZIO 7.1. Si consideri l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y\,.$$

Qual è il suo ordine? Determinare, se esiste, il suo integrale generale e fornire un esempio di integrale particolare.

L'integrale generale si può determinare solo in caso di equazioni molto semplici. Da un punto di vista pratico (e teorico), la nozione di problema al contorno che analizzeremo nel seguito è ben più utile.

Soluzione di 7.1. L'equazione è ovviamente di ordine 2. Integrando ambo i membri dell'equazione rispetto a x, si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - yx + C(y)\,,$$

dove $C(y)$ è una costante arbitraria rispetto alla variabile x e dunque una funzione arbitraria di y. L'integrazione rispetto a y dell'equazione ottenuta fornisce

$$u = x^2 y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)\,,$$

dove $F(x)$ è una costante rispetto a y e $G(y)$ è una primitiva di $C(y)$; le funzioni $F(x)$ e $G(x)$ sono arbitrarie (purché derivabili). Poiché la soluzione trovata contiene due funzioni arbitrarie indipendenti, essa è la *soluzione generale*. Se in particolare $F(x) = x$ e $G(y) = \sin y$, otteniamo la *soluzione particolare*

$$u = x^2 - yx + x + \sin y$$

□

Ci sono però due casi classici di integrali generali che è importante conoscere.

INTEGRALE GENERALE DI D'ALEMBERT L'integrale generale dell'equazione della corda vibrante

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{6.12}$$

è

$$u = f(x - vt) + g(x + vt)\,, \tag{7.6}$$

dove f e g sono funzioni arbitrarie (purché differenziabili due volte). Questa soluzione fu scoperta da d'Alembert ed è nota come *integrale di d'Alembert*. Per comprenderne il significato, si supponga che la corda sia illimitata dalle due parti e che $g = 0$, per cui

$$u(x,t) = f(x - vt)\,. \tag{7.7}$$

Poiché questa funzione dipende solo da $x - vt$, questa soluzione descrive un'onda che si propaga inalterata nella direzione positiva dell'asse delle x: in un sistema di riferimento in moto con velocità v la soluzione avrebbe sempre, nel corso del tempo, la stessa forma: un'onda di questo tipo è detta *progressiva*. La soluzione

$$u(x,t) = g(x + vt)\,. \tag{7.8}$$

corrisponde invece ad un'onda *regressiva*, e la soluzione generale (7.6) ad una sovrapposizione di questi due tipi d'onde.

FUNZIONI ARMONICHE NEL PIANO Vogliamo determinare l'integrale generale dell'equazione di Laplace nel piano

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \tag{7.9}$$

Procedendo in completa analogia con l'equazione di d'Alembert (si veda la dimostrazione a margine), fattorizziamo l'equazione ricorrendo ai numeri complessi:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0\,.$$

Posto $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ (il complesso coniugato di z), scriviamo u nelle nuove variabili $u = u(z,\overline{z})$. Introduciamo gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\,, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{7.10}$$

(si confronti con la (1.16)). Allora sono soluzioni della (7.9), cioè sono funzioni armoniche nel piano, le funzioni $f(z,\overline{z})$ tali che

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \tag{7.11}$$

Dimostrazione della (7.6). Per ottenere l'integrale di d'Alembert si mostra preliminarmente che l'equazione (6.12) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0 \tag{7.3}$$

mediante il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \eta = x - vt \\ \xi = x + vt \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \dfrac{1}{2v}(\xi - \eta) \\ x = \dfrac{1}{2v}(\xi + \eta) \end{cases} \tag{7.4}$$

Per vedere che la (7.3) è equivalente alla (6.12), calcoliamo come cambiano le derivate:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial \eta} + v\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

e, derivando ancora una volta,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 2v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + v^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$$

Quindi, $\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}$, da cui la (7.3). L'equazione (7.3) può essere trattata come una coppia di equazioni ordinarie consecutive

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0\,,$$

il che vuol dire che $\partial u/\partial \xi$ non dipende da η, vale a dire è una funzione della sola ξ: $\partial u/\partial \xi = G(\xi)$. Integrando (e indicando con g la primitiva della G), $u = g(\xi) + f$, dove f non dipende da ξ, ma può dipendere da η. Dunque $u = g(\xi) + f(\eta)$, che, ritornando alle variabili x e t, è proprio la (7.6).

Un altro modo per risolvere la (6.12) è osservare che l'operatore di d'Alembert $\Box$ fattorizza nel prodotto di due operatori del primo ordine,

$$\Box = D_+ D_- = D_- D_+ \tag{7.5}$$

dove $D_\pm = \dfrac{1}{v}\dfrac{\partial}{\partial t} \pm \dfrac{\partial}{\partial x}$. Ma

$$D_- = \left[-\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right] = -2\frac{\partial}{\partial \eta}$$
$$D_+ = \left[-\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}\right] = 2\frac{\partial}{\partial \xi}$$

Quindi la soluzione di $D_- u = 0$ è $g(\xi) = g(x + vt)$ e la soluzione di $D_+ u = 0$ è $f(\eta) = f(x - vt)$. Poichè entrambe annullano l'operatore (7.5), lo stesso vale per la loro somma $u = f(x - vt) + g(x + vt)$.

(si confronti con la (1.15)) o le funzioni $g(z, \bar{z})$ tali che

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \tag{7.12}$$

In generale, queste funzioni sono a valori complessi, ma si possono scrivere in termini delle loro parti reali e immaginarie, cioè $f = u + iv$. Allora se f soddisfa la (7.11), u e v sono funzioni reali che sono armoniche nel piano; analogamente per la g.

Riassumendo:

> Una funzione complessa $f(z)$ tale che $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ è detta *funzione analitica*. Le parti reali e immaginarie delle funzioni analitiche sono funzioni armoniche nel piano. (7.13)

La teoria delle funzioni analitiche è un campo a sé della matematica. Che le funzioni armoniche siano la parte reale o immaginaria di una funzione analitica fu scoperto da d'Alembert nella seconda metà del 700 e la soluzione data sopra ricalca abbastanza fedelmente il lavoro di d'Alembert (che non era di matematica pura ma era mirato a risolvere un problema di idrodinamica). Nell'800 venne sviluppata la teoria delle funzioni analitiche, in particolare da Cauchy e da Riemann. La terza parte di questo corso sarà dedicata a questa teoria, ma ne copriremo solo una piccola parte. Uno studio approfondito richiederebbe un corso completamente dedicato a questo. Il che mostra che lo studio approfondito delle soluzioni di una equazione alle derivate parziali molto semplice, come è in effetti la (7.9), non sia altrettanto semplice e possa dischiudere interi capitoli di matematica!

7.3 *Equazioni alle derivate parziali lineari*

Un'equazione alle derivate parziali è detta lineare se la funzione F, data dalla (7.2), è lineare nell'incognita u e nelle sue derivate. Linearità significa quanto segue. Si scriva l'equazione nella forma $\mathscr{D}u = 0$, dove $\mathscr{D}$ è l'*operatore differenziale* definito dalla funzione F. Per per due variabili indipendenti,

$$\mathscr{D}u = F(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u, \partial_{xx} u, \partial_{xy} u, \partial_{yy} u)$$

e analogamente per più variabili. La linearità di $\mathscr{D}$ significa che per funzioni u e v e per costanti α e β

$$\mathscr{D}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathscr{D}u + \beta \mathscr{D}v \tag{7.14}$$

Tutte le equazioni del capitolo 6 sono lineari, fatta eccezione per le equazioni di Navier-Stokes e Hamilton-Jacobi che sono non-lineari.

Se $\mathscr{D}$ è lineare, l'equazione $\mathscr{D}u = 0$ è detta equazione *lineare omogenea* e l'equazione

$$\mathscr{D}u = j\,, \tag{7.15}$$

dove j è una data funzione, è detta *lineare inomogenea*.

La più generale equazione alle derivate parziali lineare del secondo ordine in due variabili indipendenti ha la forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \tag{7.16}$$

dove $A, B, \ldots, G$ possono dipendere da x e y, ma non da u. A causa della natura delle soluzioni della (7.16), si classifica spesso l'equazione come *ellittica*, *iperbolica* o *parabolica*, a seconda che $B^2 - 4AC$ sia minore, maggiore o uguale a zero rispettivamente. Un'analoga classificazione si ha per per equazioni in n variabili indipendenti. L'equazione di Laplace è il prototipo di equazione lineare, omogenea ed ellittica. L'equazione delle onde è il prototipo di equazione lineare omogenea iperbolica. L'equazione del calore è il prototipo di equazione lineare omogenea parabolica.

7.4 *Principio di sovrapposizione*

Il seguente principio è alla base di tutti i metodi di soluzione di equazioni lineari.

Principio di sovrapposizione. Se $u_1, \ldots, u_N$ sono soluzioni dell'equazione lineare omogenea $\mathscr{D}u = 0$, allora lo è anche

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n\,, \tag{7.17}$$

dove c_i, $i = 1, \ldots N$ sono costanti.

In altre parole, le soluzioni di $\mathscr{D}u = 0$, formano uno spazio lineare.

Dimostrazione di (7.17). Immediata conseguenza della linearità di $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}\sum_{n=1}^{N} c_n u_n = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathscr{D}u_n = \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot 0 = 0\,.$$

□

Il principio di sovrapposizione può essere usato per formare soluzioni di un'equazione a partire da soluzioni note $u_1, u_2, \ldots$ e può esteso in due modi: permettendo (1) combinazioni lineari di successioni infinite di soluzioni e (2) combinazioni lineari continue di soluzioni.

(1) Se $u_1, u_2, \ldots$, è una successione di soluzioni, allora la serie infinita

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)\,. \tag{7.18}$$

è soluzione di $\mathscr{D}u = 0$ se opportune condizioni sono soddisfatte. La dimostrazione per il caso finito si estende infatti al caso

infinito,

$$\mathscr{D}\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathscr{D} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 0 = 0\,,$$

a patto che la serie (7.18) converga e sia lecito il primo passaggio sopra in cui si "porta dentro" la serie l'operatore $\mathscr{D}$. Poiché la serie è il limite della somma

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n u_n(x)\,,$$

il problema cruciale è lo scambio dell'operatore $\mathscr{D}$ con un limite, cioè

$$\mathscr{D}\lim_{N\to\infty} s_N(x) = \lim_{N\to\infty} \mathscr{D} s_N(x)\,,$$

il che, come si è visto, è garantito quando il limite è uniforme, una condizione che, a sua volta, è garantita se i $|c_n u_n(x)|$ tendono a zero abbastanza rapidamente.

(2) Se, per ogni y, la funzione $u(x;y)$ è soluzione dell'equazione lineare omogenea $\mathscr{D}u(x;y) = 0$, e $g(y)$ è una funzione di y, si può supporre che la funzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x;y)g(y)dy \tag{7.19}$$

sia soluzione dell'equazione. Affinché sia davvero una soluzione, occorre garantire che l'integrale improprio (7.19) sia convergente e che sia lecito scambiare $\mathscr{D}$ con il segno di integrale,

$$\mathscr{D}\int_{-\infty}^{\infty} u(x;y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathscr{D}u(x;y)]\, g(y)dy\,.$$

Anche in questo caso, cio è garantito dalla convergenza uniforme ovvero dal requisito che $|u(x;y)g(y)|$ tenda a zero abbastanza rapidamente.

Esempio 7.1. Il potenziale coulombiano di una carica unitaria posta in un dato punto $\mathbf{r}'$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

soddisfa l'equazione di Lapace $\Delta V = 0$ in tutti i punti dello spazio $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$. Questo si vede facilmente scegliendo un sistema di coordinate con origine in $\mathbf{r}'$. Allora la funzione

$$u = \frac{1}{r} \tag{7.20}$$

ha simmetria sferica intorno all'orgine e non dipende dalle coordinate sferiche θ e ϕ, per cui l'unico termine rilevante del laplaciano in coordinate sferiche (5.20) è il primo e quindi

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r^2\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0 \quad \text{per } r \neq 0$$

Si forma quindi, per sovrapposizione continua, la funzione

$$\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

che soddisfa l'equazione di Laplace in tutti i punti dello spazio in cui $\rho(\mathbf{r}) = 0$.

7.5 *Metodo di separazione delle variabili*

Scoperto da Daniel Bernoulli, il metodo di separazione delle variabili è un modo semplice ma potente per trovare integrali particolari di un'equazione differenziale. In questo metodo si suppone di poter esprimere una soluzione dell'equazione come prodotto di funzioni incognite, ognuna delle quali dipenda da una sola variabile indipendente. Il successo del metodo dipende da riuscire a scrivere l'equazione risultante in modo che un membro dipenda da una sola variabile mentre l'altro dipenda dalle variabili rimanenti; dal che si deduce che ogni membro deve essere costante. Iterando il procedimento si possono determinare le funzioni incognite. Si può poi usare il principio di sovrapposizione per determinare nuove soluzioni.

Daniel Bernoulli (1700–1782) fu un matematico e fisico svizzero e uno dei matematici prominenti della famiglia dei Bernoulli. Noto per i suoi contributi alla meccanica e all'idrodinamica, contribuì anche allo sviluppo della teoria della probabilità (scoperta dallo zio Jacob Bernoulli) e in particolare alle prime applicazioni all'economia (teoria del rischio). Nello studio dei sistemi vibranti (corde e membrane) già utilizzava sviluppi in serie di Fourier.

ESERCIZIO 7.2. Trovare soluzioni particolari dell'equazione di Laplace nel piano

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{7.9}$$

usando il metodo di separazione delle variabili.

Soluzione. Poniamo nell'equazione assegnata $u = XY$, in cui X dipende solo da x e Y dipende solo da y. Allora

$$X''Y + XY'' = 0 \quad \text{o} \quad \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}\,.$$

Poiché X dipende solo da x e Y dipende solo da y, e poiché x e y sono variabili indipendenti, i due membri dell'equazione devono essere una costante, diciamo μ. Quindi

$$X'' = \mu X \quad \text{e} \quad Y'' = -\mu Y\,.$$

Distinguiamo i tre casi possibili per μ:

(1) $\mu = 0$. Allora $X'' = 0$ e $Y'' = 0$, le cui soluzioni sono $X = ax + b$ e $Y = cy + d$, quindi

$$u = (ax + b)(cy + d)\,.$$

(2) $\mu \equiv \alpha^2 > 0$. Allora $X'' = \alpha^2 X$ e $Y'' = -\alpha^2 Y$, le cui soluzioni sono $X = ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x}$ e $Y = c\cos\alpha y + d\sin\alpha y$ e quindi

$$u = (ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x})(c\cos\alpha y + d\sin\alpha y)\,.$$

(3) $\mu \equiv -\alpha^2 < 0$. Allora

$$X'' = -\alpha^2 X \quad Y'' = +\alpha^2 Y\,,$$

le cui soluzioni sono $X = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$ e $Y = ce^{\alpha y} + de^{-\alpha y}$, da cui

$$u = (a\cos\alpha x + b\sin\alpha x)(ce^{\alpha y} + de^{-\alpha y})$$

Si possono adesso formare altre soluzioni della (7.9), usando il principio di sovrapposizione. Ad esempio, per ogni $\alpha > 0$, la serie

$$\sum_n^\infty [a_n\cos\alpha x + b_n\sin\alpha x]\, e^{-\alpha y}$$

o, integrando su tutti gli α, le funzioni definite dagli integrali

$$f(x,y) = \int_0^\infty \sin(\alpha x)e^{-\alpha y}d\alpha \quad \text{e} \quad g(x,y) = \int_0^\infty \cos(\alpha x)e^{-\alpha y}d\alpha$$

Dall'esercizio 5.6,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y}\sin(\alpha x)d\alpha = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{-\alpha y}\cos(\alpha x)d\alpha = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Come si può verificare, queste funzioni soddisfano l'equazione di Laplace, e quindi sono funzioni armoniche nel piano (ma singolari nell'origine). □

Problemi

Problema 7.1. □ Stabilire se ciascuna delle seguenti equazioni alle derivate parziali è lineare o no, determinarne l'ordine ed indicare le variabili dipendenti e indipendenti.

(a) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(b) $x^2\dfrac{\partial^3 R}{\partial y^3} = y^2\dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2}$

(c) $W\dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2} = rst$

(d) $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$

(e) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1$

Problema 7.2. □ Quali dei seguenti operatori $\mathscr{D}$ sono lineari?

(a) $\mathscr{D}u = \dfrac{\partial u}{\partial x} + x\dfrac{\partial u}{\partial y}$

(b) $\mathscr{D}u = \dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial}{\partial y}$

(c) $\mathscr{D}u = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

(d) $\mathscr{D}u = \dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\dfrac{\partial u}{\partial y} + 6$

Problema 7.3. □ Mostrare che la differenza tra due soluzioni di un'equazione lineare inomogenea $\mathscr{D}u = j$ è una soluzione dell'equazione omogenea $\mathscr{D}u = 0$.

Problema 7.4. □ Sia $\mathscr{D}$ l'operatore differenziale di una generica equazione omogenea del secondo ordine,

$$\mathscr{D} = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F$$

dove $A, B, \ldots, F$ sono costanti. Mostrare che se u è soluzione di $\mathscr{D}u = 0$ allora anche tutte le sue derivate (se esistono)

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \ldots$$

sono soluzioni di $\mathscr{D}u = 0$.

Problema 7.5. □ Sia $u = xy$. Integrare le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{1.17}$$

per ottenere v.

Problema 7.6. □ Sia $u = x^2 + y^2$. Mostrare che non esiste alcuna funzione v tale che la coppia u, v soddisfi le equazioni di Cauchy-Riemann (1.17).

Problema 7.7. □ Trovare soluzioni particolari dell'equazione di Laplace nello spazio

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,,$$

usando il metodo di separazione delle variabili.

Soluzioni

Problema 7.6. □ Metodo 1. Richiedendo che le equazioni di Cauchy-Riemann siano soddisfate per $u = x^2 + y^2$, si ottiene

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2y\,.$$

Integrando,

$$v = 2xy + g(x)$$
$$v = -2yx + h(y)\,.$$

È chiaro che queste identità non possono essere verificate per nessuna scelta di g e h.
Metodo 2. Se le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte, le funzioni u e v devono essere *funzioni armoniche*, cioè devono essere entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace nel piano. Questa proprietà si verifica facilmente:

$$\begin{aligned} \partial_x\partial_x u &= \partial_x\partial_y v = \partial_y\partial_x v = -\partial_y\partial_y u \\ \partial_x\partial_x v &= -\partial_x\partial_y u = -\partial_y\partial_x u = -\partial_y\partial_y v \end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \text{e} \quad \Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = 0$$

La funzione $u = x^2 + y^2$, non è armonica in quanto $\Delta u = 4$.

8
L'equazione di Laplace

Indice

8.1 ***Armoniche a simmetria sferica*** 161
8.2 ***Funzioni armoniche nel piano*** 162
8.3 ***Armoniche sferiche*** 165
8.4 ***Armoniche cilindriche*** 166
8.5 ***Trasformazioni di funzioni armoniche*** 167
8.6 ***Proprietà generali delle funzioni armoniche*** 171
8.7 ***Funzione di Green e metodo delle immagini*** 172
8.8 ***Polinomi di Legendre*** 174
PROBLEMI 177
SOLUZIONI 179

8.1 Armoniche a simmetria sferica

Le soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \tag{6.6}$$

che sono regolari in una regione $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (cioè finite e continue insieme con le loro derivate prime e che hanno derivate seconde in Ω) sono dette *funzioni armoniche* in Ω. Lo scopo di questa sezione e delle tre che seguono è di ottenere mediante il metodo di separazione delle variabili una collezione di funzioni armoniche semplici. Sebbene la collezione sia piccola, è possibile allargarla enormemente usando il principio di sovrapposizione e altri metodi che saranno esposti nel seguito.

Consideriamo il potenziale di una carica puntiforme (7.20), che si distingue per la sua simmetria sferica, e domandiamoci come trovare

funzioni armoniche a simmetria sferica in $\mathbb{R}^n$. Per questo, ci serve l'espressione del laplaciano Δ in $\mathbb{R}^n$, che è

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_n \,. \tag{8.1}$$

dove Λ_n è un operatore differenziale del secondo ordine che contiene solo derivate rispetto alle variabili angolari. Per $n = 2$,

$$\Lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \,, \tag{8.2}$$

che è detto *laplaciano circolare* Per per $n = 3$

$$\Lambda_3 = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{8.3}$$

che è detto *laplaciano sferico*.

Adesso è facile trovare funzioni armoniche che dipendono solo da r. In $\mathbb{R}^2$, una funzione armonica deve soddisfare l'equazione

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \,, \tag{8.4}$$

che è in verità un'equazione ordinaria del secondo ordine che può essere facilmente risolta. Le funzioni

$$1 \,, \qquad \ln r \qquad \text{(n=2)} \tag{8.5}$$

sono due soluzioni linearmente indipendenti di (8.4) e la soluzione generale consiste di tutte le possibili combinazioni lineari di queste due funzioni. In $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, una funzione armonica a simmetria sferica deve soddisfare l'equazione

$$\frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0$$

e due soluzioni linearmente indipendenti di questa equazione sono

$$1 \,, \qquad \frac{1}{r^{n-2}} \,. \tag{8.6}$$

Si osservi che le prime funzioni in (8.5) e (8.6) sono definite ed armoniche in tutto $\mathbb{R}^n$, mentre le seconde funzioni sono definite e armoniche solo nel complemento dell'origine in $\mathbb{R}^n$. Talvolta si dice che $\ln r$ è una funzione armonica in $\mathbb{R}^2$ con un polo nell'origine e $r^{-(n-2)}$ è armonica in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, con un polo nell'origine.

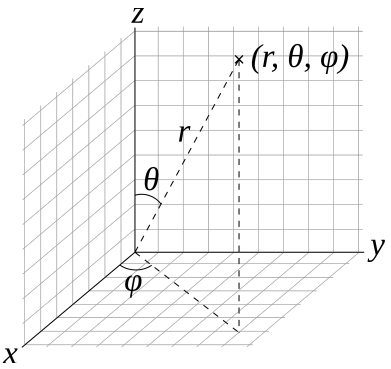


Figura 8.1: Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$ $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

8.2 *Funzioni armoniche nel piano*

Adesso usiamo il metodo di *separazione delle variabili*, come nella soluzione dell'esercizio 7.2, per ottenere altre funzioni armoniche elementari. Incominciamo con $\mathbb{R}^2$.

In coordinate polari r, θ, l'equazione di Laplace diventa

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0 \tag{8.7}$$

e ne cerchiamo soluzioni (reali) della forma

$$u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)\,. \tag{8.8}$$

Sostituendo (8.8) nella (8.7), si ottiene

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0\,.$$

Dividendo questa equazione per $R\Theta$, moltiplicando per r^2 e trasferendo il terzo termine a secondo membro, si ottiene

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}\,. \tag{8.9}$$

Essendo r e θ variabili indipendenti, ciascun membro di questa equazione deve essere uguale a una costante reale, diciamo μ. Quindi la (8.9) è equivalente a

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=\mu=-\frac{\Theta''}{\Theta}\,, \tag{8.10}$$

ovvero alla coppia di equazioni

$$r^2R''+rR'-\mu R=0 \tag{8.11}$$

$$\Theta''+\mu\Theta=0\,, \tag{8.12}$$

dove μ è una qualche costante reale. Concludiamo che una funzione $u(r,\theta)$ della forma (8.8) soddisfa l'equazione di Laplace se le funzioni R e Θ soddisfano le equazioni differenziali ordinarie (8.10) e (8.11). Dobbiamo quindi risolvere queste equazioni.

L'equazione (8.11)

$$r^2R''+rR'-\mu R=0 \tag{8.11}$$

è un' *equazione di Eulero-Cauchy* e ha due soluzioni linearmente indipendenti

$$R_\mu=\begin{cases}1\,,\ \ln r & \text{se}\quad \mu=0\\ r^{\sqrt{\mu}}\,,\ r^{-\sqrt{\mu}} & \text{se}\quad \mu\neq 0\end{cases} \tag{8.13}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti di (8.10) sono

$$\Theta_\mu=\begin{cases}1,\ \theta & \text{se}\quad \mu=0\\ \cos\sqrt{\mu}\theta\,,\ \sin\sqrt{\mu}\theta & \text{se}\quad \mu\neq 0\end{cases} \tag{8.14}$$

Nelle (8.13) e (8.14) si è usato il pedice μ per indicare la dipendenza delle soluzioni da μ. Quando μ è negativo, le funzioni (8.13) e

Equazione di Eulero-Cauchy

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0.$$

Per risolverla, si cerca una soluzione della forma $y=x^m$. Differenziando, si ottiene $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}$. Sostituendo nell'equazione originale, si ha

$$x^2(m(m-1)x^{m-2})+ax(mx^{m-1})+b(x^m)=0\,.$$

Riarrangiando i termini, si ottiene

$$m^2+(a-1)m+b=0.$$

Possiamo allora risolvere per m. Ci sono tre casi di particolare interesse:

(i) Due radici distinte m_1 e m_2.

(ii) Una radice doppia m.

(iii) radici complesse $\alpha\pm i\beta$

Nel caso (i), la soluzione è data da

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}.$$

Nel caso (ii), la soluzione è data da

$$y=c_1x^m\ln(x)+c_2x^m.$$

Per ottenere questa soluzione occorre applicare il medodo di riduzione dell'ordine, dopo aver trovato una soluzione $y=x^m$. Nel caso (iii), la soluzione è data

$$y=c_1x^\alpha\cos(\beta\ln(x))+c_2x^\alpha\sin(\beta\ln(x)),$$

dove $\alpha=\mathrm{Re}\,(m)$, $\beta=\mathrm{Im}\,(m)$ e c_1, c_2 costanti reali. Questa forma della soluzione si ottiene ponendo $x=e^t$ e usando la formula di Eulero.

Soluzione della (8.11) È un'equazione di Eulero-Cauchy con $a=1$ e $b=-\mu$. Allora $m^2-\mu=0$ e quindi i tre casi possibili sono:

(i) $\mu>0$. Due radici reali distinte $m_1=\sqrt{\mu}$ e $m_2=-\sqrt{\mu}$.

(ii) $\mu=0$. Una radice doppia $m=0$.

(iii) $\mu<0$ Due radici immaginarie distinte $m_1=i\sqrt{|\mu|}$ e $m_2=-i\sqrt{|\mu|}$.

Nel caso (i), la soluzione è data da $y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}$. Nel caso (ii) una soluzione è $y=1$. Allora per il metodo di riduzione dell'ordine $\ln x$ è un'altra soluzione indipendente.

(8.14) sono a valori complessi. Le parti reali e immaginarie di queste funzioni formano coppie di funzioni a valori reali linearmente indipendenti.

Non si deve ritenere che per ogni valore di μ e per entrambe le scelte delle funzioni in (8.13) e (8.14), la formula

$$u_\mu(r,\theta) = R_\mu(r)\Theta_\mu(\theta)\,. \tag{8.15}$$

definisca una funzione armonica in ogni dominio Ω di $\mathbb{R}^2$. Questo è vero solo quando la (8.15) porta ad una funzione "ben definita" in Ω. Per esempio, si è spesso interssati a trovare funzioni armoniche in domini che contengono curve chiuse che circondano l'origine. Esempi di tali domini sono l'intero piano $\mathbb{R}^2$, un disco aperto centrato nell'origine o un anello, anch'esse centrato nell'origine. Se Ω è uno di questi domini e se C è una qualunque curva che circonda l'origine, è chiaro che se partiamo da un qualunque punto di C e viaggiamo una volta lungo C ritornando al punto di partenza, la variabile angolare θ e variata di 2π. Questo significa che affinché (8.15) definisca una funzione vera e propria, cioè "ad un sol valore", occorre che Θ sia periodica di periodo 2π, cioè deve soddisfare la condizione

$$\Theta_\mu(\theta + 2\pi) = \Theta_\mu(\theta)\,. \tag{8.16}$$

È lasciato come (facile) esercizio mostrare che le funzioni $\Theta_\mu(\theta)$ date dalla (8.14) soddisfano la condizione di periodicità solo se $\sqrt{\mu} = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ e, in effetti, per $\mu = 0$ solo la funzione 1 soddisfa questa condizione. Quindi, se Ω è un dominio che contiene curve che girano attorno all'origine, le sole funzioni angolari che possono essere usate nella (8.14) per definire funzioni armoniche in Ω sono

$$\Theta_n(\theta) = \cos n\theta\,,\ \ \sin n\theta\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{8.17}$$

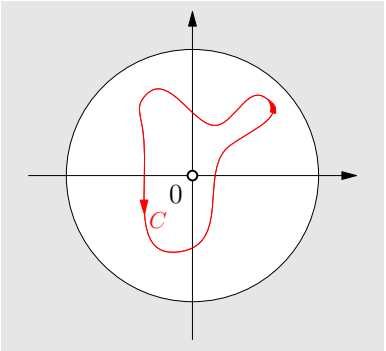


Figura 8.2: Dominio nel piano (disco bianco) che contiene una curva che circonda l'origine.

Le corrispondenti funzioni radiali sono

$$R_n = \begin{cases} 1\,,\ \ln r & n = 0 \\ r^n\,,\ r^{-n} & n = 1, 2, 3\ldots \end{cases} \tag{8.18}$$

e la (8.15) fornisce la seguente collezione di funzioni

$$u_n(r,\theta) = \begin{cases} 1\,, & r^n\cos n\theta\,, & r^n \sin n\theta & n = 1, 2, 3\ldots \\ \ln r\,, & r^{-n}\cos n\theta\,, & r^{-n}\sin n\theta & n = 1, 2, 3\ldots \end{cases} \tag{8.19}$$

Consideriamo adesso un dominio Ω del piano che non contiene curve che circondano l'origine. Allora

$$u(r,\theta) = \theta\,, \tag{8.20}$$

con θ ristretto all'intervallo di valori appropriato (per il dominio, si veda la figura 8.7), definisce una funzione armonica in $\mathbb{R}^2$. Per esempio, se Ω è il semi-piano $x > 0$, si può prendere $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. In coordinate cartesiane la funzione armonica (8.20) è allora

$$u(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad 0 < x < \infty, \ -\infty < y < \infty \tag{8.21}$$

Se Ω è il semi-piano $y > 0$, si può prendere $0 < \theta < \pi$ e in coordinate cartesiane la corrispondente funzione armonica è

$$u(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \quad -\infty < x < \infty, \ 0 < y < \infty \tag{8.22}$$

Se Ω non contiene l'origine, come nell'anello in figura 8.4, tutte le funzioni in (8.19) sono armoniche in Ω. Se Ω contiene l'origine, solo le funzioni nella prima riga sono armoniche in Ω.

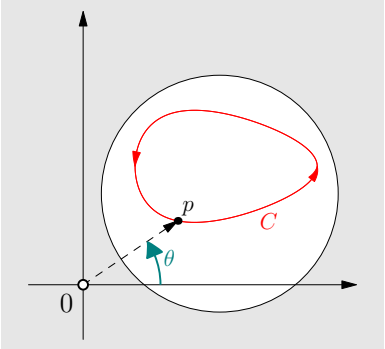


Figura 8.3: Dominio nel piano (disco bianco) che NON contiene curve che circondano l'origine.

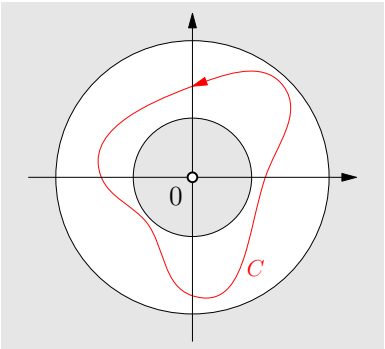


Figura 8.4: Dominio nel piano (anello bianco) che contiene una curva che circonda l'origine, ma NON contiene l'origine.

8.3 *Armoniche sferiche*

Adesso passiamo ad applicare il metodo di separazione delle variabili per trovare funzioni armoniche in $\mathbb{R}^3$. Sia

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Lambda_3 u = 0$$

l'equazione di Laplace in coordinate sferiche e cerchiamone una soluzione della forma

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)\,. \tag{8.23}$$

Procedendo come sopra, otteniamo la coppia di equazioni

$$(r^2R')' - \mu R = 0 \tag{8.24}$$

$$\Lambda_3 Y + \mu Y = 0\,, \tag{8.25}$$

La (8.24) è ancora un'equazione di Eulero-Cauchy, di cui due soluzioni linearmente indipendenti sono r^{α_1} , r^{α_2} , dove α_1 e α_2 sono radici dell'equazione $\alpha(\alpha+1) - \mu = 0$. L'equazione (8.25) è un'equazione alle derivate parziali che è considerabilmente più difficile risolvere. È utile considerare θ e ϕ come le coordinate di un un punto sulla sfera di raggio unitario $S(0,1)$ centrata nell'origine di $\mathbb{R}^3$. Invece di cercare di trovare tutte le soluzioni di (8.25), è spesso sufficiente conoscere solo le soluzione $Y(\theta,\phi)$ che sono differenziabili due volte e "ben definite" su tutto $S(0,1)$. Tali soluzioni devono essere periodiche in θ, con periodo 2π, e tali che ai poli NORD e SUD della sfera (cioè nei punti dove $\phi = 0$ e $\phi = \pi$) le soluzioni si avvicinano a dei limiti che sono indipendenti da θ. Si può dimostrare che l'equazione (8.25) ha

soluzioni non banali che soddisfano questa condizione solo quando μ è uno dei valori

$$\mu_n = n(n+1)\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8.26}$$

Per ciascuno di tali valori ci sono $2n+1$ soluzioni di (8.25) linearmente indipendenti che si denotano

$$Y_n^{(m)}(\theta, \phi), \quad m = 1, 2, \ldots 2n+1\,. \tag{8.27}$$

Queste soluzioni sono dette *armoniche sferiche di Laplace*. Per $\mu = \mu_n$, le corrispondenti funzioni radiali sono

$$r^n\,, \quad \frac{1}{r^{n+1}} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{8.28}$$

e le corrispondenti funzioni armoniche (8.23) sono

$$u_{n,m}(\theta, \phi) = \begin{cases} r^n Y_n^{(m)}(\theta, \phi), & m = 1, 2, \ldots 2n+1\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots \\ \dfrac{1}{r^{n+1}} Y_n^{(m)}(\theta, \phi), & m = 1, 2, \ldots 2n+1\,,\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{8.29}$$

Se Ω non contiene l'origine, tutte le funzioni nella (8.29) sono armoniche in Ω. Altrimenti, solo le funzioni della prima riga sono armoniche in Ω.

8.4 *Armoniche cilindriche*

Il metodo di separazione delle variabili si può applicare ad altre equazioni alle derivate parziali e si può usare per sistemi di coordinate diverse dalle polari o dalle sferiche.

Consideriamo per esempio l'equazione di Laplace in coordinate cilindriche:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0\,, \tag{8.30}$$

e cerchiamone soluzioni (reali) della forma

$$u(\rho, \phi, z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)\,. \tag{8.31}$$

Sostituendo (8.32) nella (8.30), e dividendo per u si ottiene

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

La parte "Z" di questa equazione deve essere uguale ad una costante reale k^2 e quindi Z deve essere una soluzione dell'equazione

$$Z'' - k^2 Z = 0\,. \tag{8.32}$$

Sostituendo k^2 nella (8.32), si ottiene

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho}\frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + k^2 = 0$$

Moltiplicando per ρ^2, si possono separare P e Φ introducendo un'altra costante n tale che $\Phi''/\Phi = -n^2$, ottenendo così la coppia di equazioni

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0 \tag{8.33}$$
$$\rho^2 P'' + \rho P' + (k^2\rho^2 - n^2)P = 0\,, \tag{8.34}$$

Se cerchiamo funzioni armoniche in una regione Ω dello spazio che contenga curve che circondano l'asse delle z, Φ deve essere periodica di periodo 2π e quindi n deve essere un intero non negativo. Allora, come per la Θ del piano, si ottiene

$$\Phi_n(\phi) = \cos n\phi\,,\ \ \sin n\phi\,, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{8.35}$$

L'equazione (8.34) ha la forma dell'*equazione di Bessel*

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - n^2)y = 0\,, \quad n \geq 0\,, \tag{8.36}$$

che, per cambiamento di variabili $\lambda x \to x$, assume la forma canonica

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0\,, \quad n \geq 0\,, \tag{8.37}$$

Si può dimostrare che la (8.37) ha due soluzioni linearmente indipendenti $J_n(x)$ e $Y_n(x)$. La soluzione $J_n(x)$ che ha limite finito per x tendente a 0, si chiama *funzione di Bessel di prima specie di ordine n*. La soluzione $Y_n(x)$ che non ha limite finito (è cioè illimitata) per x tendente a 0, si chiama *funzione di Bessel di seconda specie di ordine n* o *funzione di Neumann*.

8.5 *Trasformazioni di funzioni armoniche*

Nella sezioni precedenti abbiamo ottenuto collezioni di funzioni armoniche mediante il metodo di separazione delle variabili. Per il principio di sovrapposizione, tutte le combinazioni lineari di queste soluzioni sono ancora armoniche. In questa sezione mostriamo come ottenere nuove funzioni armoniche mediante trasformazioni dello spazio.

Sia $\mathbf{F}$ una trasformazione invertibile di $\mathbb{R}^n$ in se stesso. Per effetto di $\mathbf{F}$, un campo scalare $u = u(\mathbf{r})$ su $\mathbb{R}^n$ si trasforma nel campo scalare $u^\star(\mathbf{r}) = u(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{r})$, cioè

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}^\star = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \quad \Longrightarrow \quad u(\mathbf{r}) \to u^\star(\mathbf{r}) = u(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{r}) \tag{8.38}$$

Poiché il laplaciano è $\nabla \bullet \nabla$, si vede facilmente che se u è una funzione armonica e $\mathbf{F}$ è una qualunque trasformazione del gruppo euclideo, allora anche $u^\star(\mathbf{r}) = u(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{r})$ è armonica. Ricordiamo che le trasformazioni elementari del gruppo euclideo sono le traslazioni $\mathscr{T}_\mathbf{a} : \mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{a}$ e le rotazioni $\mathscr{R} : \mathbf{r} \to \mathscr{R}(\mathbf{r})$.

ESEMPIO 8.1. La funzione

$$u(x,y) = \ln r = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

è armonica in $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Allora la funzione ottenuta per traslazione $\mathscr{T}_{(x_0,y_0)} : (x,y) \to (x_0,y_0)$, cioè

$$u'(x,y) = \ln\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

è armonica in $\mathbb{R}^2$, fatta eccezione per il punto (x_0,y_0).

Usando la regola della derivata composta si vede facilmente che anche le trasformazioni di similitudine $\mathbf{r} \to \alpha\mathbf{r}$, per α costante reale diversa da zero, trasformano una funzione armonica in un'altra che è ancora armonica (esercizio).

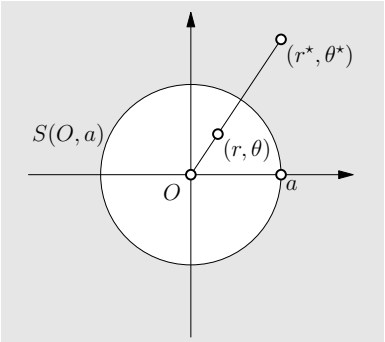


Figura 8.5: Inversione rispetto a un cerchio.

INVERSIONE RISPETTO A UN CERCHIO Consideriamo adesso una trasformazione molto utile che, per $\mathbb{R}^2$, è nota come inversione rispetto a un cerchio. Sia $S(0,a)$ un cerchio centrato nell'origine e di raggio a. In coordinate polari, i punti (r,θ) e $(r^\star,\theta^\star)$ sono detti *inversi* rispetto a $S(0,a)$ se

$$rr^\star = a^2\,, \quad \theta = \theta^\star\,, \tag{8.39}$$

quindi due punti inversi rispetto al cerchio stanno sulla stessa linea radiale. Allora la trasformazione

$$\mathcal{I}_a : r^\star = \frac{a^2}{r}\,, \quad \theta^\star = \theta\,, \tag{8.40}$$

è definita per tutti i punti del piano eccetto l'origine e trasforma punti fuori da $S(0,a)$ in punti dentro $S(0,a)$ e viceversa, mentre i punti che stanno su $S(0,a)$ sono lasciati invariati dalla trasformazione. Allora un dominio Ω che sta fuori da $S(0,a)$ è trasformato in un dominio $\Omega^\star$ che sta dentro $S(0,a)$ e *se u è armonica in Ω, allora $u^\star(\mathbf{r}) = u(\mathcal{I}_a^{-1}\mathbf{r})$ è armonica in $\Omega^\star$*. La dimostrazione di questo è lasciata come esercizio (si veda il problema 8.4). Si osservi che in coordinate polari si ha

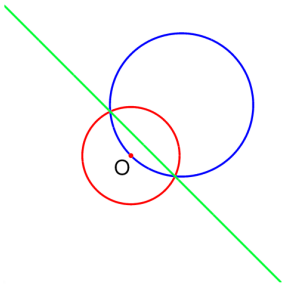
$$u^\star(r,\theta) = u\left(\frac{a^2}{r},\theta\right) \tag{8.41}$$

e in notazione vettoriale

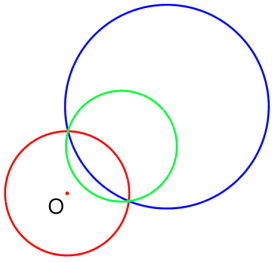
$$u^\star(\mathbf{r}) = u\left(\frac{a^2}{r^2}\mathbf{r}\right) \tag{8.42}$$

Figura 8.6: Strettamente collegata all'inversione rispetto ad un cerchio è l'anamorfosi in arte. La figura distrorta nel piano esterno al cerchio è ricostruita mediante uno specchio cilindrico. (dipinto di István Orosz).

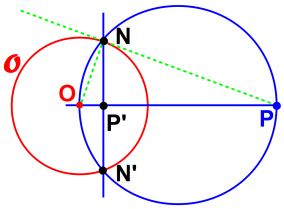
Alcune proprietà dell'inversione rispetto ad un cerchio



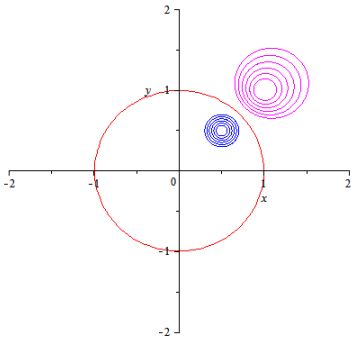
L'inverso, rispetto al cerchio rosso, di un cerchio che passa per O (blu) è una linea che non passa per O (verde) e viceversa.



L'inverso, rispetto al cerchio rosso, di un cerchio che non passa per O (blu) è un cerchio che non passa per O (verde) e viceversa).



Procedura per costruire l'inverso P' di un un punto P fuori dal cerchio di centro O e raggio a. Poiché i triangoli OPN e $OP'N$ sono simili, OP sta a a come a sta a OP'.



L'inversione rispetto ad un cerchio, NON trasforma il centro di un cerchio nel centro della sua immagine.

INVERSIONE RISPETTO A UNA SFERA È l'analogo in $\mathbb{R}^3$ di quanto descritto sopra. Sia $S(0,a)$la superficie di una sfera centrata nell'origine e di raggio a. In coordinate sferiche, i punti (r,θ,ϕ) e $(r^\star,\theta^\star,\phi^\star)$ sono detti *inversi* rispetto a $S(0,a)$ se

$$rr^\star = a^2\,, \quad \theta = \theta^\star\,, \quad \phi = \phi^\star\,, \tag{8.43}$$

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^3$ che non contiene l'origine e supponiamo che la funzione $u(r,\theta,\phi)$ sia armonica in Ω. Sia $\Omega^\star$ l'immagine di

Ω rispetto alla trasformazione (8.43) e sia $u^{\#}$ la funzione data dalla formula

$$u^{\#}(r,\theta,\phi) = \frac{a}{r}u^{\star}(r,\theta,\phi) = \frac{a}{r}u\left(\frac{a^2}{r},\theta,\phi\right). \tag{8.44}$$

Allora $u^{\#}$ è armonica in $\Omega^{\star}$. Anche la dimostrazione di questo è lasciata come esercizio (si veda il problema 8.5) Si osservi che in notazione vettoriale

$$u^{\#}(\mathbf{r}) = \frac{a}{r}u\left(\frac{a^2}{r^2}\mathbf{r}\right) \tag{8.45}$$

Esempio 8.2. La funzione

$$\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{8.46}$$

è armonica in $\mathbb{R}^2$ con un polo in $\mathbf{r}'$. L'inversione rispetto al cerchio $S(O,a)$ fornisce la funzione

$$\ln\left|\frac{a^2}{r^2}\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| = \ln\frac{a}{r} + \ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r}-\frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|. \tag{8.47}$$

Questa funzione è armonica in $\mathbb{R}^2$ eccetto per un polo nell'origine e un polo in $\mathbf{r} = (a^2/r')\mathbf{r}'$. Quindi la funzione

$$\ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r}-\frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|. \tag{8.48}$$

è armonica in $\mathbb{R}^2$ con un polo in $\mathbf{r} = (a^2/r'^2)\mathbf{r}'$. Si osservi che i poli di (8.46) e (8.48) sono inversi rispetto al cerchio $S(O,a)$. Se $r' < a$ allora il polo di (8.48) è fuori di $S(O,a)$ e quindi (8.48) è armonica dentro $S(O,a)$. Si veda la figura 8.5.

Si osservi che la differenza tra (8.46) e (8.48)

$$\ln|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - \ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r}-\frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|. \tag{8.49}$$

è una funzione armonica, fatta eccezione per i poli $\mathbf{r} = \mathbf{r}', (a^2/r'^2)\mathbf{r}'$, che si annulla per $r = a$, cioè sulla superficie del cerchio $S(O,a)$.

Esempio 8.3. La funzione

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{8.50}$$

è armonica in $\mathbb{R}^3$ con un polo in $\mathbf{r}'$. L'inversione rispetto a $S(O,a)$ fornisce la funzione

$$\frac{a/r}{|(a^2/r^2)\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|(a/r)\mathbf{r}-(r/a)\mathbf{r}'|}. \tag{8.51}$$

Questa funzione è armonica in $\mathbb{R}^3$ eccetto per un polo in $\mathbf{r} = (a^2/r')\mathbf{r}'$. I poli di (8.50) e (8.51) sono inversi rispetto alla sfera $S(O,a)$. Se $r' < a$ allora il polo di (8.51) è fuori di $S(O,a)$ e quindi (8.51) è armonica dentro $S(O,a)$.

Si osservi che la differenza tra (8.50) e (8.51)

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|(a/r)\mathbf{r} - (r/a)\mathbf{r}'|} \tag{8.52}$$

è una funzione armonica, eccetto per i poli $\mathbf{r} = \mathbf{r}', (a^2/r'2)\mathbf{r}'$, che si annulla per $r = a$, cioè sulla superficie della sfera $S(O, a)$.

8.6 *Proprietà generali delle funzioni armoniche*

Un'importante proprietà delle funzioni armoniche è espressa dal *teorema della media* (detto anche teorema della media di Gauss) che, per semplicità, formuliamo e dimostriamo a margine per $n = 3$.

Teorema della media. La media dei valori che una funzione armonica assume sulla superficie di una sfera qualsiasi è uguale al valore che la funzione assume al centro di tale sfera. (8.53)

Il teorema stabilisce dunque che se P, r e S sono rispettivamente centro, raggio e superficie della sfera considerata e $u(P)$ è il valore di u al centro di P, e se si pone

$$\overline{u}_S = \frac{1}{4\pi r^2}\int_S u\, dS\,, \tag{8.54}$$

allora $\overline{u}_S$ è indipendente da r e precisamente si ha $u(P) = \overline{u}_S$.

Un corollario notevole del teorema della media è che: *$u(P)$ è pure la media dei valori che u assume nei punti interni della sfera S.* Basta infatti supporre di calcolare tale media servendosi di strati sferici di spessore infinitesimo e concentrici alla sfera. Un altro corollario molto importante del teorema della media è il seguente:

Teorema del valore massimo e minimo. Una funzione armonica in una regione non può avere dentro tale regione punti di massimo e di minimo. (8.55)

Infatti, se nel punto P interno alla regione vi fosse, per esempio, un massimo, esisterebbe un intorno di P tale che in tutti i suoi punti sarebbe $u < u(P)$ e quindi per una sferetta di centro P interna ad esso si avrebbe $\overline{u}_S < u(P)$, contrariamente a quanto stabilisce il teorema della media. Il massimo e minimo dei valori di u dovranno dunque necessariamente trovarsi sul bordo della regione.

Dal corollario (8.55) e dalla continuità di u segue il teorema:

Se una funzione armonica ha un valore costante su tutta una superficie chiusa, allora ha quello stesso valore in tutto lo spazio interno ad essa. In particolare, se la funzione è nulla sul bordo di una regione, allora è nulla in in tutta la regione. (8.56)

Dimostrazione di (8.53). Consideriamo coordinate sferiche r, θ, ϕ centrate in P. Allora $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta d\phi$, per cui

$$\overline{u}_S = \frac{1}{4\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} u(r,\phi,\theta)\sin\theta d\theta d\phi$$

Questa quantità, fissato il punto P, risulterà funzione, al più, di r. Studiamo come varia questa funzione nella direzione radiale $\mathbf{n}$, il versore normale alla sfera, cioè studiamo la derivata direzionale $\nabla_{\mathbf{n}}$ di $\overline{u}_S$,

$$\nabla_{\mathbf{n}}\overline{u}_S \equiv \mathbf{n}\bullet\nabla\overline{u}_S = \int_S \nabla u\bullet\mathbf{n}\, dS$$

Detta V la sfera piena, $\partial V = S$, usando il teorema della divergenza otteniamo

$$\int_S \nabla u\bullet\mathbf{n}\, dS = \int_V \nabla\bullet\nabla u\, dV = \int_V \Delta u\, dV = 0$$

perché u è armonica. Allora $\overline{u}_S$ è una costante che non dipende dal raggio. Per determinare la costante, passiamo al limite $r \to 0$ nella (8.54) ottenendo così

$$\overline{u}_S = u(P),$$

che è quanto si voleva dimostrare. □

Dimostrazione di (8.56). Applicando la prima identità di Green (5.40) a $\psi = \phi = u$, si ottiene

$$\int_\Omega u\Delta u + (\nabla u)^2 dV = \int_{\partial\Omega}(u\nabla u)\bullet\mathbf{n}dS\,.$$

Da $\Delta u = 0$ in Ω segue che

$$\int_\Omega (\nabla u)^2\, dV = \int_{\partial\Omega} u\nabla u\bullet\mathbf{n}dS\,.$$

Se, ora, $u = 0$ su tutto il bordo $\partial\Omega$, il secondo integrale si annullerà e si avrà

$$\int_\Omega (\nabla u)^2\, dV = 0$$

e quindi, poiché la funzione integranda non può mai essere negativa,

$$\nabla u = 0 \quad \text{ossia} \quad u = \text{cost.} \quad (\text{in } \Omega)$$

□

Vista la grande importanza del teorema (8.56), ne diamo a margine un'altra dimostrazione che si presta meglio a generalizzazioni.

Per l'equazione di Laplace vale il seguente teorema di unicità:

> Se di una funzione armonica dentro una regione finita, si assegnano i valori sul bordo della regione, la funzione risulta univocamente determinata in tutta la regione. (8.57)

Il problema di determinare una funzione u armonica dentro la regione Ω, quando sono noti i valori che assume sul contorno di Ω, è un problema di Dirichlet. In altre parole, il problema è risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) = 0\,, & \mathbf{r} \in \Omega \\ u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\,, & \mathbf{r} \in \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{8.58}$$

Il teorema (8.57) ci dice che il problema non può ammettere più di una soluzione. Ben più difficile è dimostrare che esista una soluzione. In una lezione seguente si risolverà in maniera completa e rigorosa il problema di Dirichlet nel piano.

Servendosi della (8.58), è pure possibile dare un altro teorema di unicità:

> Se di una funzione u, armonica dentro una regione finita, si assegnano i valori della sua derivata normale sul bordo della regione, la funzione risulta determinata in tutta la regione a meno di una costante additiva arbitraria. (8.59)

Il problema di determinare una funzione armonica dentro una regione, quando sono noti i valori della sua derivata normale sul bordo, è un *problema di Neumann*.

Il senso dei due problemi risulta chiaro se si fa riferimento all'elettrostatica: il problema di Dirichlet equivale a determinare il potenziale elettrostatico in una regione di spazio priva di cariche quando è assegnato il potenziale sul bordo della regione: chiaramente la soluzione è unicamente determinata dai valori del potenziale sul bordo. Il problema di Neumann corrisponde a determinare il potenziale in una situazione analoga, quando però sul bordo (immaginiamo una superficie conduttrice) è assegnato il campo elettrico (che è normale alla superficie conduttrice). In questo caso, è chiaro che il potenziale è determinato a meno di una costante additiva arbitraria.

Dimostrazione di (8.57). Supponiamo che esistano due funzioni u_1 e u_2, regolari, armoniche dentro Ω e con lo stesso valore assegnato f sul bordo,

$$u_1|_{\partial\Omega} = u_2|_{\partial\Omega} = f\,.$$

Allora, poiché $\Delta u_1 = 0$ e $\Delta u_2 = 0$, anche la loro differenza $\psi = u_1 - u_2$ sarà armonica: sarà $\Delta\psi = 0$ dentro Ω e ψ si annullerà sul bordo. Per il teorema (8.56), $\psi = 0$, cioè $u_1 = u_2$, la soluzione è unica, che è quanto si voleva dimostrare. □

8.7 *Funzione di Green e metodo delle immagini*

Consideriamo adesso il seguente problema di elettrostatica. In una regione limitata dello spazio Ω, il cui bordo è un condutto-

re messo a terra, è posta una carica unitaria nel punto $\mathbf{r}'$. Qual è il potenziale$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ in tutti in punti $\mathbf{r}$ di Ω, $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ generato dalla carica unitaria posta in $\mathbf{r}'$?

La carica unitaria in $\mathbf{r}'$genera un potenziale coulombiano

$$\frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

e quindi induce una distribuzione di cariche sulla superficie conduttrice $\partial\Omega$. Le cariche indotte sulle superficie, a loro volta, generano un potenziale $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ che, ovviamente, dipende dalla posizione $\mathbf{r}'$ della carica unitaria (spostando la carica unitaria in Ω, cambia la distribuzione di cariche sul bordo e quindi il potenziale che esse generano). Allora, per linearità, si ha

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\,, \tag{8.60}$$

dove $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è una funzione armonica in tutti i punti di Ω. Poiché il bordo è collegato a terra, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si deve annullare per $\mathbf{r} \in \partial\Omega$. Allora $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è una funzione armonica in Ω, soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0\,, & \mathbf{r} \in \Omega \\ h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,, & \mathbf{r} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8.61}$$

per ogni $\mathbf{r}'$ in Ω.

La notevole rilevanza di questo problema di elettrostatica è chiarita da un teorema, dovuto a Green, che fornisce la seguente formula risolutiva, detta *formula di Green*, per il problema generale di Dirichlet (8.58),

$$u(\mathbf{r}') = -\int_{\partial\Omega} f(\mathbf{r})\nabla_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')dS\,, \tag{8.62}$$

dove ∇_n è la derivata normale, cioè la derivata nella direzione del versore $\mathbf{n}$ normale alla superficie rispetto alle variabili $\mathbf{r}$ di integrazione sul bordo. La dimostrazione della (8.62), per quanto non particolarmente difficile (purché si assuma che la soluzione u del problema (8.58) esista e sia $C^2(\overline{\Omega})$), è un po' laboriosa e la tralasceremo.

Dunque, se si sa risolvere il problema di elettrostatica sopra descritto, si si sa anche risolvere il problema generale di Dirichlet per l'equazione di Laplace. La funzione $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, che è nota come *funzione di Green per il problema di Dirichlet dell'equazione di Laplace in* Ω.

In generale, non è facile determinare la funzione di Green. La difficoltà del problema risulta evidente se si riflette sul s significato fisico di (8.61). Per determinare $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ occorre trovare la distribuzione delle cariche indotte e questo è in generale, un problema difficile.

Il *metodo delle immagini* permette di aggirare questo problema. Invece di vedere $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ come il potenziale generato dalle cariche

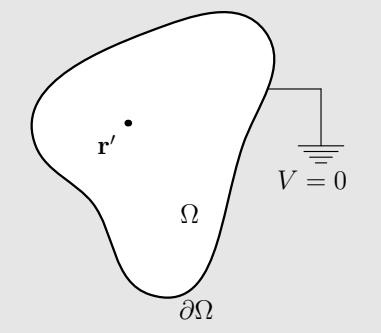


Figura 8.7: Regione Ω con bordo $\partial\Omega$ messo a terra e contenente una carica unitaria posta nel punto $\mathbf{r}'$.

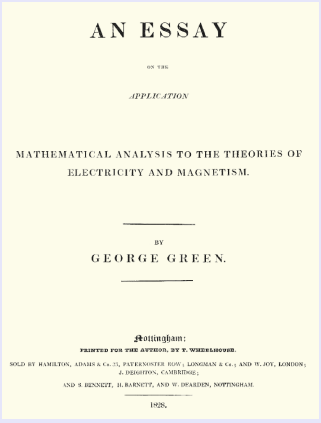
Convenzione sulle unità di misura e i fattori "π". Scelto un sistema d'assi in $\mathbf{r}'$, il potenziale della carica puntiforme è $V = 1/(4\pi r)$ a cui è associato il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{4\pi r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi r}\mathbf{e}_r = \frac{1}{4\pi r^2}\mathbf{e}_r\,.$$

Allora per il teorema di Gauss

$$Q = \oint \frac{1}{4\pi r^2}\mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi r^2}4\pi r^2 = 1$$

e quindi la carica è unitaria e positiva. (Stiamo lavorando con unità di misura in cui la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 è posta uguale a 1.)


AN ESSAY

ON THE

APPLICATION

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF ELECTRICITY AND MAGNETISM.

BY

GEORGE GREEN.

Nottingham:

PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.

SOLD BY HAMILTON, ADAMS & Co. 25, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & Co. AND W. JOY, LONDON; J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;

AND S. BENNETT, H. BARNETT, AND W. DEARDEN, NOTTINGHAM.

1828.

Prima pagina dell'articolo originale pubblicato da George Green (1793 – 1841) nel 1828 su ciò che oggi è noto come teorema di Green. Green fu tra i primi a creare una teoria matematica rigorosa per l'elettricità e il magnetismo. Fu un auto-didatta e frequentò soltanto, per non più di un anno, la scuola elementare. Visse nella città nativa vicino a Nottingham, in Inghilterra, dove il padre possedeva un mulino e faceva il panettiere.

indotte, possiamo consideralo come il potenziale dovuto a cariche immaginarie collocate nel complemento di Ω. Queste cariche, che sono chiamate *immagini elettrostatiche* della carica unitaria posta in $\mathbf{r}'$, vengono introdotte nel complemento di Ω in modo tale che il potenziale $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, dovuto a queste cariche, soddisfi il problema al contorno (8.61). In altre parole, in ogni punto del bordo $\partial\Omega$, il potenziale dovuto alle cariche immagine deve essere uguale in modulo e opposto in segno al potenziale dovuto alla carica unitaria in $\mathbf{r}'$. In questo modo si garantisce che il potenziale totale $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ si annulla sul bordo $\partial\Omega$, cosicché il bordo $\partial\Omega$ può essere visto come una superficie conduttrice messa a terra. In molti casi, la geometria di $\partial\Omega$ è abbastanza semplice che la scelta delle cariche immagine è ovvia.

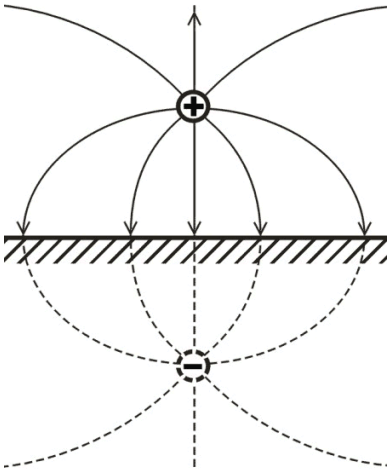


Figura 8.8: La carica negativa è l'immagine elettrostatica della carica positiva posta nel semispazio $z > 0$.

Esempio 8.4. Sia Ω il semispazio in $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{(x, y, z) : z > 0\}$ e si consideri una carica unitaria nel punto $(x'.y', z')$, come mostrato in figura. Se si introduce una carica negativa in $\mathbf{r}'^{\star} = (x', y', -z',)$ il potenziale risultante dovuto alle due cariche sarà 0 al bordo $z = 0$ di Ω. La risultante funzione di Green è

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'^{\star}|}$$

Altri problemi con bordo a geometria semplice sono lasciati come esercizi (si vedano i problemi alla fine del capitolo).

Concludiamo questa sezione enunciando il teorema di Green in due dimensioni.

Teorema di Green in $\mathbb{R}^2$. Sia Ω una regione di $\mathbb{R}^2$. La funzione

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \overline{\Omega}\ r \neq \mathbf{r}' \tag{8.63}$$

dove $h(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ soddisfa

$$\begin{cases} \Delta h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, & \mathbf{r} \in \Omega \\ h(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, & \mathbf{r} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{8.64}$$

per ogni $\mathbf{r}'$ in Ω, è è detta *funzione di Green per il problema di Dirichlet dell'equazione di Laplace in* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Il teorema di Green nel piano stabilisce che la soluzione $u(\mathbf{r})$ del problema (8.58) in $\mathbb{R}^2$ è data dalla formula di Green (8.62) con $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ definita dalle (8.63) e (8.64).

Convenzione sulle unità di misura e i fattori "π". Scelto un sistema d'assi in $\mathbf{r}'$, il potenziale della carica puntiforme *nel piano* è $V = 1/(2\pi)\ln(1/r) = -1/(2\pi)\ln r$ a cui è associato il campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}(-\frac{1}{2\pi} \ln r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln r \mathbf{e}_r = \frac{1}{2\pi r} \mathbf{e}_r .$$

Allora per il teorema di Gauss-Green nel piano

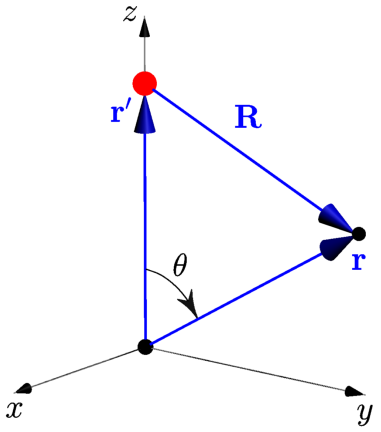
$$Q = \oint \frac{1}{2\pi r} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2\pi r} 2\pi r = 1$$

e quindi la carica è unitaria e positiva.

8.8 Polinomi di Legendre

Il potenziale V nel generico punto $\mathbf{r}$ dello spazio prodotto da una carica unitaria posta nel punto $\mathbf{r}' = (0, 0, r')$, è

$$V = \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r\cos\theta}}$$



Si raccolga r' a denominatore e per comodità si ponga

$$t \equiv \frac{r}{r'} \quad \text{e} \quad u \equiv \cos\theta\,.$$

Allora

$$V = \frac{1}{R} = \frac{1}{r'\sqrt{1+\frac{r^2}{r'^2}-2\frac{r}{r'}\cos\theta}} = \frac{1}{r'\sqrt{1-2ut+t^2}} \tag{8.65}$$

Il nostro scopo qui è di sviluppare V in serie di potenze di t. Dall'esercizio 4.3 sulla serie binomiale, per $z \to -z$ e $n = -1/2$, si ottiene

$$(1+z)^{-1/2} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

dove

$$c_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\,, \quad c_0 = 1$$

e raggio di convergenza $|z| < 1$. Quindi, se $\left|2ut+t^2\right| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = c_0 + c_1(2ut+t^2) + c_2(2ut+t^2)^2 + \ldots \tag{8.66}$$

Questa non è una serie di potenze di t, ma la si può rendere tale espandendo i binomi e raccogliendo le potenze di t, un processo che è giustificato se $|t| < |\sqrt{2}-1$. I coefficenti delle potenze di t sono adesso polinomi in u e possiamo scrivere il risultato come

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)t^n\,, \tag{8.67}$$

dove

$$P_0(u) = 1\,, \quad P_1(u) = u\,, \quad P_2(u) = \frac{1}{2}\left(3u^2-1\right) + \ldots \tag{8.68}$$

I coefficienti $P_n(u)$ sono detti *polinomi di Legendre* e sono dati dalla formula:

$$P_n(u) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}\left\{u^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}u^{n-4} - \ldots\right\} \tag{8.69}$$

Si osservi che $P_n(u)$ è di grado n e che contiene solo potenze alternate di u, cosicché *i polinomi di Legendre di grado pari sono funzioni pari di u e quelli di grado dispari sono funzioni dispari di u.*

I polinomi di Legendre hanno interessanti proprietà, la verifica delle quali è lasciata per esercizio (si vedano i problemi alla fine del capitolo):

(a) Soddisfano le relazioni di ricorrenza

$$(n+1)P_{n+1}(u) = (2n+1)uP_n(u) - nP_{n-1}(u) \tag{8.70}$$
$$uP'_n(u) - P'_{n-1}(u) = nP_n(u) \tag{8.71}$$

(b) Sono generati dalla formula,

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u^2-1)^n\right], \quad n = 0,1,2,3,\ldots, \tag{8.72}$$

detta *formula di Rodrigues*.

(c) Soddisfano l'equazione differenziale

$$(1-u^2)y'' - 2uy' + n(n+1)y = 0, \tag{8.73}$$

detta *equazione di Legendre*.

La funzione

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}}$$

è detta *funzione generatrice* dei polinomi di Legendre, nel senso ovvio espresso dalla (8.67).

I polinomi di Legendre possono essere calcolati in modi equivalenti. Un modo facile è in termini della formula di Rodrigues. I primi sei sono:

$$P_0 = 1 \qquad P_1 = u$$
$$P_2 = \frac{1}{2}(3u^2-1) \qquad P_3 = \frac{1}{2}(5u^3-3u)$$
$$P_4 = \frac{1}{8}(35u^4-30u^2+3) \qquad P_5 = \frac{1}{8}(63u^5-70u^3+15u).$$

L'equazione differenziale

$$(1-u^2)y'' - 2uy' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]y = 0. \tag{8.74}$$

è detta *equazione di Legendre associata*. Per $m = 0$ si riduce all'equazione di Legendre. La rilevanza della (8.74) per determinare le armoniche speriche di Laplace (8.27) è messa in luce dai problemi 8.10 e 8.11.

I polinomi di Legendre furono introdotti nel 1782 da Adrien-Marie Legendre. Legendre era interessato a stabilire la forma elissoidale esatta della Terra e il primo passo della sua ricerca era determinare il potenziale Newtoniano (8.65) in termine del quale poteva poi calcolare il potenziale gravitazionale associato ad una distribuzione di masse. Pochi mesi dopo , affrontando lo stesso problema, Laplace sviluppò la teoria delle armoniche sferiche.

Adrien-Marie Legendre (1752–1833) à stato un matematico francese. Tra i suoi contributi, lo studio delle funzioni e degli integrali ellittici e lo sviluppo della regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati. È noto per la trasformazione di Legendre, originariamente scoperta come trasformazione geometrica, che in seguito fu usata per passare dalla formulazione lagrangiana a quella hamiltoniana della meccanica e per ottenere l'entalpia e le energie libere di Helmoltz e Gibbs a partire dall'energia interna.

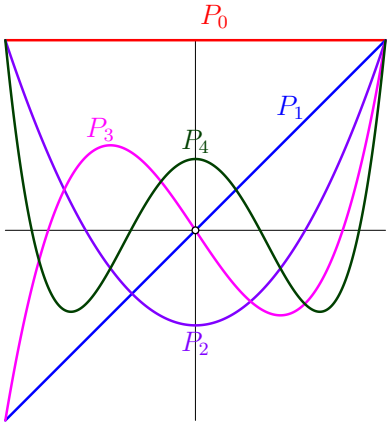
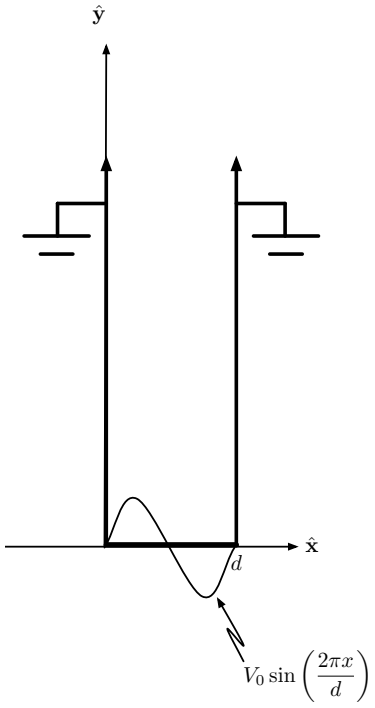


Figura 8.9: I primi quattro polinomi di Legendre nell'intervallo $[-1,1]$.

Problemi

Problema 8.1. □ Si considerino due piastre infinite a distanza d con un conduttore che collega le due piastre. Le due piastre sono messe a terra, mentre il conduttore che le collega è mantenuto al potenziale $V_0 \sin(2\pi x/d)$. Trovare il potenziale tra le due piastre.



Problema 8.2. □ Il bordo di una piastra circolare di raggio unitario è mantenuto alla temperatura costante

$$5 + 2\cos\theta + 5\sin 3\theta$$

dove θ è la variabile angolare in coordinate polari con origine nel centro della piastra. Trovare la distribuzione di temperatura a regime (cioè in condizioni stazionarie) in tutti i punti della piastra.

Problema 8.3. □ Usando il metodo di separazione delle variabili e il principio di sovrapposizione, risolvere l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

imponendo che $u(0,t) = u(3,t) = 0$ per tutti i $t > 0$, che per $t = 0$ si abbia

$$u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$$

e che la soluzione resti limitata per tutti i $t > 0$ cioè esiste una costante M tale che $|u(x,t)| < M$.

Problema 8.4. □ Usando la regola della derivata della funzione composta e la forma del laplaciano in coordinate polari, dimostrare che l'inversione rispetto a un cerchio in $\mathbb{R}^2$ preserva l'armonicità di una funzione.

Problema 8.5. □ Usando la regola della derivata della funzione composta e la forma del laplaciano in coordinate sferiche, dimostrare che la funzione u' definita dall'equazione (8.44) è armonica.

Problema 8.6. □ Trovare la funzione di Green per il quarto di spazio in $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \{(x,y,z) : y > 0, z > 0\}$$

Aiuto. Servono 3 cariche immagine, una negativa in $\mathbf{r}_1'^{\star} = (x', -y', z')$, una positiva in $\mathbf{r}_2'^{\star} = (x', -y', -z')$ e una negativa in $\mathbf{r}_3'^{\star} = (x', y', -z')$. Si verifichi, aiutandosi con un disegno che il potenziale risultante dovuto alle 4 cariche si annulla sul bordo di Ω.

Problema 8.7. □ Trovare la funzione di Green per la sfera piena in $\mathbb{R}^3$ di raggio a e centrata nell'origine,

$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}.$$

Problema 8.8. □ Trovare la funzione di Green per il disco unitario in $\mathbb{R}^2$ centrato nell'origine,

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Aiuto. Usare il corretto potenziale (logaritmico) di una carica in due dimensioni.

Problema 8.9. □ Usare il risultato del problema precedente e la (8.62) per ottenere la formula

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f(\phi)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \phi)} d\phi$$

per la soluzione del problema di Dirichlet nel disco unitario. Questa soluzione è detta *rappresentazione integrale di Poisson*.

PROBLEMA 8.10. □ Si consideri l'equazione (8.25) per $\mu = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\Lambda_3 Y + \mu Y = 0$$

in una regione di spazio che contiene l'origine. Mostrare che ha soluzioni della forma $Y = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ se Φ e Θ soddisfano le equazioni

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0, \tag{8.75}$$

(m costante) e

$$\sin\theta(\sin\theta\,\Theta')' + \left[n(n+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta = 0\,. \tag{8.76}$$

Spiegare perché m deve essere un intero.

PROBLEMA 8.11. □ Mostrare che, mediante cambiamento di variabili $u = \cos\theta$ nella (8.76), si ottiene la l'equazione di Legendre associata (8.74) per $\Theta(u)$.

PROBLEMA 8.12. □ Mostrare che se m è un intero e $y_n(u)$ è una soluzione dell'equazione di Legendre (8.73), allora

$$w_n^m = (1-u^2)^{m/2} y_n^{(m)}$$

è una soluzione dell'equazione di Legendre associata (8.74).

Aiuto. Tralasciando per semplicità indici e pedici, prima si determini l'equazione soddisfatta da

$$v = y^{(m)}\,.$$

Quindi si effettui la sostituzione

$$v = (1-u^2)^p w$$

e si trovi l'equazione soddisfatta da w. A Si osservi infine che per $p = -m/2$ l'equazione così ottenuta, dopo aver diviso per $1-u^2$, è proprio l'equazione di Legendre associata per $w = w(u)$. Ripristinando indici e pedici, $w = w_n^m$.

PROBLEMA 8.13. □ Usando la (8.66), convincersi che i primi tre polinomi di Legendre sono dati dalla (8.84). Usando lo stesso metodo, si proceda fino a calcolare i primi sei. Fatto questo, si dimostri che l'n-esimo polinomio di Legendre è dato dalla formula (8.69).

PROBLEMA 8.14. □ Usando la formula (8.67) che definisce i polinomi di Legendre (funzione generatrice), ottenere la relazione di ricorrenza (8.70).

Aiuto. Si derivino rispetto a t ambo i membri della (8.67), quindi si moltiplichino per $1-2ut+t^2$ ambo i membri dell'equazione ottenuta. Dopo aver fatto questo, si riutilizzi la (8.67) per ottenere un'uguaglianza tra serie di potenze in t. Infine, si usi il fatto che due serie sono uguali se i loro coefficienti sono uguali.

PROBLEMA 8.15. □ Ottenere la formula di ricorrenza (8.71).

PROBLEMA 8.16. □ Usando le formule di ricorrenza, dimostrare che i polinomi di Legendre sono soluzioni dell'equazione di Legendre.

PROBLEMA 8.17. □ Dimostrare la formula di Rodrigues (8.72).

Aiuto. Un modo è di partire dalla formula (8.69), integrandone ambo i membri n volte da 0 a u.

PROBLEMA 8.18. □ Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)t^n$$

converge a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}}$$

non solo per $|t| < |\sqrt{2}-1$, ma per tutti i $|t| < 1$.

PROBLEMA 8.19. □ Mediante il metodo si separazione delle variabili trovare i modi normali della corda vibrante, assumendo che lo scostamento verticale della corda $u = u(x,t)$ soddisfi l'equazione delle onde

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

e le condizioni al contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0\,.$$

Soluzioni

Problema 8.1. □ Nella regione di spazio indicata in figura deve valere l'equazione di Laplace per il potenziale u,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \tag{7.9}$$

Usando il metodo di separazione delle variabili, nell'esercizio 7.2 sono state trovate le soluzioni della forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$:

(1) $u = (ax+b)(cy+d)$.

(2) $u = (ae^{\alpha x} + be^{-\alpha x})(c\cos\alpha y + d\sin\alpha y)$, $\alpha \neq 0$.

(3) $u = (a\cos\alpha x + b\sin\alpha x)(ce^{\alpha y} + de^{-\alpha y})$, $\alpha \neq 0$.

Le (3) fanno al caso nostro. L'esponenziale crescente corrisponde ad una soluzione non fisica e quindi va scartata. Da un punto di vista matematico questo corrisponde alla condizione di limitatezza della soluzione,

$$|u(x,t)| \leq M\,.$$

L'annullamento della funzione per $x = 0$ ci permette di scartare anche il coseno. Il campo si restringe dunque alla ricerca di soluzioni del tipo

$$A\sin(\alpha x)ce^{-\alpha y}$$

(dove adesso la costante arbitraria A sta per bd). L'annullamento della funzione per $x = d$ è interessante perché ci dice che $\sin(\alpha x) = 0$, che è un vincolo sulle lunghezze d'onda permesse

$$\sin(\alpha d) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha d = n\pi\,.$$

Quindi le sole α permesse che soddisfano al condizione al contorno sono $\alpha = n\pi/d$, che è ancora una famiglia infinita, ma parametrizzata da un indice discreto. Dunque le possibili soluzioni sono

$$u_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\exp\left(-\frac{n\pi y}{d}\right)\,. \tag{8.77}$$

Invocando il principio di sovrapposizione, possiamo allora concludere che la soluzione dell'equazione di Laplace nel piano, che si annulla per $x = 0$ e $x = d$ è della forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right)\exp\left(-\frac{n\pi y}{d}\right)\,.$$

Se adesso teniamo conto della rimanente condizione al contorno del problema

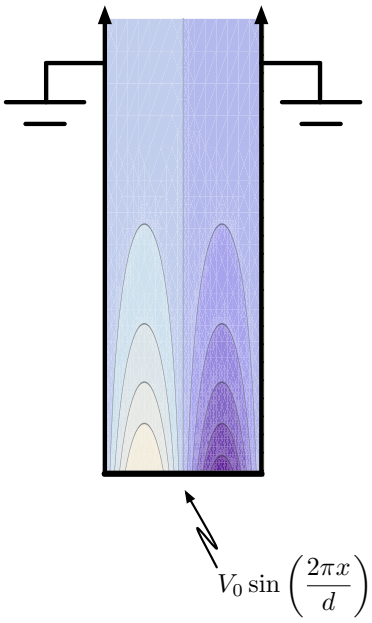
$$u(x,0) = V_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right)\,,$$

vediamo che nella (8.77) possiamo prendere $A_n = 0$ eccetto per $n = 2$ e quindi la soluzione cercata è

$$u = V_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{d}\right) \exp\left(-\frac{2\pi y}{d}\right) . \tag{8.78}$$

Riassumendo, la (8.78) è la soluzione del problema al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,, \quad 0 < x < d\,,\ y > 0 \\ u(x,0) = V_0 \sin\left(\dfrac{2\pi x}{d}\right)\ , \\ u(0,y) = 0\,, \quad u(d,y) = 0\,, \quad y > 0 \\ |u(x,t)| < M\,, \quad 0 < x < d\,,\ y > 0 \end{cases} \tag{8.79}$$



PROBLEMA 8.2. □ In condizioni stazionarie la temperatura T nella piastra è governata dall'equazione di Laplace

$$\Delta T = 0\,.$$

È dunque una funzione armonica, e quindi regolare nel disco unitario, inclusa l'origine. Il metodo di separazione delle variabili fornisce le funzioni armoniche della prima riga della (8.19):

$$1\,, \quad r^n \cos n\theta\,, \quad r^n \sin n\theta \quad n = 1, 2, 3 \ldots .$$

Se ne troviamo una combinazione lineare che soddisfa le desiderate condizioni al bordo, siamo a posto. Consideriamo la combinazione lineare

$$c_0 + \sum_n^N \left[a_n r^n cosn\theta + b_n r^n \sin n\theta\right] ,$$

con coefficienti arbitrari c_0, a_n, b_n, che al bordo $r = 1$ diventa

$$c_0 + \sum_n^N \left[a_n cosn\theta + b_n \sin n\theta\right] .$$

Imponiamo la condizione

$$c_0 + \sum_n^N \left[a_n cosn\theta + b_n \sin n\theta\right] = 5 + 2\cos\theta + 5\sin 3\theta\,,$$

A causa dell'indipendenza lineare della costante 1 e dei seni e coseni di n volte l'angolo, l'uguaglianza è verificata se e sole se i coefficienti di 1, $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$ sono uguali membro a membro. Si ottiene così

$$c_0 = 5, \quad a_1 = 2 \quad b_3 = 5$$

e pari a zero tutti gli altri coefficienti. Allora la soluzione dell'equazione di Laplace, che soddisfa le date condizioni al bordo, è

$$T(r,\theta) = 5 + 2r\cos\theta + 5r^3 \sin 3\theta\,.$$

Questa è la la distribuzione della temperatura a regime nella piastra

PROBLEMA 8.3. □ Poniamo $u = XT$. Allora $XT' = 2X''T$, cioè $X''/X = T'/(2T)$. Ogni membro deve essere una costante che chiamiamo $-\lambda^2$. (Se usassimo $+\lambda^2$, la soluzione che si otterrebbe non soddisferebbe la condizione di limitatezza, per λ reale). Quindi

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad T' + 2\lambda^2 T = 0$$

le cui soluzioni sono $X = A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x\,, \quad T = c_1 e^{-2\lambda^2 t}\,.$
Dunque una soluzione dell'equazione alle derivate parziali è

$$u(x,t) = XT = c_1 e^{-2\lambda^2 t}\,(A_1 \cos \lambda x + B_1 \sin \lambda x) = e^{-2\lambda^2 t}\,(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

Poiché $u(0,t) = 0$, deve essere $A = 0$. Quindi

$$u(x,t) = Be^{-2\lambda^2 t} \sin \lambda x\,.$$

Poiché $u(3,t) = 0$, deve essere $Be^{-\lambda^2 t} \sin 3\lambda = 0$. Se $B = 0$, la soluzione sarebbe identicamente nulla. Allora deve valere $\sin 3\lambda = 0$, cioè

$$3\lambda = m\pi\,, \quad \lambda = \frac{m\pi}{3} \quad \text{con} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

Per il principio di sovrapposizione,

$$u(x,t) = B_1 e^{-2m_1^2\pi^2 t/9} \sin \frac{m_1 \pi x}{3} + B_2 e^{-2m_2^2\pi^2 t/9} \sin \frac{m_2 \pi x}{3} + B_3 e^{-2m_3^2\pi^2 t/9} \sin \frac{m_3 \pi x}{3}$$

è una soluzione. Per l'ultima condizione al contorno, si deve avere

$$\begin{aligned} u(x,0) &= B_1 \sin \frac{m_1 \pi x}{3} + B_2 \sin \frac{m_2 \pi x}{3} + B_3 \sin \frac{m_3 \pi x}{3} \\ &= 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x + 2 \sin 10\pi x \end{aligned}$$

e questo è possibile solo se

$$B_1 = 5 \;\; m_1 = 12 \quad B_2 = -3 \;\; m_2 = 24\,, \;\; B_3 = 2\,, \;\; m_3 = 30\,.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione sopra per $u(x,t)$, si ottiene la soluzione richiesta

$$u(x,t) = 5e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 3e^{-128\pi^2 t} \sin 8\pi x + 2e^{-200\pi^2 t} \sin 10\pi x$$

PROBLEMA 8.4. □ Consideriamo il laplaciano nel piano

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

e determiniamo come si trasforma in conseguenza della trasformazione

$$r^\star = \frac{a^2}{r}\,, \quad r = \frac{a^2}{r^*} \qquad \theta^\star = \theta$$

Determiniamo i tre addendi del laplaciano separatamente. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r^\star}\frac{\partial r^\star}{\partial r} = \frac{-a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^\star} = \frac{-a^2 r^{*2}}{a^4}\frac{\partial}{\partial r^\star} = \frac{-r^{*2}}{a^2}\frac{\partial}{\partial r^\star}\,,$$

si ha

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{r^*}{a^2} \times \frac{-r^{*2}}{a^2}\frac{\partial}{\partial r^\star} = \frac{-r^{*3}}{a^3}\frac{\partial}{\partial r^\star}\,.$$

Per la derivata seconda, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{-r^{*2}}{a^2}\frac{\partial}{\partial r^\star}\left[\frac{-r^{*2}}{a^2}\frac{\partial}{\partial r^\star}\right] = \frac{r^{*2}}{a^4}\frac{\partial}{\partial r^\star}\left[r^{*2}\frac{\partial}{\partial r^\star}\right] \\ &= \frac{r^{*2}}{a^4}\left[2r^\star\frac{\partial}{\partial r^\star} + r^{*2}\frac{\partial^2}{\partial r^{\star 2}}\right] = \frac{2r^{*3}}{a^4}\frac{\partial}{\partial r^\star} + \frac{r^{*4}}{a^4}\frac{\partial^2}{\partial r^{\star 2}}\end{aligned}$$

Infine, per l'ultimo termine

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{r^{*2}}{a^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^{\star 2}}\,.$$

Allora, sommando i tre termini calcolati, otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\ &= \frac{2r^{*3}}{a^4}\frac{\partial}{\partial r^\star} + \frac{r^{*4}}{a^4}\frac{\partial^2}{\partial r^{\star 2}} + \frac{-r^{*3}}{a^4}\frac{\partial}{\partial r^\star} + \frac{r^{*2}}{a^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^{\star 2}} \\ &= \left(\frac{r^{*4}}{a^4}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial r^{\star 2}} + \frac{1}{r^\star}\frac{\partial}{\partial r^\star} + \frac{1}{r^{*2}}\frac{\partial^2}{\partial\theta^{\star 2}}\right] \\ &= \left(\frac{r^{*4}}{a^4}\right)\Delta^\star\end{aligned}$$

Quindi, per inversione rispetto al cerchio, il laplaciano si trasforma nel laplaciano nelle nuove variabili moltiplicato per il fattore di scala r^{*4}/a^4. Allora se $u(\mathbf{r})$ è armonica nelle variabili $\mathbf{r}$, anche $u^\star(\mathbf{r}^\star) = u(\mathbf{r})$ è armonica nelle variabili $\mathbf{r}^\star$, che è quello che si voleva dimostrare.

PROBLEMA 8.5. □ Analogo al precedente con una (lieve) difficoltà aggiuntiva.

PROBLEMA 8.6. □ Basta l'aiuto.

PROBLEMA 8.7. □ Analogo al successivo.

PROBLEMA 8.8. □ La funzione di Green cercata è la (8.49) (a meno di un cambiamento di segno, per aver una carica positiva unitaria in $\mathbf{r}'$)

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi}\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| + \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r} - \frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|. \tag{8.80}$$

Infatti, essa è una funzione armonica nel cerchio, fatta eccezione per il polo $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ (per $\mathbf{r}'$ dentro al cerchio, il polo immagine $\mathbf{r} = (a^2/r'^2)\mathbf{r}'$ è fuori dal cerchio), e si annulla per $r = a$, cioè sulla superficie del cerchio $S(O,a)$.

PROBLEMA 8.9. □ Dobbiamo calcolare la derivata normale $\nabla_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sul cerchio, dove $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ è data dalla (8.80). Usiamo coordinate polari

$$\mathbf{r} \leftrightarrow (r, \theta) \qquad \mathbf{r}' \leftrightarrow (r', \theta')$$

Allora

$$\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')$$

e

$$\left|\frac{a}{r}\mathbf{r} - \frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|^2 = a^2 + \frac{r^2 r'^2}{a^2} - 2rr' \cos(\theta - \theta') = \frac{1}{a^2}\left[a^4 + r^2 r'^2 - 2rr' a^2 \cos(\theta - \theta')\right]$$

La derivata normale è la derivata rispetto a r, calcolata sul cerchio. Calcoliamo le derivate rispetto a r dei due termini a secondo membro della (8.80):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \ln\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} \ln\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} \ln\left[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')\right] \\ &= \frac{r - r' \cos(\theta - \theta')}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r} - \frac{r}{a}\mathbf{r}'\right| &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} \ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r} - \frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|^2 = \frac{\partial}{\partial r} \ln\left[a^4 + r^2 r'^2 - 2rr' a^2 \cos(\theta - \theta')\right] \\ &= \frac{rr'^2 - 2r' a^2 \cos(\theta - \theta')}{a^4 + r^2 r'^2 - 2rr' a^2 \cos(\theta - \theta')}\end{aligned}$$

Sul cerchio, $r = a$ e quindi

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|\Big|_{r=a} = \frac{a - r' \cos(\theta - \theta')}{a^2 + r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln\left|\frac{a}{r}\mathbf{r} - \frac{r}{a}\mathbf{r}'\right|\Big|_{r=a} = \frac{ar'^2 - 2r' a^2 \cos(\theta - \theta')}{a^4 + a^2 r'^2 - 2r' a^3 \cos(\theta - \theta')} = \frac{1}{a}\frac{r'^2 - r' a \cos(\theta - \theta')}{a^2 + 2r'^2 - ar' \cos(\theta - \theta')}$$

Allora

$$\begin{aligned}\nabla_n G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\partial}{\partial r} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\Big|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi}\frac{a - r' \cos(\theta - \theta')}{a^2 + r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{a}\frac{r'^2 - r' a \cos(\theta - \theta')}{a^2 + 2r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')} \\ &= \frac{1}{2\pi a}\frac{-a^2 + r' a \cos(\theta - \theta') + r'^2 - r' a \cos(\theta - \theta')}{a^2 + 2r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')} \\ &= \frac{1}{2\pi a}\frac{r'^2 - a^2}{a^2 + 2r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')}\end{aligned}$$

Applichiamo adesso la formula di Green (8.62)

$$\begin{aligned}u(r', \theta') &= -\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{r'^2 - a^2}{a^2 + 2r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')} f(\theta)\, a\, d\theta \\ &= \frac{a^2 - r'^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{a^2 + 2r'^2 - 2ar' \cos(\theta - \theta')}\, d\theta\end{aligned}$$

A questo punto, è preferibile cambiare nome alle variabili e scrivere la rappresentazione integrale di Poisson per la funzione $u(r,\theta)$:

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\phi)}{a^2 + 2r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)}\, d\phi \tag{8.81}$$

Ovviamente, per $a = 1$ si ha la rappresentazione di Poisson per il disco unitario.

PROBLEMA 8.10. □ Risolviamo l'equazione

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y = 0$$

mediante separazione delle variabili, cioè poniamo $Y = \Theta\Phi$ e dividiamo per Y. Allora si ottiene

$$\frac{1}{\Theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + n(n+1) = 0$$

Moltiplichiamo per $\sin^2\theta$ e portiamo a secondo membro il termine dipendente da Φ,

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + +\mu\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

L'uguaglianza è possibile solo se entrambi i membri sono uguali ad una costante, diciamo m^2. Allora l'equazione originaria si separa nelle due equazioni

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \tag{8.75}$$

$$\sin\theta(\sin\theta\,\Theta')' + \left[n(n+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta = 0 \tag{8.76}$$

Poiché l'origine è contenuta nella regione di spazio, Φ deve essere ad "ad un sol valore", occorre che Φ sia periodica di periodo 2π, cioè deve soddisfare la condizione

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)\,.$$

e questo è possibile solo se m è un intero.

PROBLEMA 8.11. □ Poniamo nell'equazione (8.76) $u = \cos\theta$. Otteniamo

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{d\Theta}{du}\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d\Theta}{du}\,.$$

Pertanto

$$(\sin\theta\,\Theta') = -\sin^2\theta\frac{d\Theta}{du} = (u^2 - 1)\frac{d\Theta}{du}$$

dato che $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - u^2$. Ne segue che

$$\begin{aligned}(\sin\theta\,\Theta')' &= \frac{d}{d\theta}\left[(u^2-1)\frac{d\Theta}{du}\right] \\ &= \frac{d}{du}\left[(u^2-1)\frac{d\Theta}{du}\right]\frac{du}{d\theta} = \frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{d\Theta}{du}\right]\sin\theta\end{aligned}$$

Sostituendo nella (8.76), otteniamo

$$\sin^2\theta \frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{d\Theta}{du}\right] + \left[n(n+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta = 0$$

Dividendo per $\sin^2\theta = 1-u^2$,

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{d\Theta}{du}\right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta = 0$$

ovvero, sviluppando la prima derivata,

$$(1-u^2)\Theta' - 2u\Theta + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]\Theta = 0$$

che è proprio l'equazione di Legendre associata (8.74) per $\Theta(u)$.

PROBLEMA **8.12.** □ Consideriamo l'equazione di Legendre

$$(1-u^2)y'' - 2uy' + n(n+1)y = 0\,. \tag{8.73}$$

e deriviamo questa equazione m volte. Applicando la regola di calcolo della derivata m-esima di un prodotto,

$$(fg)^{(m)} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} f^{(k)} g^{(m-k)}\,, \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)}\,, \tag{8.82}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\left[(1-u^2)y''\right]^{(m)} &= (1-u^2)y''^{(m)} - 2muy''^{(m-1)} - m(m-1)y''^{(m-2)} \\
&= (1-u^2)y^{(m+2)} - 2muy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)} \\
\left[-2uy'\right]^{(m)} &= -2uy'^{(m)} - 2my'^{(m-1)} \\
&= -2uy^{(m+1)} - 2my^{(m)} \\
\left[n(n+1)y\right]^{(m)} &= n(n+1)y^{(m)}
\end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni ottenute nella (8.73) e ponendo $v = y^{(m)}$, si ottiene

$$(1-u^2)v'' - 2muv' - m(m-1)v - 2uv' - 2mv + n(n+1)v = 0\,,$$

ovvero

$$(1-u^2)v'' - 2(m+1)uv' + \left[(n(n+1) - m(m+1)\right]v = 0\,. \tag{8.83}$$

Nella (8.83) facciamo la sostituzione

$$v = (1-u^2)^p w$$

suggerita nell'"aiuto". Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda di v:

$$v' = -2\left(1-u^2\right)^{p-1} puw + \left(1-u^2\right)^p w'$$

e, per la (8.82),

$$\begin{aligned} v'' &= (1-u^2)^p w'' + 2\left[(1-u^2)^p\right]' w' + \left[(1-u^2)^p\right]'' w \\ &= (1-u^2)^p w'' + 2\left[-2\left(1-u^2\right)^{p-1} pu\right] w' \\ &+ \left[2p\left(2\left(1-u^2\right)^{p-2} pu^2 - \left(1-u^2\right)^{p-1} - 2\left(1-u^2\right)^{p-2} u^2\right)\right] w \end{aligned}$$

Moltiplichiamo v'' per $(1-u^2)$ e raccogliamo $(1-u^2)^p$

$$\begin{aligned} (1-u^2)v'' &= (1-u^2)^{p+1} w'' + 2\left[-2\left(1-u^2\right)^{p} pu\right] w' \\ &+ \left[2p\left(2\left(1-u^2\right)^{p-1} pu^2 - \left(1-u^2\right)^{p} - 2\left(1-u^2\right)^{p-1} u^2\right)\right] w \\ &= (1-u^2)^p \left\{(1-u^2)w'' - 4puw' + 2p\left[\frac{2pu^2-2u^2}{1-u^2} - 1\right] w\right\} \end{aligned}$$

Questo è come diventa il primo termine a primo membro della (8.83). Adesso calcoliamo il secondo termine, raccogliendo $(1-u^2)^p$,

$$\begin{aligned} -2(m+1)uv' &= -2(m+1)u\left[-2\left(1-u^2\right)^{p-1} puw + \left(1-u^2\right)^{p} w'\right] \\ &= (1-u^2)^p\left[\frac{4(m+1)pu^2w}{1-u^2} - 2(m+1)uw'\right] \end{aligned}$$

Infine, l'ultimo termine (8.83) è

$$\left[(n(n+1) - m(m-1)\right] v = (1-u^2)^p \left[(n(n+1) - m(m+1)\right] w$$

Sostituiamo le relazioni ottenute nella (8.83), dividendo per $(1-u^2)^p$ e raccogliamo i termini nelle derivate di w. In questo modo otteniamo

$$(1-u^2)w'' - 2u\left[2p+m+1\right]w' + \left[\frac{4p^2u^2 - 4pu^2 + 4(m+1)pu^2}{1-u^2} - 2p + n(n+1) - m(m+1)\right] w = 0$$

Questa equazione ha la forma dell'equazione di Legendre associata, se il termine in parentesi quadre nel coefficiente di w' è uguale 1 e se il coefficiente di w è

$$n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\,.$$

Per $p = 1/2$ entrambe le condizioni sono soddisfatte. Quindi $w = (1-u^2)^{-m/2} v$ soddisfa l'equazione di Legendre associata

$$(1-u^2)w'' - 2uw' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right] w = 0\,.$$

Essendo $v = y^{(m)}$, dove y è soluzione dell'equazione di Legendre, risulta così dimostrato che *se P_n è soluzione dell'equazione di Legendre, allora*

$$P_n^m = (1-u^2)^{-m/2} \frac{d^m P_n}{du^m}\,,$$

è soluzione dell'equazione di Legendre associata.

PROBLEMA 8.13. □ Provare e riprovare.

PROBLEMA 8.14. □ Consideriamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)t^n \,. \tag{8.67}$$

Derivando rispetto a t,

$$\frac{u-t}{(1-2ut+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(u)t^{n-1} \,. \tag{8.84}$$

Moltiplicando per $1-2ut+t^2$,

$$\frac{u-t}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-2ut+t^2)nP_n(u)t^{n-1} \,.$$

Ora, mediante la (8.67), il primo membro si può scrivere come $\sum_{n=0}^{\infty}(u-t)P_n(u)t^n$, per cui l'equazione precedente diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u-t)P_n(u)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-2ut+t^2)nP_n(u)t^{n-1}$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} uP_n(u)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(u)t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nuP_n(u)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(u)t^{n+1}$$

Uguagliando i coefficienti di t^n nei due membri, si ottiene

$$uP_n(u) - P_{n-1}(u) = (n+1)P_{n+1}(u) - 2nuP_n(u) + (n-1)P_{n-1}(u)$$

cioè

$$(n+1)P_{n+1}(u) = (2n+1)uP_n(u) - nP_{n-1}(u) \tag{8.70}$$

che è il risultato richiesto.

PROBLEMA 8.15. □ Deriviamo *rispetto a* u membro a membro l'equazione

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ut+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u)t^n \,. \tag{8.67}$$

Otteniamo

$$\frac{t}{(1-2ut+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(u)t^n$$

Procedendo adesso come nel problema precedente, si arriva a stabilire il risultato desiderato

$$uP_n'(u) - P_{n-1}'(u) = nP_n(u) \tag{8.71}$$

PROBLEMA **8.16.** □ Derivando membro a membro la (8.70), si ottiene

$$(n+1)P'_{n+1}(u) - (2n+1)P_n(u) - (2n+1)uP'_n(u) + nP'_{n-1}(u) = 0\,.$$

Eliminando P'_{n-1} mediante la (8.71), si ottiene, con n al posto di $n+1$,

$$P'_n(u) - uP'_{n-1}(u) = nP_{n-1}(u)$$

Eliminando nuovamente P'_{n-1} mediante la (8.71), si ottiene

$$(1-u^2)P'_n(u) + nuP_n(u) = nP_{n-1}(u)$$

Derivando quest'equazione, e usando ancora la (8.71) per eliminare P'_{n-1}, si ha l'equazione di Legendre

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)P'_n\right] + n(n+1)P_n = 0 \tag{8.85}$$

PROBLEMA **8.17.** □ Consideriamo

$$P_n(u) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}\left\{u^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}u^{n-4} - \ldots\right\}. \tag{8.69}$$

Integrando n volte tra 0 e u, otteniamo

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)!}\left\{u^{2n} - nu^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{2n-4} - \ldots\right\}$$

che si può riscrivere come

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}(u^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}(u^2-1)^n\,.$$

Il che dimostra la formula

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{du^n}\left[(u^2-1)^n\right], \quad n = 0,1,2,3,\ldots\,. \tag{8.72}$$

PROBLEMA **8.18.** □ Facile.

9
Polinomi omogenei e armoniche sferiche

Indice

9.1 ***Armoniche sferiche*** **189**

9.2 ***Polinomi omogenei*** **190**

9.3 ***Polinomi armonici omogenei*** **191**

9.4 ***Decomposizione in armoniche di un polinomio*** **193**

9.5 ***Armoniche sferiche e rotazioni*** **195**

9.6 ***Distribuzione di temperatura all'interno di un corpo sferico*** **196**

9.7 ***Armoniche sferiche e polinomi di Legendre*** **197**

9.1 *Armoniche sferiche*

Le armoniche sferiche di Laplace sono state definite come particolari soluzioni linearmente indipendenti di (8.25), ma questa caratterizzazione non è particolarmente illuminante. In questa sezione e nelle tre che seguono vogliamo mostrare che le armoniche sferiche sono una base naturale di polinomi sulla sfera per approssimare funzioni continue sulla sfera. Per stabilire questo fatto, dobbiamo capire meglio la relazione tra polinomi nello spazio e polinomi sulla sfera e, per fare questo, è utile fare un confronto con il cerchio.

Una funzione sul cerchio unitario, vista come funzione nel piano in cui il cerchio è immerso, è una funzione delle variabili x e y e ogni funzione continua in una regione finita del piano può essere approssimata da un polinomio nelle variabili x e y. Il cerchio unitario è esattamente l'insieme dei punti (x, y) in cui la somma dei quadrati di x, y è uguale a 1. Pertanto, le funzioni di x e y non sono indipendenti sul cerchio e quindi, se si approssima una funzione continua sul cerchio con un polinomio in x, y, lo stesso polinomio può assumere forme molte differenti in termini di x, y proprio a causa di questa

mancanza di indipendenza. Il polinomio $x^4 + y^4 + 2x^2y^2$ ha gli stessi valori sul cerchio unitario del polinomio $x^2 + y^2$, ambedue sono uguali a 1. Quindi quando si passa dal piano al cerchio diminuisce la dimensione dei polinomi linearmente indipendenti. Lo stesso vale per la sfera. La sfera unitaria è l'insieme di punti (x, y, z) in cui la somma dei quadrati di x, y e z è uguale a 1. Se si approssima una funzione continua sulla sfera con un polinomio in x, y e z, lo stesso polinomio può assumere forme molte differenti in termini di x, y e z, a causa di questa mancanza di indipendenza delle funzioni di x, y e z sulla sfera. Ad esempio, sulla la sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, i polinomi $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2$ e $x^2 + y^2 + z^2$ sono le stesse funzioni, dal momento che sono entrambi pari a 1 ovunque sulla sfera unitaria.

Il problema a cui ci troviamo di fronte è di *determinare un base di polinomi linearmente indipendenti sulla sfera o sul cerchio*. Per risolvere questo problema ci servono alcune nozioni di base.

9.2 *Polinomi omogenei*

Una funzione $p(x, y)$ sul piano è detta *omogenea di grado n* se $p(tx, ty) = t^n p(x, y)$. Una funzione omogenea è descrita in modo semplice usando coordinate polari: se $p_n(x, y)$ è omogenea di grado n, allora esiste una funzione $f_n(\theta)$ tale che

$$p_n(x, y) = r^n f_n(\theta)\,. \tag{9.1}$$

Infatti, se e $p_n(x, y)$ è omogenea di grado n, allora $p_n(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^n p_n(\cos\theta, \sin\theta)$, per definizione, e dunque

$$f_n(\theta) = p_n(\cos\theta, \sin\theta).$$

Una definizione analoga si può dare per funzioni sullo spazio (e più in generale per funzioni su $\mathbb{R}^d$). Una funzione $p(x, y, z)$ sullo spazio è detta *omogenea di grado n* se $p(tx, ty, tz) = t^n p(x, y, z)$. Usando coordinate sferiche, se ne ha una semplice rappresentazione: se $p_n(x, y, z)$ è omogenea di grado n, allora esiste una funzione $F_n(\theta, \phi)$ tale che

$$p_n(x, y, z) = r^n F_n(\theta, \phi)\,. \tag{9.2}$$

Infatti, se e $p_n(x, y, z)$ è omogenea di grado n, allora, per definizione,

$$\begin{aligned} p_n(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) &= r^n p_n(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \\ &\equiv r^n F_n(\theta, \phi). \end{aligned}$$

Chiaramente, un polinomio di grado n è la somma di polinomi omogenei di grado 0, 1, 2, ..., n. Per esempio, un polinomio di grado

3 nelle variabili x e y è della forma

$$\underbrace{\underbrace{ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2}_{\text{omogeneo di grado 3}} + \underbrace{ex^2 + fy^2 + gxy}_{\text{omogeneo di grado 2}} + \underbrace{hx + ly}_{\text{omogeneo di grado 1}} + \underbrace{m \cdot 1}_{\text{omogeneo di grado 0}}}_{\text{polinomio di grado 3}}$$

Quando passiamo dallo spazio o dal piano alla sfera o al cerchio, rispettivamente, la mancanza di indipendenza dovuta ai vincoli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ o $x^2 + y^2 = 1$, rispettivamente, ci costringe a "*buttare via*" del polinomi. Consideriamo, ad esempio, il passaggio dal piano al cerchio. Per il grado $n = 0$, il polinomio "1" sul piano va ovviamente bene anche sul cerchio. Per $n = 1$, x e y sono indipendenti e anche loro vanno bene sul cerchio. Ma quando arriviamo al grado 2, dobbiamo buttare via uno dei possibili candidati x^2, y^2 o xy, perché non sono indipendenti, dovendo valere $x^2 + y^2 = 1$.

Per arrivare alla regola generale per "buttare via" i polinomi indesiderati, ci serve introdurre la nozione di *polinomio armonico omogeneo*.

9.3 *Polinomi armonici omogenei*

Come è chiaro dal suo nome, un polinomio armonico omogeneo è un polinomio omogeneo che è soluzione dell'equazione di Laplace.

POLINOMI ARMONICI OMOGENEI NEL PIANO Applicando l'operatore di Laplace in coordinate polari

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

al generico polinomio omogeneo di grado n che, per la (9.1), è della forma $p_n(x, y) = r^n q_n(\theta)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta p_n(x, y) &= n(n-1)r^{n-2}q_n + \frac{1}{r}nr^{n-1} + \frac{1}{r^2}r^n\Theta'' \\ &= r^{n-2}(n^2 q_n + q_n'')\,.\end{aligned}$$

Un polinomio armonico omogeneo deve soddisfare l'equazione $\Delta p_n = 0$ e quindi per tale polinomio si deve avere $n^2 q_n + q_n'' = 0$. In altre parole, esso deve essere della forma $r^n\Theta_n(\theta)$, con Θ_n soluzione di

$$\Theta_n'' + n^2\Theta_n = 0 \tag{9.3}$$

Ricordando la definizione (8.2) del laplaciano circolare come $\Lambda_2 = \partial^2/\partial\theta^2$, si può riscrivere l'equazione sopra nella forma suggestiva $\Lambda_2\Theta_n + n^2\Theta_n = 0$.

POLINOMI ARMONICI OMOGENEI NELLO SPAZIO. Applicando l'operatore di Laplace in coordinate sferiche

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Lambda_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda_3$$

al generico polinomio omogeneo di grado n che, per la (9.2), è della forma $p_n(x,y,z) = r^n F_n(\theta,\phi)$, si ottiene

$$\begin{aligned}\Delta p_n(x,y) &= n(n-1)r^{n-2}F_n + \frac{2}{r}nr^{n-1} + \frac{1}{r^2}r^n\Lambda_3 F_n \\ &= r^{n-2}\left[n(n+1)F_n + \Lambda_3 F_n\right] .\end{aligned}$$

Quindi il polinomio è armonico se $\Lambda_3 F_n + n(n+1)F_n = 0$. In altre parole, un polinomio armonico omogeneo deve essere della forma $r^n Y_n(\theta,\phi)$, con Y_n soluzione di

$$\Lambda_3 Y_n + n(n+1)Y_n = 0 \tag{9.4}$$

I risultati ottenuti sono davvero interessanti e gettano luce sul significato delle equazioni che abbiamo ottenuto nel capitolo precedente risolvendo l'equazione di Laplace con il metodo di separazione delle variabili. L'equazione (9.3) coincide con la (8.12) per μ intero (che corrisponde a funzioni armoniche in regioni del piano contenenti l'origine, come in effetti sono i polinomi) e che adesso possiamo re-interpretare come l'*equazione che caratterizza i polinomi omogenei armonici nel piano*. I polinomi, infatti, per essere omogenei, devono essere della forma (9.1), e sono armonici se e solo se f_n è una soluzione di (9.3). Analogo discorso vale per la (8.25), che coincide con la (9.4) quando $\mu = n(n+1)$ (che è la condizione (8.26), di nuovo collegata a regioni dello spazio che contengono l'origine). Adesso possiamo re-interpretarla come l'*equazione che caratterizza i polinomi omogenei armonici nello spazio*: un polinomio omogeneo nello spazio (9.2) è armonico se e solo se F_n è soluzione di (9.4).

Le soluzioni della (9.4) sono chiamate *armoniche sferiche*. Per quanto l'equazione differenziale sia di una certa complessità, possiamo determinarne facilmente alcune soluzioni perché adesso sappiamo che cosa significano: *sono polinomi omogenei di grado n che soddisfano l'equazione di Laplace!* Per i primi tre gradi è in effetti molto facile indovinare le seguenti soluzioni

grado 0: 1

grado 1: x, y, z

grado 2: $x^2 - y^2$, $x^2 - z^2$, xy, xz, yz.

Essendo l'equazione (9.4) lineare e omogenea, è importante aver chiaro che non si determinano univocamente *le* soluzioni, ma una base di soluzioni linearmente indipendenti. Qualunque combinazione

lineare delle soluzioni che preservi l'indipendenza lineare è ancora una base per lo spazio delle soluzioni. Per esempio, qualunque trasformazione lineare invertibile del vettore (x, y, z) genera un vettore le cui componenti sono soluzioni linearmente indipendenti della (9.4) per $n = 1$.

Le soluzioni della (9.3) sono invece facili da trovare per integrazione diretta dell'equazione. Esse sono:

$$1\,, \quad \cos n\theta, \quad \sin n\theta\,, \quad n = 1, 2 \ldots\,.$$

In analogia con il caso tridimensionale, è molto naturale chiamarle *armoniche circolari* nel piano.

9.4 *Decomposizione in armoniche di un polinomio*

Vogliamo adesso stabilire l'importante risultato:

> Ogni polinomio di grado n nel piano o nello spazio, quando ristretto, rispettivamente al cerchio o alla sfera, può essere espresso come una somma di **polinomi armonici omogenei** di grado al più n. (9.5)

Per stabilire questo risultato, incominciamo col considerare l'azione del Laplaciano Δ sullo spazio $\mathcal{PO}_n$ da *tutti* i polinomi omogenei di grado n. I polinomi di grado n sono trasformati in polinomi di grado $n-2$, cioè Δ è un'applicazione lineare da $\mathcal{PO}_n$ a $\mathcal{PO}_{n-2}$,

$$\Delta : \mathcal{PO}_n \to \mathcal{PO}_{n-2}\,, \tag{9.6}$$

È abbastanza intuitivo, e non è difficile da dimostrare (esercizio), che in questo modo si ottengono *tutti* i polinomi omogenei di grado $n-2$ e quindi che Δ è un'applicazione surgettiva, cioè $\mathrm{Im}\,(\Delta) = \mathcal{PO}_{n-2}$ (stiamo assumendo che n sia almeno 2).

Tutti i polinomi omogenei $h_n \in \mathcal{PO}_n$ tali che $\Delta h_n = 0$ formano lo spazio $\mathrm{Ker}\,\Delta \equiv \mathcal{POA}_n$, cioè il sottospazio vettoriale di $\mathcal{PO}_n$ formato da tutti i polinomi omogenei armonici. Un generico elemento $p_n \in \mathcal{PO}_n$ può allora essere decomposto nella somma

$$p_n = h_n + r^2 p_{n-2}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2$ nel piano e $x^2 + y^2 + x^2$ nello spazio e $p_{n-2} \in \mathcal{PO}_{n-2}$. (L'osservazione cruciale è che $\Delta r^2 p_{n-2}$ non può annullarsi.) Iterando questa formula si ottiene

$$p_n = h_n + r^2(h_{n-2} + r^2 p_{n-4}) = h_n + r^2 h_{n-2} + r^4 p_{n-4}\,,$$

e iterando fino a n, si ottiene

$$p_n = h_n + r^2 h_{n-2} + r^4 h_{n-4} + \ldots \tag{9.7}$$

Se adesso restringiamo la formula ottenuta al cerchio o alla sfera, si ottiene

$$p_n = h_n + h_{n-2} + h_{n-4} + \dots \tag{9.8}$$

essendo sul cerchio o la sfera $r^2 = 1$. Il teorema (9.5) risulta così dimostrato.

Determiniamo adesso la dimensione di $\mathcal{POA}_n$. Poiché deve valere (vedere nota a margine a pag. 37)

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{PO}_n &= \dim\ (\text{Ker}\ \Delta) + \dim\ (\text{Im}\ \Delta) \\ &= \dim \mathcal{POA}_n + \dim \mathcal{PO}_{n-2}\end{aligned}$$

ne segue che

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{POA}_n = &\quad \text{dimensione dei polinomi omogenei di grado } n \\ &- \text{dimensione dei polinomi omogenei di grado } n-2\end{aligned}$$

Nel piano la dimensione dei polinomi omogenei di grado k è facile da calcolare. Consideriamo $x^j y^{k-j}$. Poiché j può assumere qualunque valore tra 0 e k, ci sono $k+1$ possibilità, e quindi la dimensione di dim $\mathcal{O}_k$ è $k+1$. Allora

$$\dim \mathcal{POA}_n = (k+1) - (k-1) = 2\,.$$

Ritroviamo così che, per ogni n, lo spazio delle soluzioni di (9.3) è bidimensionale. Una base in tale spazio, per $n > 1$, è data, come ben sappiamo, da $\cos nx$ e $\sin nx$.

Adesso passiamo allo spazio. La dimensione dei polinomi omogenei di grado k può essere calcolata considerando il monomio $x^j y^l z^m$: se x ha grado j, al minimo 0 e non più di k, allora y può avere un qualunque grado l da 0 a $k-j$, e il grado m di z risulta determinato dal fatto che il grado totale è k. Quindi

se x ha grado 0	ci sono (k+1) possibilità
se x ha grado 1	ci sono (k) possibilità
se x ha grado 2	ci sono (k-1) possibilità
...	...
se x ha grado k	c'è 1 possibilità

Così il numero totale di possibilità è la somma

$$(k+1) + k + (k-1) + \ldots + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Allora

$$\dim \mathcal{POA}_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)(n)}{2} = 2n+1$$

è la dimensione dei polinomi armonici omogenei di grado n, cioè il numero armoniche sferiche di grado n linearmente indipendenti. Risulta così stabilito che, per ogni n, lo spazio delle soluzioni di (9.3) ha dimensione $2n+1$.

9.5 *Armoniche sferiche e rotazioni*

La ragione per cui le armoniche sferiche o circolari si presentano in campi molto diversi tra loro, dalla sismologia alla fisica quantistica, a questo punto dovrebbe essere chiara. In tutti i problemi in cui si ha a che fare con funzioni sul cerchio o sulla sfera, le armoniche circolari o sferiche sono la base naturale di polinomi per approssimare tali funzioni. Uno dei risultati più antichi in questa direzione è il teorema di Weierstrass che stabilisce che qualunque funzione continua sul cerchio unitario può essere approssimata (uniformemente!) da un polinomio trigonometrico

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos k\theta \ + b_k \sin k\theta \right] . \tag{9.9}$$

Questa non è, tuttavia, la sola ragione che rende speciali le armoniche. Un'altra ragione è il loro comportamento rispetto alle rotazioni.

Quando si dice che seno e coseno sono "essenzialmente" la stessa funzione, si intende che si può passare dall'uno all'altro mediante una rotazione. Le formule trigonometriche elementari

$$\begin{aligned} \cos(n\theta - \alpha) &= (\cos\alpha)\cos n\theta + (\sin\alpha)\sin n\theta \\ \sin(n\theta - \alpha) &= (\cos\alpha)\sin n\theta - (\sin\alpha)\cos n\theta \end{aligned}$$

significano che per una rotazione del piano di un angolo α attorno all'origine, i vettori dello spazio delle armoniche circolari di grado n sono trasformati tra loro, ma lo spazio nel suo complesso è lasciato invariato. In altre parole, le rotazioni non mescolano armoniche circolari di grado differente.

Lo stesso vale per le armoniche sferiche. Nella sezione 8.5 abbiamo sottolineato che la rotazione di una funzione armonica è ancora una funzione armonica, intendendo per rotazione $\mathscr{R}$ della funzione armonica u la funzione

$$u^\star(\mathbf{r}) = u(\mathscr{R}^{-1}\mathbf{r}) .$$

Ora, se u è un'armonica sferica di grado n, cioè un polinomio armonico omogeneo di grado n, essendo $\mathscr{R}^{-1}$ una trasformazione lineare dei sui argomenti x, y, z, essa non può né trasformarlo in un polinomio non omogeneo né cambiarne il grado di omogeneità: se $u(tx, ty, tz) = t^n u(x, y, z)$, si avrà anche, necessariamente $u^\star(tx, ty, tz) = t^n u^\star(x, y, z)$. Quindi l'insieme delle armoniche sferiche di grado n è lasciato invariato dalle rotazioni, ovvero le rotazioni mescolano le armoniche sferiche di grado n tra di loro, ma non mescolano armoniche sferiche di grado differente.

Si può poi dimostrare (e questo è un teorema importante della teoria dei gruppi) che, in ogni spazio di armoniche sferiche di grado n,

al variare di $\mathscr{R}$ tra tutte le possibili rotazioni dello spazio tridimensionale, non ci sono sottospazi invarianti. Nella terminologia della teoria dei gruppi, questo si esprime dicendo che lo spazio delle armoniche sferiche di grado n realizza una rappresentazione irriducibile del gruppo delle rotazioni.

9.6 *Distribuzione di temperatura all'interno di un corpo sferico*

Adesso cambiamo registro e passiamo a qualcosa di pratico. Applichiamo la teoria delle armoniche sferiche per risolvere il seguente problema: determinare la distribuzione di temperatura d'equilibrio all'interno di un pianeta roccioso (come la Luna, cioè privo di sorgenti di calore interne), sapendo che la temperatura sulla sua superficie è mantenuta costantemente alla temperatura $\sin^2\theta$ (in unità di misura opportune).

Tradotto in termini matematici, il problema consiste nel trovare una funzione armonica nello spazio che valga $\sin^2\theta$ sulla superficie della sfera unitaria (avendo scelto come unità di lunghezza il raggio del pianeta). Poiché

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - r^2\cos^2\theta\Big|_{r=1} = 1 - z^2\Big|_{r=1} ,$$

occorre trovare una combinazione lineare di armoniche sferiche uguali a $1 - z^2$ sulla superficie della sfera.

Un insieme linearmente indipendente di armoniche sferiche di grado 2 è $x^2 - y^2$, $x^2 - z^2$, xy, xz, yz. È ovvio che non ci siano contributi dal grado 1, mentre ce ne sono dal grado zero. Cerchiamo allora una funzione armonica della forma

$$u = a + b(x^2 - y^2) + c(x^2 - z^2)$$

imponendo che

$$u|_{r=1} = a + b(x^2 - y^2) + c(x^2 - z^2)\Big|_{r=1} = 1 - z^2\Big|_{r=1} .$$

Sulla sfera $y^2 = 1 - x^2 - z^2$. Allora

$$a + b(2x^2 - 1 + z^2) + c(x^2 - z^2)\Big|_{r=1} = 1 - z^2\Big|_{r=1}$$

Affinché l'uguaglianza sia soddisfatta, deve valere

$$\begin{aligned} a - b &= 1 & & & b &= -1/3 \\ 2b + c &= 0 & \Longrightarrow & & c &= 2/3 \\ b - c &= -1 & & & a &= 2/3 \end{aligned}$$

Quindi

$$u = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(x^2 - y^2) + \frac{2}{3}(x^2 - z^2) = \frac{1}{3}(2 + x^2 + y^2 - 2z^2)$$

è la distribuzione di temperatura cercata. Passando a coordinate sferiche,

$$u = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r^2\left(\sin^2\theta - 2\cos^2\theta\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}r^2 - r^2\cos^2\theta \tag{9.10}$$

Si osservi che il teorema della media è verificato. Infatti, dalla (9.10) segue che la temperatura al centro è $2/3$ e il calcolo della media di $\sin^2\theta$ sulla superficie della sfera fornisce

$$\begin{aligned}\overline{u}_S &= \frac{1}{4\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left[\sin^2\theta\right]\sin\theta d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{4\pi}(2\pi)\int_{\theta=0}^{\pi}\sin^3\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{3\cos\theta}{4} + \frac{\cos 3\theta}{12}\right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

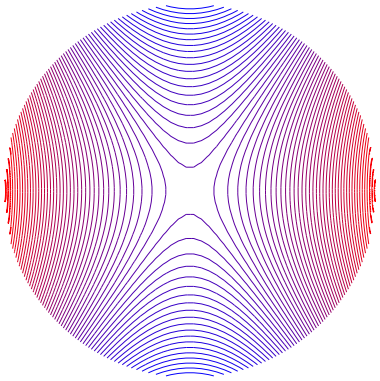


Figura 9.1: Distribuzione di temperatura dentro la sfera. In figura sono rappresentate le superfici isoterme in una sezione della sfera.

9.7 *Armoniche sferiche e polinomi di Legendre*

Per risolvere problemi più complicati del precedente, serve un algoritmo sistematico per generare le armoniche sferiche. Un algoritmo di questo tipo emerge dai problemi finali del capitolo precedente.

Per il problema 8.10, $Y = \Theta_n^m(\theta)\Phi_m(\phi)$ è un'armonica sferica se

$$\Phi_m'' + m^2\Phi_m = 0, \tag{8.75}$$

dove m è un intero, e se

$$\sin\theta(\sin\theta\,\Theta_n^{m\prime})' + \left[n(n+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta_n^m = 0\,. \tag{8.76}$$

Dal problema 8.11 segue che

$$\Theta_n^m(\theta) = P_n^m(\cos\theta) \tag{9.11}$$

dove $P_n^m(u)$ sono le funzioni di Legendre associate. Per il problema 8.12, le P_n^m sono date la formula

$$P_n^m = (1-u^2)^{m/2}\frac{d^m P_n}{du^m} \tag{9.12}$$

dove P_n è il polinomio di Legendre di grado n. Si osservi che la (9.12) produce polinomi indipendenti per $0 \le m \le n$.

Poiché le soluzioni linearmente indipendenti di (8.75) sono $\cos m\phi$ e $\sin m\phi$, per un dato n, otteniamo le seguenti formule per un insieme di armoniche sferiche linearmente indipendenti:

$$Y_n^m = P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n \tag{9.13}$$

$$\tilde{Y}_n^m = P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{9.14}$$

Questo insieme contiene $2n+1$ elementi, che è proprio la dimensione delle armoniche sferiche linearmente indipendenti di grado n.

Se adesso combiniamo la formula di Rodrigues (8.72), riscritta raccogliendo $(-1)^n$,

$$P_n(u) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} \left[(1-u^2)^n \right] , \tag{9.15}$$

con la (9.12), otteniamo

$$P_n^m(u) = (-1)^n \frac{(1-u^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{du^{m+n}} \left[(1-u^2)^n \right] , \tag{9.16}$$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Ecco una lista dei primi P_n^m calcolati direttamente dalla (9.16):

$P_0^0 = 1$
$P_1^0 = u$ $\quad P_1^1 = \sqrt{1-u^2}$
$P_2^0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u^2$ $\quad P_2^1 = 3u\sqrt{1-u^2}$ $\quad P_2^2 = 3(1-u^2)$
$P_3^0 = -\frac{3}{2}u + \frac{5}{2}u^3$ $\quad P_3^1 = (-\frac{3}{2} + \frac{15}{2}u^2)\sqrt{1-u^2}$ $\quad P_3^2 = 15u(1-u^2)$ $\quad P_3^3 = 15(1-u^2)^{3/2}$
$P_4^0 = \frac{3}{8} - \frac{15}{4}u^2 + \frac{35}{8}u^4$ $\quad P_4^1 = \left(-\frac{15}{2} + \frac{35}{2}u^2\right)\sqrt{1-u^2}$ $\quad P_4^2 = \left(-\frac{15}{2} + \frac{105}{2}u^2\right)(1-u^2)$ $\quad P_4^3 = 105u(1-u^2)^{3/2}$ $\quad P_4^4 = 105(1-u^2)^2$

Quando si sostituiscono i $P_n^m(\cos\theta$ nelle (9.13) e (9.14) si determina esplicitamente una base di armoniche sferiche. Questo è l'algoritmo che cercavamo.

Concludiamo con alcune osservazioni

- Nelle applicazioni, specialmente alla meccanica quantistica, si considerano le armoniche sferiche complesse

  $$\mathcal{Y}_n^m = Y_n^m + i\tilde{Y}_n^m = P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\theta} , \quad -n \le m \le n \tag{9.17}$$

  Sovente, si passa da queste funzioni alle corrispondenti funzioni il cui quadrato integrato sulla sfera è uguale a 1. Le funzioni così definite differiscono da quelle qui considerate per dei fattori moltiplicativi (dipendenti da n e m).

- L'equazione (9.4) , se riscritta come

  $$-\Lambda_3 Y_n = n(n+1) Y_n , \tag{9.18}$$

  rende manifesto che le Y_n^m e le $\tilde{Y}_n^m$ sono autovettori di

  $$-\Lambda_3 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

  con autovalori $n(n+1)$. Lo stesso dicasi per le $\mathcal{Y}_n^m$.

- In meccanica quantistica, l'operatore differenziale $-\Lambda_3$ è associato al "quadrato del momento angolare orbitale".

10
Delta di Dirac, convoluzioni e nuclei

Indice

10.1 ***La delta di Dirac o funzione impulso*** 199
10.2 ***La delta in più dimensioni*** 203
10.3 ***Prodotto di convoluzione*** 204
10.4 ***Il nucleo di Poisson e il pettine di Dirac*** 205
10.5 ***Convergenza uniforme del nucleo di Poisson*** 206
10.6 ***Il nucleo di Dirichlet e il lemma di Riemann-Lebesgue*** 207
10.7 ***Funzioni generalizzate**** 209
PROBLEMI 213
SOLUZIONI 214

10.1 La delta di Dirac o funzione impulso

La "funzione delta" $\delta(x)$ o funzione impulso fu introdotta da Dirac in maniera paradossale, come una "funzione" uguale a zero per $x \neq 0$ e con la proprietà che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx = F(0) \tag{10.1}$$

per una funzione continua $F(x)$. Ma nessuna funzione nel senso ordinario può avere questa proprietà! Si può tuttavia immaginare, come illustrato in figura 10.1, una successione di funzioni $\delta_n(x)$ che hanno picchi sempre più alti e diventano sempre più strette in $x = 0$, mantenendo costante e pari a 1 l'area sotto la curva, con il valore della funzione che tende a zero in ogni punto, eccetto nello zero, dove tende all'infinito. Queste funzioni sono dette *approssimanti della delta*. Nel limite,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)F(x)dx = F(0) \tag{10.2}$$

e la scrittura (10.1) va intesa come una notazione abbreviata della (10.2), cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)F(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x)F(x)dx\,. \tag{10.3}$$

dove $F(x)$ è una qualunque funzione continua, detta *funzione di prova*. Le funzioni δ_n sono dunque da intendersi come "approssimanti" per il processo di limite e non per la $\delta(x)$, che come funzione non esiste.

È facile trovare esempi di funzioni δ_n che soddisfano la (10.2) e la condizione di area totale sottesa pari a 1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) = 1 \tag{10.4}$$

L'esempio più semplice è quello delle "funzioni a cappello" mostrato in figura 10.1:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & -\dfrac{1}{2n} \le x \le \dfrac{1}{2n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10.5}$$

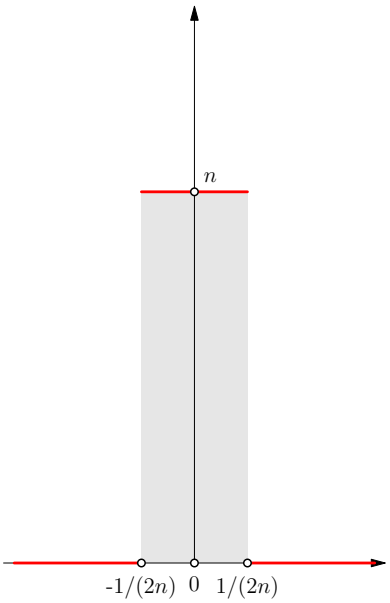


Figura 10.1: Approssimanti della delta al tendere di n a all'infinito.

È geometricamente evidente dalla figura che per valori molto grandi di n l'altezza della regione in grigio cresce enormemente mentre la larghezza diminuisce in modo tale che l'area della regione è sempre uguale a 1. È altrettanto evidente che se F è una funzione continua

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t)F(x)dx &= \lim_{n\to\infty} n \int_{-1/(2n)}^{1/(2n)} F(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-1/2}^{1/2} F\left(\frac{u}{n}\right) du \\ &= \lim_{n\to\infty} F\left(\frac{\xi}{n}\right) = F(0)\,, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è applicato il teorema del valor medio per gli integrali e nell'ultimo si è usata la continuità di F. Si osservi che avremmo potuto anche usare un parametro continuo e considerare le approssimanti

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & -\dfrac{1}{2}\epsilon \le x \le \dfrac{1}{2}\epsilon \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{10.6}$$

e prendere poi il limite $\epsilon \to 0$.

Un altro esempio comune di approssimanti della delta è dato dalle gaussiane

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{10.7}$$

Vale la (10.4): l'area sotto queste curve è unitaria, in quanto $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$. Inoltre, al crescere di n, le gaussiane diventano sempre più strette e più piccate nello zero, come mostrato nella figura 10.2 e la (10.2)

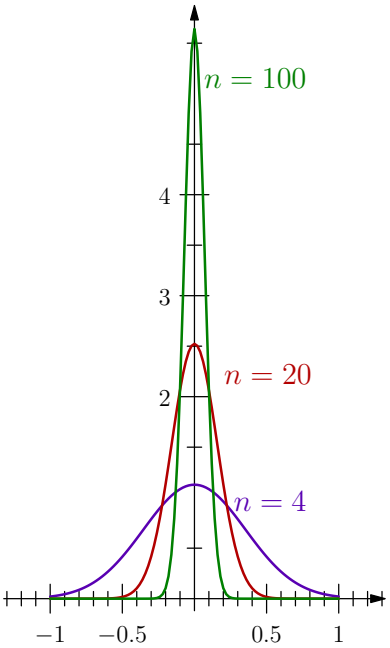


Figura 10.2: Approssimanti gaussiane della delta di larghezza $1/n$, per $n = 4, 20, 100$.

risulta verificata: sia $F(x)$ continua e limitata. Allora

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}F(x)dx - F(0)\right| &= \left|\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\left(F(x)-F(0)\right)dx\right| \\ &\leq \sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nx^2}\left|F(x)-F(0)\right|dx \\ &= \sqrt{\frac{1}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\left|F\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)-F(0)\right|du\ .\end{aligned}$$

Poiché F è continua, in particolare nello zero, e l'integrale assolutamente convergente, il secondo membro dell'ultima equazione tende a zero per $n \to \infty$ e la (10.2) risulta così stabilita.

ALTRE FORMULE PER LA DELTA:

$$\delta(x) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2} \tag{10.8}$$

$$\delta(x) = \lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}e^{\frac{-x^2}{2\gamma^2}} \tag{10.9}$$

Naturalmente, queste formule vanno intese nello stesso senso della (10.2), cioè come formule abbreviate; ad esempio la seconda significa

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}e^{\frac{-x^2}{2\gamma^2}}F(x)dx = F(0)\,.$$

per F funzione di prova continua.

LA DELTA PUÒ ESSERE DERIVATA. La derivata prima $\delta'(x)$ è definita dal processo di limite

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)F(x) \equiv \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n'(x)F(x)dx\,. \tag{10.10}$$

Se adesso si assume che la funzione di prova $F(x)$ sia derivabile con derivata prima continua, mediante integrazione per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n'(x)F(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\delta_n(x)F(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x)F'(x)dx \\ &= 0 - F'(0) = -F'(0)\,,\end{aligned}$$

Il contributo di bordo è infatti nullo (sia per le funzioni a cappello sia per le gaussiane). Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)F(x)dx = -F'(0) \tag{10.11}$$

Si osservi che avremmo ottenuto lo stesso risultato se avessimo trattato la delta come una funzione ordinaria e applicato direttamente le regole dell'integrazione per parti,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)F(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)F'(x) = -F'(0)\,.$$

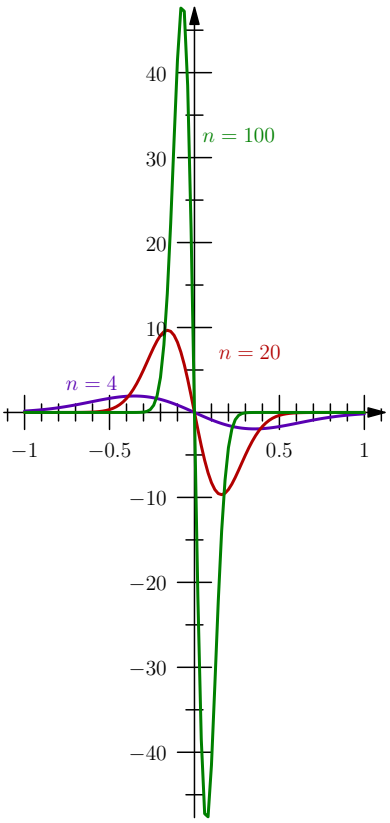


Figura 10.3: Derivate delle approssimanti gaussiane della delta $\delta_n'(x) = -2nx\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}$, per $n = 4, 20, 100$. La figura sopra rende evidente che, per n grande, $\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n'(x)F(x)dx \approx \frac{F(x-h)-F(x+h)}{2h} \approx -F'(0)$.

In modo analogo si dimostra che se F è continuamente derivabile n volte, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x)F(x)dx = (-1)^n F^{(n)}(0) \tag{10.12}$$

Fisicamente, la delta può essere vista come una distribuzione di carica sull'asse delle x che corrisponde ad una carica puntiforme uniforme nell'origine e la sua derivata come un *dipolo* orientato nel verso negativo dell'asse delle x. Infatti, dalla (10.11), per $F = x$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)x dx = -1$$

La delta e le sue derivate corrispondono dunque a idealizzazioni fisiche familiari.

La delta può essere integrata. L'integrale della delta tra $-\infty$ e x è

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \tag{10.13}$$

dove u è la *funzione di Heaviside*, detta anche *funzione a scalino unitario*. Questo si vede immediatamente usando le funzioni a cappello (10.5) il cui integrale è mostrato in figura 10.4. Si osservi che si arriva allo stesso risultato se si usano le approssimanti gaussiane. In questo caso si ha, ovviamente, una differente successione di approssimanti della funzione scalino:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-ny^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{n}x} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\mathrm{erf}(\sqrt{n}x)\,,$$

dove $\mathrm{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ è la funzione degli errori.

È importante aver chiaro che la (10.13) non va intesa in senso puntuale, ma nello stesso senso delle (10.3) e (10.10),

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)F(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x)F(x)dx\,. \tag{10.14}$$

Questa relazione va intesa come una definizione di u come integrale della delta. Poiché il limite delle u_n è definito sotto il segno di integrale, il valore della u nello zero non è determinato (a volte gli si assegna il valore convenzionale di $1/2$). Questo perché se di una funzione si cambia il valore in un punto (o in insieme numerabile di punti) il valore dell'integrale della funzione non cambia.

Un altro modo di esprimere lo stesso fatto è

$$\delta(x) = u'(x)\,. \tag{10.15}$$

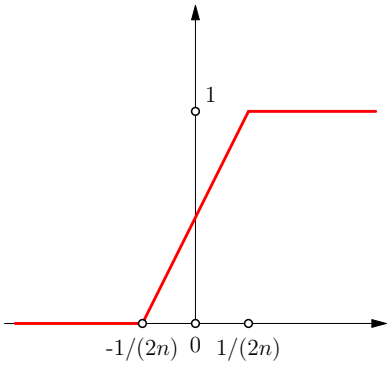


Figura 10.4: Integrale delle funzioni a cappello.

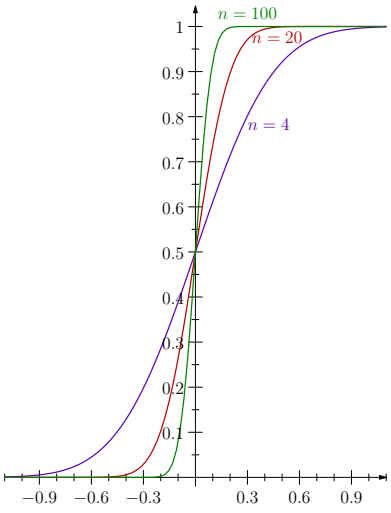


Figura 10.5: Integrali delle approssimanti gaussiane della delta per $n = 4, 20, 100$.

dove la derivata $u'(x)$ va sempre intesa nel senso del limite

$$\int_{-\infty}^{\infty} u'(x)F(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_n'(x)F(x)dx\,. \tag{10.16}$$

La delta può essere traslata. Per cambiamento di variabili nelle approssimanti, si vede facilmente che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)F(x)dx = F(a)\,, \quad a \in \mathbb{R} \tag{10.17}$$

La delta può essere manipolata come se fosse una funzione. Nei calcoli risulti utile trattare la delta come se fosse davvero una funzione. Per esempio, la (10.17) si dimostra direttamente per cambiamento di variabili:

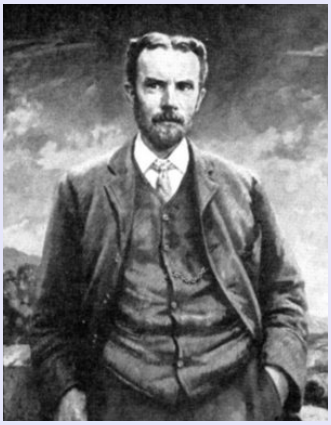
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)F(u+a)du = F(a)$$

Lo stesso vale per la (10.13): l'area tra la delta e l'asse delle x vale 0 finché non si passa lo 0, dopo di che vale costantemente 1. Inoltre, come abbiamo già osservato, la (10.11) segue immediatamente per integrazione per parti e lo stesso dicasi della (10.12). La cautela è comunque d'obbligo: quando si è in dubbio se una regola formale delle funzioni si applichi alla delta, conviene ritornare alla sua caratterizzazione in termini di approssimanti.

La delta in $\mathbb{R}^+$. Se la variabile indipendente è in $\mathbb{R}^+$ (come, ad esempio, la coordinata radiale in coordinate polari o sferiche), è conveniente definire la delta nello zero come limite da valori positivi, cioè

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0+} \delta(x-\epsilon) \tag{10.18}$$

Il limite va inteso come limite delle approssimanti (si veda la figura 10.6).



Oliver Heaviside (1850–1925) è stato un ingegnere elettrico, fisico e matematico inglese autodidatta. Spesso in urto con l'establishment scientifico nel suo tempo, ha contribuito a sviluppare molti dei metodi che usiamo ancora oggi: ha introdotto i numeri complessi per studiare i circuiti elettrici, ha inventato il metodo delle trasformate di Laplace per risolvere le equazioni differenziali lineari; indipendentemente da Gibbs, ha introdotto le notazioni moderne di calcolo vettoriale; ha riformulato le equazioni di Maxwell nel modo in cui oggi le conosciamo in termini degli operatori vettoriali rotore e divergenza; i termini ammettenza , conduttanza, impedenza, permeabilità, ed altri, oggi di uso comune, furono coniati da lui.

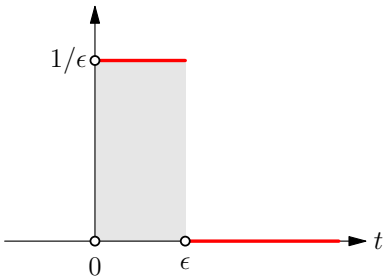


Figura 10.6: La delta in $\mathbb{R}^+$ come limite $\epsilon \to 0$ di funzioni a cappello con supporto in $\mathbb{R}^+$.

10.2 *La delta in più dimensioni*

La delta in più dimensioni può essere definita in modo analogo al caso uni-dimensionale. Più precisamente, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ centrata in un qualunque punto $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^\nu$ è definita da una successione di funzioni $\delta_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ con integrale unitario,

$$\int_{\mathbb{R}^\nu} \delta_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^\nu\mathbf{r} = 1$$

e tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^\nu} \delta_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}')F(\mathbf{r})d^\nu\mathbf{r} = F(\mathbf{r}')\,,$$

per una qualunque funzione di prova continua F.

In *coordinate cartesiane* $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_\nu)$ si possono prendere come approssimanti le funzioni $\delta_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta_n(x_1 - x_1') \cdots \delta_n(x_\nu - x_\nu')$, dove ciascuna funzione del prodotto è un'approssimante della delta unidimensionale (per esempio, le funzioni a cappello o le gaussiane). Allora nel limite $n \to \infty$, si ha $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x_1 - x_1') \cdots \delta(x_\nu - x_\nu')$. Ad esempio, in tre dimensioni spaziali e coordinate cartesiane x, y e z, si ha

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}) = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \,.$$

È utile conoscere la formula per la delta in sistemi di coordinate curvilinee ortogonali (problema 10.10). In coordinate cilindriche ρ, θ, z,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho')\delta(\theta - \theta')\delta(z - z') \,. \tag{10.19}$$

In coordinate sferiche r, θ, ϕ,

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \begin{cases} \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\, \delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(\varphi - \varphi') \\ \dfrac{1}{r^2}\, \delta(r - r')\delta(\cos\theta - \cos\theta')\delta(\varphi - \varphi') \end{cases} \tag{10.20}$$

Una formula importante, in particolare per le applicazioni all'elettrostatica, è

$$\Delta_{\mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{10.21}$$

10.3 Prodotto di convoluzione

L'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy = f \star g$$

è detto *prodotto di convoluzione* o, semplicemente, *convoluzione* di f e g. Si osservi che si integra sulla variabile y lasciando così una funzione di x. Per cambiamento di variabili nell'integrale, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy$$

Dunque il prodotto di convoluzione è commutativo, $f \star g = g \star f$.

La convoluzione può essere pensata come un nuovo modo di generare nuove funzioni — a partire da un insieme di funzioni — diverso da quelli soliti di somma, moltiplicazione e composizione di funzioni.

La convoluzione è un'operazione di *allisciamento*. La quintessenza della convoluzione è che il grado di liscezza del prodotto è l'*unione* dei gradi di liscezza dei suoi fattori. In particolare, valgono i seguenti teoremi (la cui dimostrazione laasciamo per esercizio):

(A) *Se una funzione è continua e l'altra discontinua, la loro convoluzione è continua;*

(B) *Se una funzione è derivabile n volte e l'altra m volte, la loro convoluzione è derivabile $n+m$ volte.*

Questo significa che se P è una funzione liscia e f non lo è, il loro prodotto di convoluzione è liscio. Il che vuol dire che facendo una scelta oculata di una funzione di riferimento P, possiamo trasformare una funzione brutta in una bella. Non vogliamo snaturarla, solo pulirla: vorrà dire che sceglieremo una funzione P che sia una approssimazione liscia di una delta, in modo tale che su una scala non troppo microscopica si abbia $f \star P \approx f$, e che nella scala microscopica f venga resa liscia.

Per comprendere il fenomeno di allisciamento, consideriamo il prodotto di convoluzione tra un'approssimante gaussiana della delta

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$

e lo scalino unitario $u(x)$. Allora

$$u \star \delta_n\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y)\delta_n(x-y)dy = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=0}^{\infty} e^{-n(x-y)^2} dy$$

Fatto il cambiamento di variabili $u = x - y$, $du = -dy$, si ha

$$u \star \delta_n\ (x) = -\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{y=x}^{-\infty} e^{-nu^2} du = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-nu^2} du$$

La figura 10.7 mostra alcuni allisciamenti dello scalino ottenuti in questo modo.

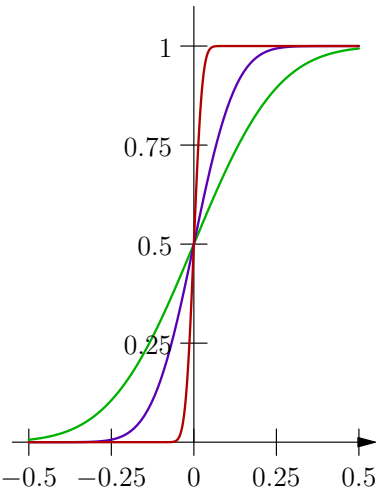


Figura 10.7: Allisciamenti dello scalino per $n = 5, 10$ e 50.

La convoluzione può essere definita per funzioni su $\mathbb{R}$, sul cerchio e su $\mathbb{R}^n$. Può anche essere definita anche su insiemi di interi. In questo caso, l'analogo di P è una matrice e il prodotto di convoluzione è un prodotto di una matrice per un vettore. Queste applicazioni (digitali) della convoluzione hanno applicazioni nell'analisi numerica, nella teoria dell'analisi dei segnali e, in particolare, nella progettazione e implementazione di filtri di risposta ad ingressi impulsivi. La convoluzione si applica anche allo sviluppo di filtri per l'analisi di immagini e in fisica è un utile strumento per pulire una segnatura sperimentale dal rumore di fondo. Sia come sia, in tutte queste applicazioni c'è qualcosa di analogo a un P tale che $f \star P \approx f$, in una scala opportuna. Una funzione P di questo tipo è chiamato *nucleo* o *kernel*.

10.4 Il nucleo di Poisson e il pettine di Dirac

Nel problema 8.9 si è ottenuta la formula di Poisson

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f(\phi)}{1+r^2-2r\cos(\theta-\phi)} d\phi \qquad (10.22)$$

per la soluzione del problema di Dirichlet nel disco unitario $\mathbb{D}$ (questa è la notazione per il disco unitario comunemente usata nei testi di matematica).

La funzione

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{10.23}$$

è detta *nucleo di Poisson*. Osserviamo che la (10.22) può essere riscritta come prodotto di convoluzione (e con un cambio inessenziale degli estremi di integrazione)

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi)f(\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}P_r \star f(\theta)\,. \tag{10.24}$$

In figura 10.8 sono riportati i grafici del nucleo di Poisson per diversi valori di r che si avvicinano a 1. Sembra una successione di approssimazioni della delta di Dirac e, in effetti, lo è. Ma è la delta sul cerchio unitario $\mathbb{T}$ e non su $\mathbb{R}$ ("$\mathbb{T}$" è la notazione standard per il cerchio unitario). Data una successione r_n tendente a 1, la corrispondente successione di nuclei integrali di Poisson $P_r(\theta)$ è una successione di approssimanti della delta su $\mathbb{T}$.

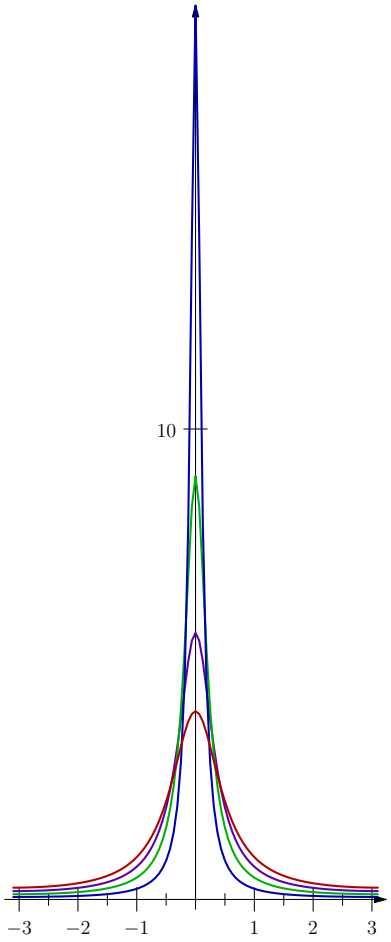


Figura 10.8: Nucleo di Poisson per $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ in $-\pi \le \theta < \pi$.

Le proprietà che rendono la successione $\frac{1}{2\pi}P_r$, $r \to 1$, una successione di approssimanti della delta su $\mathbb{T}$ sono le seguenti:

1. $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$
2. Il massimo di $P_r(\theta)$ fuori da qualunque intorno $(-\delta,\delta)$ di $\theta = 0$, non importa quanto sia piccolo, tende a 0 per r che tende a 1.

Queste proprietà si dimostrano facilmente: (1) è lasciato come esercizio; (2) segue dall'osservazione che $1 + r^2 > 2r$ (perché $(1-r)^2 > 0$), da cui

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \le \frac{1-r^2}{2r(1-\cos\theta)}\,.$$

che tende a 0 per $r \to 1$ in tutti i punti per cui $\cos\theta \neq 1$.

Se srotoliamo il cerchio sulla retta reale, il nucleo di Poisson P_r diventa quanto mostrato in figura 10.9. Questa funzione, nel limite $r \to 1$, converge alla delta periodica di periodo 2π,

$$\delta^{\#}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2n\pi)\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,, \tag{10.25}$$

che in ingegneria elettrica è nota come *funzione di campionamento* e in fisica come *pettine di Dirac*.

10.5 *Convergenza uniforme del nucleo di Poisson*

Poiché $P_r(\theta)$ converge alla delta su $\mathbb{T}$ quando r tende a 1, ci si aspetta che se f è una funzione continua su $\mathbb{T}$, allora $\frac{1}{2\pi}P_r \star f$ converge a f quando r tende a 1. Si ha in effetti il seguente teorema

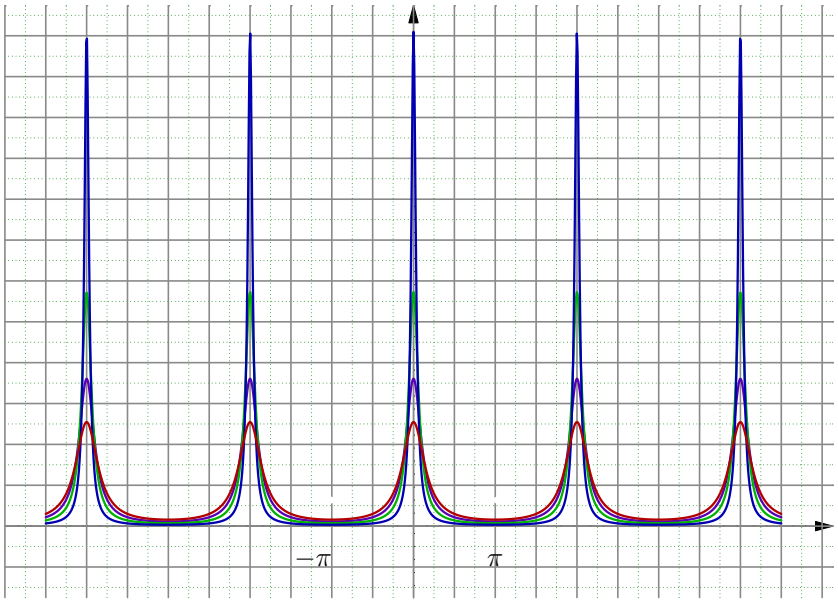


Figura 10.9: Approssimanti del pettine di Dirac.

Sia f una funzione continua su $\mathbb{T}$. Allora $\frac{1}{2\pi} P_r \star f$ converge uniformemente a f quando r tende a 1. (10.26)

La continuità di f su $\mathbb{T}$ implica in particolare che $f(0) = f(2\pi)$ o, equivalentemente, che $f(-\pi) = f(\pi)$.

Se $\frac{1}{2\pi} P_r \star f$ è armonica per qualunque funzione continua f il teorema (10.26) fornisce l'esistenza della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel disco unitario, *data una qualunque funzione continua f come condizione al bordo*. Inoltre, la soluzione (10.22) è unica, in virtù del teorema (8.57).

N. B. Si osservi che la formula di Green (per come è stata presentata) non fornisce una dimostrazione rigorosa che $\frac{1}{2\pi} P_r \star f$ è armonica per qualunque funzione continua f, un fatto che può essere facilmente stabilito con i metodi dell'analisi complessa (si veda il teorema (21.40) nella sezione 21.6).

10.6 *Il nucleo di Dirichlet e il lemma di Riemann-Lebesgue*

Il nucleo di Dirichlet è così definito:

$$D_N(\theta) = \frac{\sin\left[(N+\frac{1}{2})\theta\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \tag{10.27}$$

Dimostrazione di (10.26) Stimiamo l'errore $E_r(\theta) = \left| f(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi) f(\phi) d\phi \right|$. Per cambiamento di variabili $\theta - \phi = \alpha$, si ha $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi) f(\phi) d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\alpha) f(\theta-\alpha) d\alpha$. Allora

$$E_r(\theta) = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\alpha)\,[f(\theta) - f(\theta-\alpha)]\, d\alpha \right|,$$

essendo $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\alpha) d\alpha = 1$. Poiché il modulo dell'integrale è minore o uguale all'integrale del modulo (e $P_r(\alpha)$ è positiva), si ottiene

$$E_r(\theta) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\alpha)\,|f(\theta) - f(\theta-\alpha)|\, d\alpha\,.$$

I problemi nascono da $\alpha = 0$, dove $P_r(\alpha)$ diverge. Separiamo allora l'integrazione in due parti, una su un piccolo intorno dello 0 e l'altra sul resto: $E_r(\theta) \le \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right] P_r(\alpha)\,|f(\theta) - f(\theta-\alpha)|\, d\alpha\,.$ La funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato e quindi limitata da una costante M. Per $|\alpha| > \delta$ il massimo di $P_r(\alpha)$ è maggiorato da $\dfrac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}$, che tende a zero per r che tende a 1. Quindi $E_r(\theta) \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(\alpha)\,|f(\theta) - f(\theta-\alpha)|\, d\alpha + 2M\frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta))}$.

(continua nella pagina seguente)

Come si può facilmente verificare (si veda il problema 10.8), esso ha le seguenti proprietà:

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta)d\theta = 1$
2. $D(0) = 2N+1$

Analogamente a quanto visto per il nucleo di Poisson, si potrebbe ritenere che le funzioni $\frac{1}{2\pi}D_N(\theta)$ siano una successione di approssimanti della delta su $\mathbb{T}$ per N che tende all'infinito. Tuttavia, la situazione adesso è più delicata: il massimo di $D_N(\theta)$ fuori da qualunque intorno $(-\delta,\delta)$ di $\theta = 0$, non tende a 0 per N che tende all'infinito, ma oscilla sempre più rapidamente tra valori negativi e positivi al crescere di N (si veda la figura 10.10).

Il fatto che la frequenza di oscillazioni cresca al crescere di N suggerisce che per N grande l'unico contributo all'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} D_N(\theta-\phi)F(\phi)\,d\phi$$

provenga solo da un piccolo intorno di $\phi = \theta$ e che al di fuori di tale intorno il contributo sia nullo a causa dell'effetto di cancellazione tra parti positive e negative. È quindi ragionevole aspettarsi che

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} D_N(\theta-\phi)F(\phi)\,d\phi = F(\theta) \tag{10.28}$$

Quel che ci sembra ragionevole aspettarsi non sempre si realizza, quindi un'analisi accurata è d'obbligo. Incominciamo in maniera analoga alla dimostrazione di (10.26) e consideriamo l'errore

$$E_N(\theta) = f(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta-\phi)F(\phi)d\phi$$

Per la proprietà della convoluzione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta-\phi)F(\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\phi)F(\theta-\phi)d\phi$$

e poiché $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) = 1$, si ha

$$F(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta-\phi)F(\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\phi)\left[F(\theta)-F(\theta-\phi)\right]d\phi\,.$$

Dunque,

$$E_N(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\phi\right]g_\theta(\phi)d\phi \tag{10.29}$$

dove

$$g_\theta(\phi) = \frac{F(\theta)-F(\theta-\phi)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)}\,, \tag{10.30}$$

La funzione f è continua su $\mathbb{T}$, ma poichè $\mathbb{T}$ è compatto (=chiuso e limitato) per il *Teorema di Heine-Cantor* è anche uniformemente continua. Si fissi un ϵ arbitrario, allora dalla continuità uniforme segue che esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti i θ e $|\alpha| < \delta$, si ha $|f(\theta) - f(\theta-\alpha)| < \epsilon/2$. Quindi, per ogni ϵ esiste un δ tale che

$$E_r(\theta) \le \frac{\epsilon}{2} + 2M\frac{1-r^2}{2r(1-\cos(\delta)}\,.$$

Si prenda r così vicino a 1 che il secondo termine sia minore di $\epsilon/2$. Allora

$$E_r(\theta) \le \epsilon$$

Che è quando si voleva dimostrare: l'errore tende a zero uniformemente in θ, quindi $\frac{1}{2\pi}P_r \star f(\theta)$ converge *uniformemente* a f per $r \to 1$.

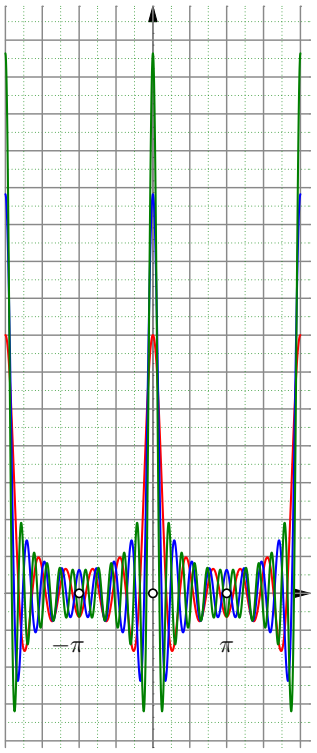


Figura 10.10: Nucleo di Dirichlet tra -2π e 2π per $N = 6$ (rosso) e $N = 9$ (blu) e $N = 12$ (verde).

e si à usata la definizione (10.27) di D_N.

Per studiare limite di $E_N(\theta)$ per N che tende all'infinito, ci serve un teorema classico di analisi, noto come *lemma di Rieman-Lebesgue*, che stabilisce che *se f è continua e limitata in $[a,b)$*, allora per ogni successione di numeri $\{k_n\}$ che tende all'infinito,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(k_n x)\,dx = 0 \tag{10.31}$$

Versione "semplice" del lemma di Riemann-Lebesgue. Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso $[a,b]$. Si supponga che f sia differenziabile nell'intervallo aperto (a,b) e che la derivata f' sia limitata, cioè $|f'(x)| \le M$ per tutti gli $x \in (a,b)$. Allora per ogni successione di numeri $\{k_n\}$ che tende all'infinito, vale la (10.31).

Dimostrazione. L'integrazione per parti di $\int_a^b f(x)\sin(k_n x)\,dx$ fornisce

$$\int_a^b f(x)\sin(k_n x)\,dx = -\frac{\cos(k_n x)}{k_n}\Big|_a^b + \frac{1}{k_n}\int_a^b f'(x)\cos(k_n x)\,dx$$

Allora

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)\sin(k_n x)\,dx\right| \\ &\le \frac{2}{k_n} + \frac{1}{k_n}\left|\int_a^b f'(x)\cos(k_n x)\,dx\right| \\ &\le \frac{2}{k_n} + \frac{1}{k_n}M(b-a)\,,\end{aligned}$$

che chiaramente tende a 0 per k_n che tende all'infinito. □

Chiaramente, $N + 1/2$ nella (10.29) è una successione che tende all'infinito, per N che tende all'infinito. Tuttavia, per applicare il lemma di Rieman-Lebesgue alla (10.29), occorre garantire la continuità di $g_\theta(\phi)$ sul cerchio unitario (essendo il cerchio compatto, la limitatezza segue dalla continuità), per ogni θ. Il punto critico è $\phi = 0$, che è uno zero del denominatore di $g_\theta(\phi)$.

Se supponiamo che $F(\theta)$ sia *derivabile*, allora

$$F'(\theta) = \lim_{\phi\to 0}\frac{F(\theta)-F(\theta-\phi)}{\phi} = \frac{1}{2}\lim_{\phi\to 0}\frac{F(\theta)-F(\theta-\phi)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)} = \frac{1}{2}g_\theta(0)\,.$$

Questo significa che se F è derivabile, la funzione $g_\theta(\phi)$ è continua in $\phi = 0$ (per tutti i θ) e quindi continua per tutti i $\phi \in \mathbb{T}$ (il problema era $\phi = 0$, per gli altri valori di ϕ è chiaro che la sola continuità di F garantisce la continuità di $g_\theta(\phi)$). Si può allora applicare il lemma di Riemann-Lebesgue e concludere che $E_N(\theta) \to 0$ per N che tende all'infinito.

Con un po' di lavoro in più (che non faremo), si può dimostrare che la convergenza è anche uniforme e che non è richiesta la continuità della derivata di f, ma è sufficiente che f' sia generalmente continua sul cerchio unitario (ovvero continua a tratti, si veda la definizione a pag. 111). Si arriva così al seguente teorema.

Sia f una funzione continua su $\mathbb{T}$ con derivata prima generalmente continua. Allora $\frac{1}{2\pi}D_N \star f$ converge uniformemente a f quando N tende all'infinito. (10.32)

10.7 *Funzioni generalizzate**

Concludiamo questo capitolo con alcune sulla nozione di funzione generalizata o *distribuzione*.

Una funzione generalizzata è definita mediante una successione di funzioni normali, analogamente a come la delta è definita da una successione di sue approssimanti. per definire una funzione generalizzata si procede come nella (10.2), con una successione $f_n(x)$ di

"funzioni di prova": se lo stesso risultato

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \tag{10.33}$$

emerge per ciascuna successione di una certa classe e per qualunque funzione di prova $F(x)$, le successioni definiscono la stessa funzione generalizzata. Come abbiamo visto, per definire la delta, basta "provare" la successione f_n con funzioni continue $F(x)$ perché il limite esista, ma, per definire le sue derivate, occorrono funzioni di prova molto più regolari (in particolare continuamente differenziabili tante volte quanto è l'ordine della derivata della delta che si vuole definire). Conviene dunque prendere funzioni di prova molto regolari se si vuole definire una classe abbastanza ampia di funzioni generalizzate.

In vista delle applicazioni all'analisi di Fourier, risulta conveniente scegliere funzioni di prova, che siano "buone" nel senso seguente: una funzione $f(x)$, sui reali e a valori reali, è *buona* se è infinitamente differenziabile e se è tale che $f(x)$ e le sue derivate vanno a zero all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|x|$. Ne è un esempio paradigmatico la funzione e^{-x^2}. Conviene inoltre introdurre anche una classe più ampia di una funzioni che includa anche i polinomi: diremo che una funzione $\phi(x)$ è *abbastanza buona* se $\phi(x)$ e le sue derivate crescono all'infinito (negativo o positivo) al più come una qualche potenza positiva di $|x|$. Si dimostra facilmente che la derivata di una funzione buona è buona la somma di due funzioni buone è ancora una funzione buona. È altrettanto semplice che il prodotto di una funzione buona e di una funzione abbastanza buona è ancora una funzione buona.

Laurent Schwartz (1915–2002) fu un matematico francese che sviluppò la teoria delle distribuzioni o funzioni generalizzate che permette di dare un senso matematico preciso e generale ad oggetti come la delta di Dirac.

Si considereranno nella (10.33) successioni di funzioni buone $f_n(x)$ e tutto il discorso starà in piedi se, per qualunque funzione buona $F(x)$, il limite (10.33) esiste. Una successione che ha questa proprietà è detta regolare. Ad esempio, la successione e^{-x^2/n^2} è regolare: il limite (10.33) è $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$, qualunque funzione buona $F(x)$ si consideri. L'analogia con la costruzione dei reali a partire dai razionali è notevole: la regolarità della successione di funzioni buone è analoga al requisito di Cauchy e in entrambi i casi ci si aspetta che l'oggetto definito dalla successione non sia necessariamente identificabile con uno che è nell'ambiente in cui vive la successione. Per esempio, il reale definito dalla successione $.9, .99, .999, 9999, \ldots$ si identifica naturalmente con il numero 1, che è razionale, ma la regola sono successioni come quella che definisce il numero e

$$1, 1+\frac{1}{2!}, 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}, 1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}, \ldots$$

Un numero reale è definito come una successione di Cauchy di razionali. Si definisca allora una funzione generalizzata $f(x)$ come una

successione regolare $f_n(x)$ di funzioni buone e due funzioni generalizzate si dicano uguali se le corrispondenti successioni regolari sono equivalenti, cioè se per qualunque funzione buona $F(x)$, il limite (10.33) è lo stesso per ciascuna successione. Per esempio, la successione e^{-x^4/n^4} è equivalente alla successione e^{-x^2/n^2}. Entrambe (e tutte le successioni a loro equivalenti) definiscono la funzione generalizzata $I(x)$ tale che

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$$

e che è abbastanza naturale denotare semplicemente con 1, la funzione che vale 1. Perciò ciascuna funzione generalizzata è in realtà la classe di tutte le successioni regolari equivalenti ad una data successione regolare. Passiamo ora ad alcune definizioni molto naturali sulla base di quanto è stato appena detto.

Si definisca l'integrale del prodotto di una funzione generalizzata $f(x)$ con una funzione buona $F(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F(x)dx\,, \tag{10.34}$$

come

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx \tag{10.35}$$

La definizione è consistente perché il limite è lo stesso per tutte le le successioni equivalenti $f_n(x)$.

È del tutto naturale definire la somma $g(x) = f(x) + h(x)$ di due funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$, definite dalle successioni $f_n(x)$ e $h_n(x)$, come la funzione generalizzata che è definita dalla successione $g_n(x) = f_n(x) + h_n(x)$. Per quanto la definizione sia naturale occorre mostrarne la consistenza. Occorre cioè mostrare che

(a) $g_n(x)$ è una successione di funzioni buone.

(b) $g_n(x)$ è regolare.

(c) Scelte differenti di successioni regolari equivalenti che definiscono le funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$ portano a successioni equivalenti che definiscono $g(x)$.

(a) è immediata, perché la somma di funzioni buone è buona. (b) Per ogni funzione buona $F(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)F(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)F(x)dx$$

e così il limite sulla sinistra esiste, e quindi la successione $g_n = f_n + h_n$ è regolare. Inoltre i limiti a destra sono indipendenti da quali tra le differenti successioni equivalenti di f_n e h_n sono utilizzate per definire f e h. Quindi, tutte le successioni risultanti $f_n + h_n$ sono equivalenti verificando così (c).

Anche definire la derivata $f'(x)$ in termini della successione $f_n'(x)$ risulta essere una definizione consistente. Infatti per integrazione per parti,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n'(x)F(x)dx = -\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)F'(x)dx$$

e poiché la derivata $F'(x)$ di una funzione buona $F(x)$ è ancora una funzione buona, il limite a destra esiste ed è lo stesso per tutte le successioni regolari equivalenti $f_n(x)$. Quindi tutte le successioni $f_n'(x)$ sono equivalenti e regolari, che è quanto si voleva dimostrare. Procedendo in maniera analoga, si mostra che è consistente definire $f(ax+b)$ mediante la successione $f_n(ax+b)$ e $\phi(x)f(x)$, dove $\phi(x)$ è una funzione abbastanza buona, mediante la successione $\phi(x)f_n(x)$.

Riassumendo: Se due funzioni generalizzate $f(x)$ e $h(x)$ sono definite dalle successioni $f_n(x)$ e $h_n(x)$ allora:

(i) $f(x)+h(x)$ è definita dalla successione $f_n(x)+h_n(x)$;

(ii) $f'(x)$ è definita dalla successione $f_n'(x)$;

(iii) $f(ax+b)$ è definita dalla successione $f_n(ax+b)$.

(iv) $\phi(x)f(x)$, dove $\phi(x)$ è una funzione abbastanza buona, è definita dalla successione $\phi(x)f_n(x)$.

A questo punto, risulta facile dimostrare che per qualunque funzione buona $F(x)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)F(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F'(x)dx \tag{10.36}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)F(x)dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)F\left(\frac{x-b}{a}\right)dx \tag{10.37}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi(x)f(x)\right]F(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\phi(x)F(x)\right]dx \tag{10.38}$$

Questo teorema garantisce che le funzioni generalizzate sotto il segno di integrale, quando sono moltiplicate per una funzione buona, possono essere manipolate come se fossero funzioni ordinarie.

Problemi

Problema 10.1. □ Mostrare che

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\gamma}e^{\frac{-x^2}{2\gamma^2}}F(x)dx = F(0)$$

per F continua.

Problema 10.2. □ Mostrare che

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{x^2+\gamma^2}F(x)dx = F(0)$$

per F continua.

Problema 10.3. □ Mostrare che

$$x\delta(x) = 0\,.$$

Problema 10.4. □ Mostrare che

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,.$$

Problema 10.5. □ Mostrare che

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$$

Problema 10.6. □ Mostrare che

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$$

dove x_i sono gli zeri di $f(x)$ e f è tale che la sua derivata f' non si annulla negli zeri x_i.

Problema 10.7. □ Usare il problema 1.2 per mostrare che

$$P_r(\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos(n\theta)$$

e

$$\lim_{r\to 1} P_r(\theta) = \delta^{\#}(\theta)$$

dove $\delta^{\#}(\theta)$ è il pettine di Dirac.

Problema 10.8. □ Si consideri il risultato del problema 1.9

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})\theta\right]}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Queste successione di funzioni è una successione di approssimanti del pettine di Dirac? Spiegare.

Problema 10.9. □ Mostrare che in coordinate curvilinee ortogonali (u_1, u_2, u_3) la delta è data dalla formula

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{h_1h_2h_3}\delta(u_1-u_1')\delta(u_2-u_2')\delta(u_3-u_3')$$

Usare il risultato ottenuto per esprimere la delta in coordinate cilindriche e sferiche.

Problema 10.10. □ Mostrare che

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}|} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

Soluzioni

Problema 10.1. □

Problema 10.2. □

Problema 10.3. □ L'identità discende immediatamente da

$$\lim_{n\to\infty} x\sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{nx^2}{\pi}}e^{-nx^2} = \lim_{y\to\infty}\sqrt{\frac{y^2}{\pi}}e^{-y^2} = 0$$

Problema 10.4. □

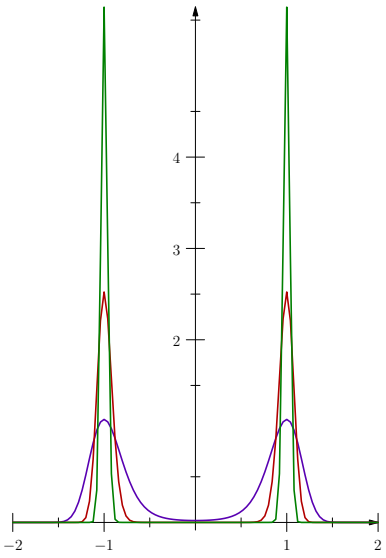
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,.$$

Problema 10.5. □ Per mostrare questo fatto, è utile avere un'idea di come sono fatte le approssimanti di $\eta(x) = \delta(x^2 - a^2)$. Se

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-nx^2}\,,$$

sono le approssimanti della delta, allora le approssimanti di η sono

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2-a^2)^2}$$



Il grafico a lato mostra che le approssimanti sono sostanzialmente la somma di due funzioni che si concentrano una in $-a$ e l'altra in $+a$, il che rende già plausibile la formula che si vuole dimostrare. Occorre capire il fattore moltiplicativo $\frac{1}{2|a|}$ e darne una dimostrazione analitica. Consideriamo

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2-a^2)^2} = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x-a)^2(x+a)^2}$$

Nell'intorno di $x = a$ si ha

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x-a)^2(2a)^2} = \frac{1}{2|a|}\sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}}e^{-2a^2n(x-a)^2}$$

e quindi, nell'intorno di $x = a$, si ha

$$\eta_n(x) \approx \frac{1}{2|a|}\delta_n(x-a)\,.$$

Analogamente, nell'intorno di $x = -a$,

$$\eta_n(x) \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x+a)^2(-2a)^2} = \frac{1}{2|a|}\sqrt{\frac{2a^2n}{\pi}}e^{-2a^2n(x+a)^2} = \frac{1}{2|a|}\delta_n(x+a)$$

Al crescere di n, $\eta_n(x)$ va rapidamente a zero ad eccezione di piccoli intorni di $x = a$ e $x = -a$. Dunque, per n grande,

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(x^2-a^2)^2} \approx \frac{1}{2|a|}\left[\delta_n(x+a) + \delta_n(x-a)\right]$$

Passando al limite $n \to \infty$ si ottiene quanto si voleva dimostrare.

Problema 10.6. □ Posto $\eta(x) = \delta(f(x))$, sia $\eta_n(x)$ la sua approssimate

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(f(x))^2}.$$

Consideriamo $\eta_n(x)$ nell'intorno di uno zero x_i di $f(x)$. Sviluppiamo $f(x)$ nell'intorno di x_i. Poichè n è arbitrariamente grande teniamo solo l'ordine più basso in x. Allora, essendo $f(x_i) = 0$, si ha

$$\eta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} = \frac{1}{|f'(x_i)|} \sqrt{\frac{nf'(x_i)^2}{\pi}} e^{-nf'(x_i)^2(x-x_i)^2} \sim \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x - x_i)$$

Al di fuori di piccoli intorni degli zeri, $\eta_n(x)$ sarà praticamente nulla e quindi, sommando i contributi da tutti gli intorni,

$$\eta_n(x) = \delta(f(x)) \approx \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta_n(x - x_i).$$

Passando al limite $n \to \infty$ si ottiene la formula richiesta.

Problema 10.7. □

Problema 10.8. □

Problema 10.9. □ Sia $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$ la rappresentazione di $\mathbf{r}$ in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{r} = (u_1, \ldots, u_n) = \boldsymbol{u}$ la sua rappresentazione in un sistema di coordinate curvilinee. Sia $J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{u}} \right|$ il determinante Jacobiano della trasformazione da $\mathbf{x}$ a $\boldsymbol{u}$.

La delta in coordinate curvilinee è definita da

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(u)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) f(\boldsymbol{u}) d^n \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{u}_0)$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{(u)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) f(\boldsymbol{u}) d^n \boldsymbol{u} &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) \left| \frac{d^n \boldsymbol{u}}{d^n \mathbf{x}} \right| d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) J^{-1} d^n \mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) f(\boldsymbol{u}) J^{-1} d^n \boldsymbol{u} \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\delta_{(u)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) = J^{-1} \delta(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) = J^{-1} \prod_i^n \delta(u_i - u_{0\,i})$$

che è quanto si voleva dimostrare. Per il caso specifico di coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$, il determinante Jacobiano J è r e quindi

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(z - z_0)$$

11
Problemi al contorno per le onde e il calore

Indice

11.1 ***Problemi di Cauchy*** 217

11.2 ***Problemi al contorno*** 219

11.3 ***Il metodo delle immagini*** 221

11.4 ***Il metodo di Fourier*** 225

11.5 ***Il metodo di Fourier nel linguaggio degli spazi vettoriali*** 229

PROBLEMI 231

SOLUZIONI 234

11.1 *Problemi di Cauchy*

Se in un problema al contorno una delle variabili indipendenti è il *tempo*, le condizioni iniziali specificano la soluzione ad un dato tempo, di solito $t = 0$. Per esempio, le condizioni iniziali per $u = u(x,t)$ possono avere la forma

$$u(x,0) = q(x)\,, \quad \text{o} \quad u(x,0) = q(x)\,,\ \partial_t u(x,0) = p(x)\,.$$

Un'equazione alle derivate parziali con condizioni iniziali specificate è chiamato *problema alle condizioni iniziali* o *problema di Cauchy*.

ONDE IN UNA CORDA ILLIMITATA Consideriamo l'equazione di d'Alembert (6.12) per il il profilo $u = u(x,t)$ di una corda vibrante. Poiché l'equazione è del secondo ordine nel tempo, per determinare $u(x,t)$ occorre conoscere oltre allo spostamento iniziale dei punti della corda, $q(x)$, anche la velocità iniziale in ogni punto di essa, $p(x)$. Se la corda è illimitata, cioè non è fissata ad estremi, ma si

estende da $-\infty$ a $+\infty$, il problema di Cauchy è allora

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = q(x)\,, \qquad \partial_t u(x,0) = p(x) \end{cases} \tag{11.1}$$

Si può dimostrare che la soluzione di (11.1) è

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[q(x-vt) + q(x+vt)\right] + \frac{1}{2v}\left[\int_{x-vt}^{x+vt} p(x)\,dx\right]. \tag{11.2}$$

(Si veda il problema 11.2.)

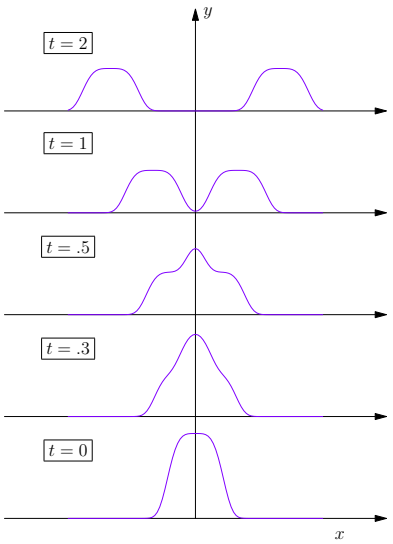


Figura 11.1: Evoluzione temporale di un un'onda con profilo iniziale $q(x)$ per velocità iniziale $p(x)$ nulla: dopo una fase iniziale di separazione, metà del profilo si propaga inalterato a destra e metà a sinistra, entrambi con velocità v. Per disegnare la figura si è scelto $q(x) = e^{-4x^4}$.

ONDE SINUSOIDALI Consideriamo adesso le onde progressive di una corda illimitata nel caso in cui la f nella (7.7) è una funzione sinusoidale, vale a dire è del tipo

$$u(x,t) = f(x-vt) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt) - \varphi\right], \tag{11.3}$$

dove A, λ e φ sono costanti arbitrarie, di cui l'ultima, la costante di fase, può essere sempre posta uguale a zero mediante scelta opportuna dell'origine dei tempi.

Dalla (11.2) si vede che questo caso si può realizzare imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} q(x) &= A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \varphi\right) \\ p(x) &= -\frac{2\pi v}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \varphi\right) = -vq'(x) \end{aligned}$$

Il significato della costante λ è quello di *lunghezza d'onda*, mentre A rappresenta l'ampiezza di vibrazione. La f espressa dalla (11.3) è sinusoidale sia in x, con periodo λ, sia in t con periodo $T = \lambda/v$. Per mettere in evidenza quest'ultimo fatto si usa talvolta l'espressione

$$u(x,t) = f(x-vt) = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - \varphi\right]. \tag{11.4}$$

Se si prende invece

$$u(x,t) = g(x+vt) = A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt) - \varphi\right], \tag{11.5}$$

si ottengono ancora onde sinusoidali di lunghezza d'onda λ e ampiezza A, ma regressive.

PROPAGAZIONE DEL CALORE IN UN FILO ILLIMITATO Consideriamo l'equazione del calore (6.14) per la propagazione del calore in un filo illimitato. Poiché l'equazione è del primo ordine nel tempo,

occorre specificare solo il profilo iniziale di temperatura $f(x)$ e il problema di Cauchy è quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \ \text{ per } \ x < 0\,. \end{cases} \tag{11.6}$$

Usando il metodo della trasformata di Fourier (che tratteremo in un capitolo successivo), si può dimostrare che la soluzione di (11.6) è

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f(y)dy \tag{11.7}$$

È un facile esercizio mostrare che se

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,,$$

allora la soluzione (11.7) di (11.6) diventa

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + 2Dt)}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma^2+2Dt)}}\,. \tag{11.8}$$

Si osservi che l'incremento lineare nel tempo del *quadrato* della larghezza della funzione: questo è il marchio di fabbrica dei processi diffusivi.

La (11.7) è di solito scritta nella forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y) f(y)dy\,, \tag{11.9}$$

dove

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-x^2/(4Dt)} \tag{11.10}$$

è chiamato *nucleo del calore*. Dal problema 11.5 segue che per $t > 0$, K_t è una soluzione particolare dell'equazione del calore (corrispondente a $\sigma = 0$ nella (11.8)). La (11.9) può dunque essere interpretata come una soluzione dell'equazione del calore ottenuta mediante il principio di sovrapposizione. Si osservi che per tutti i $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x)dx = 1\,. \tag{11.11}$$

Assumendo che $f(x)$ sia continua, allora dalla (10.9) si ottiene

$$\lim_{t\to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y) f(y)dy = f(x)$$

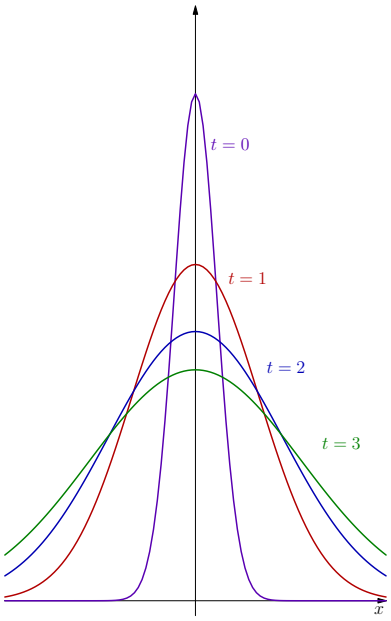


Figura 11.2: Andamento nel corso del tempo della temperatura con distribuzione iniziale a $t = 0$ gaussiana a media zero e larghezza σ.

11.2 *Problemi al contorno*

In problemi di fisica e in altre applicazioni, un'equazione alle derivate parziali governa un fenomeno che si realizza nello spazio euclideo

o in un suo dominio aperto Ω. Fatta eccezione per il tempo, le altre variabili indipendenti sono in Ω. Le condizioni al contorno vincolano la funzione incognita ad avere certe date caratteristiche sul bordo di Ω. I tre casi più importanti sono i seguenti.

(D) Le *condizioni al contorno di Dirichlet*, che specificano i valori della soluzione u al bordo $\partial\Omega$.

(N) Le *condizioni al contorno di Neumann*, che specificano i valori della derivata normale $\partial_{\mathbf{n}} u$ della soluzione u al bordo $\partial\Omega$.

(M) Le *condizioni al contorno miste*, che specificano i valori di $\alpha u + \beta\partial_{\mathbf{n}} u$ al bordo $\partial\Omega$.

Quando le condizione al bordo sono di annullamento

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{o} \quad \partial_{\mathbf{n}} u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{o} \quad u|_{\alpha u + \beta\partial_{\mathbf{n}} u} = 0$$

il problema al contorno è detto *omogeneo*.

Si osservi che la distinzione tra condizioni al contorno e condizioni iniziali è meno netta di quanto possa sembrare. In effetti, con riferimento al problema (11.12), entrambe le condizioni specificano che cosa succede nel piano x-t, le prime sulle rette $x = 0$ e $x = L$ e le seconde sulla retta $t = 0$. In problemi più complicati sulle rette $x = 0$ e $x = L$ si richiede che la soluzione assuma dati valori dipendenti dal tempo[1]. In generale, si parla dunque di *problema al contorno*, senza distinguere tra condizioni iniziali e condizioni al contorno vere e proprie.

[1] Per esempio l'estremo destro è tenuto fisso, mentre nel sinistro la corda viene fatta oscillare secondo una data funzione $h(t)$.

Una condizione spesso implicita, ma non per questo meno importante, è che la soluzione sia una *funzione limitata*, il che si traduce nella condizione:

(L) Esiste una costante positiva M tale che

$$|u(x, y, \ldots)| < M$$

Ecco un esempio di problema al contorno per l'equazione delle onde:

$$\begin{array}{ll} \text{(1) EQUAZIONE} & \\ \text{(2) COND. INIZ.} & \\ \text{(3) COND. AL CONT.} & \\ \text{(4) LIMITATEZZA} & \end{array} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = q(x)\,, \qquad \partial_t u(x,0) = p(x) \\ u(0,t) = a\,, \quad u(L,t) = b\,, \quad t > 0 \\ |u(x,t)| < M\,, \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0 \end{cases} \tag{11.12}$$

11.3 *Il metodo delle immagini*

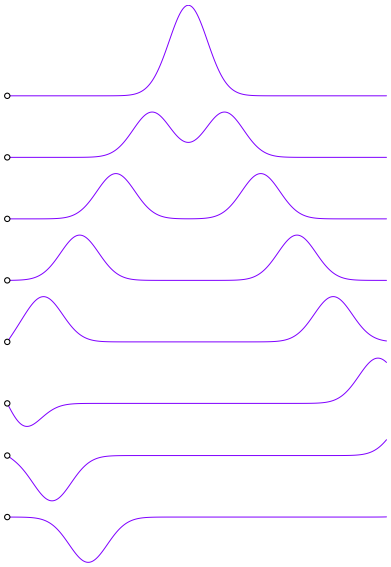


Figura 11.3: Al tempo $t = 0$ una corda semi-infinita tenuta ferma nell'origine è portata nella configurazione iniziale in alto, quindi viene lasciata libera di evolvere. I fotogrammi dall'alto in basso descrivono come la configurazione della corda evolve nel tempo. L'onda verso destra si allontana all'infinito, quella verso sinistra si riflette nell'origine.

PROBLEMI DI DIRICHLET SU UNA SEMIRETTA Consideriamo una corda che si estende dal suo punto di origine in $x = 0$ a $x = \infty$. In questo caso occorre specificare come la corda si comporta nell'origine e questa è la condizione al contorno $u(0,t) = h(t)$. La funzione $h(t)$ descrive come l'estremo della corda si muove.

Se assumiamo che è l'estremo della corda è tenuto fermo, cioè $h = 0$, si ha il problema al contorno per $x \in \mathbb{R}^+$

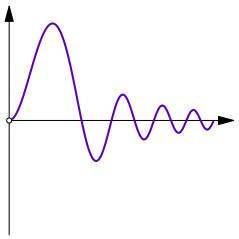
$$\begin{cases} \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = q(x)\,, \qquad \partial_t u(x,0) = p(x)\,,\ \ x > 0 \\ u(0,t) = 0\,, \quad t > 0 \end{cases} \tag{11.13}$$

Questo problema può essere risolto mediante il *metodo delle immagini*, cioè in termini di un problema al contorno per $x \in \mathbb{R}$ che, quando ristretto a $\mathbb{R}^+$, coincide con (11.13), analogamente a quanto visto per l'elettrostatica. In questo modo, si può dimostrare che la soluzione di (11.13) è

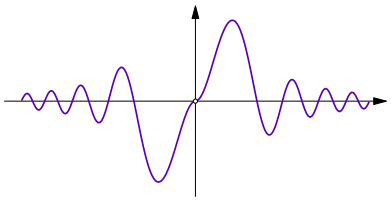
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[q^D(x-ct) + q^D(x+ct)\right] + \frac{1}{2v}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} p^D(x)\,dx\right] \tag{11.14}$$

dove q^D e p^D sono le estensioni dispari di q e p. Si veda la nota a margine e la figura 11.4.

Estensione dispari di una funzione Data una funzione $F(x)$ definita solo per $x > 0$,



la sua *estensione dispari* a tutta retta reale è definita come la funzione



che coincide con F per $x > 0$ e che vale $-F(-x)$ per $x < 0$.

Questo metodo vale anche per altri problemi di Dirichlet con la stessa struttura di (11.13). Ad esempio, si applica a problemi diffusivi governati dall'equazione del calore: la soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,,\ \ x > 0 \\ u(0,t) = 0\,, \quad t > 0 \end{cases} \tag{11.15}$$

è

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^D(y) dy \tag{11.16}$$

dove f^D è l'estensione dispari di f, ovvero

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-(x-y)^2/(4Dt)} - e^{-(x+y)^2/(4Dt)}\right] f(y)\,dy\,, \tag{11.17}$$

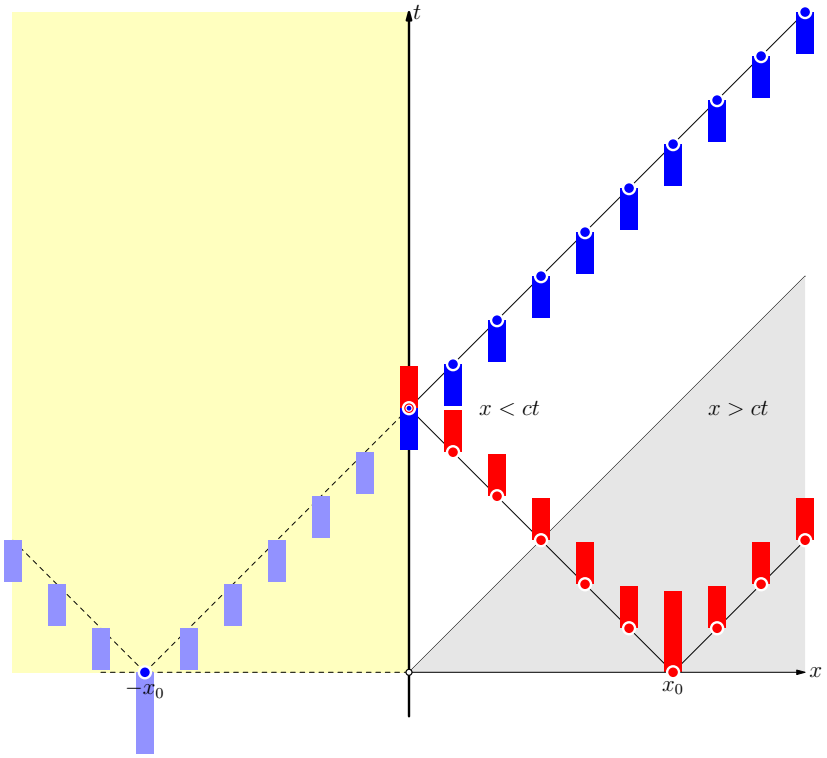


Figura 11.4: Il profilo rettangolare (in rosso) nell'intorno di un punto x_0 è la condizione iniziale $q(x)$ dell'onda (per semplicità si è posto $p(x) = 0$). Nella regione $x > ct$ (in grigio) la propagazione avviene come se non ci fosse alcun vincolo in $x = 0$: il rettangolo iniziale si dimezza: metà viaggia verso destra e metà verso sinistra. Nella regione $x < ct$, l'onda è sotto l'influenza del vincolo in $x = 0$. La soluzione in questa regione è ottenuta introducendo una condizione iniziale nell'intorno di $-x_0$ (rettangolo blu), di ampiezza uguale in modulo, ma opposta in segno a quella iniziale in x_0 (estensione dispari della condizione inziale). Quando l'onda virtuale esce dalla regione non fisica (in giallo) diventa reale: nella regione $x < ct$ la soluzione è la sovrapposizione dell'onda blu e dell'onda rossa. Questa costruzione fornisce la *riflessione* dell'onda in $x = 0$.

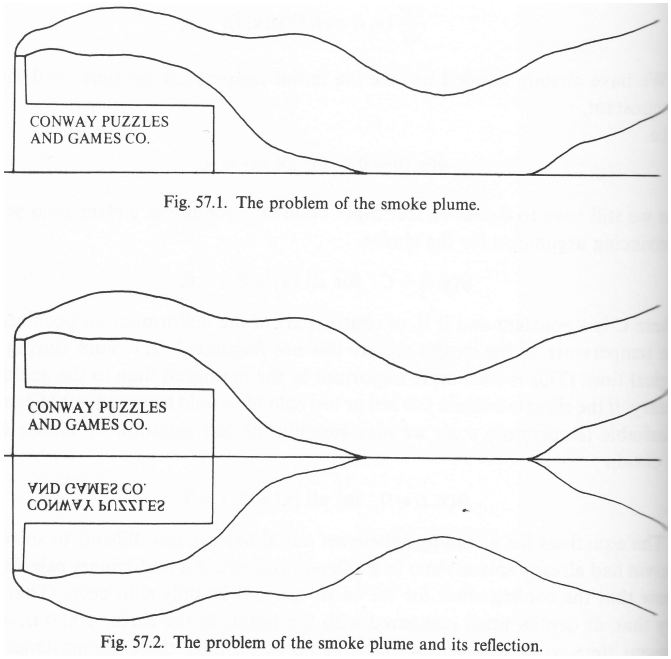


Figura 11.5: Immagine tratta dal bel libro "Fourier Analysis" di T.W. Körner che illustra il metodo delle immagini per l'equazione del calore applicata ad un problema di diffusione di fumi nell'aria. La densità $u(x,t)$ del fumo lungo la direzione verticale x è soluzione del problema al contorno (11.15) e dunque si propaga nella direzione verticale secondo la (11.16).

Si veda la figura 11.5.

PROBLEMI DI NEUMANN SU UNA SEMIRETTA In un problema di Neumann omogeneo sulla semiretta si vincola la derivata nell'origine ad essere nulla per tutti i tempi $t > 0$. Un problema di questo tipo per la propagazione del calore è il seguente.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,,\ \ x > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \quad t > 0 \end{cases} \tag{11.18}$$

Poiché il gradiente della temperatura è proporzionale al flusso del calore, una condizione di questo significa che la sbarretta semi-illimitata è isolata adiabaticamente al suo estremo posto nell'origine. Si può dimostrare che i problemi di Neumann di questo tipo si risolvono mediante estensione pari del dato iniziale, per cui la soluzione di (11.18) è

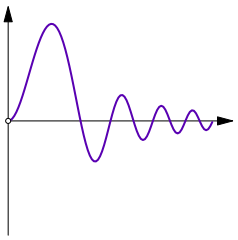
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^P(y)dy\,, \tag{11.19}$$

dove

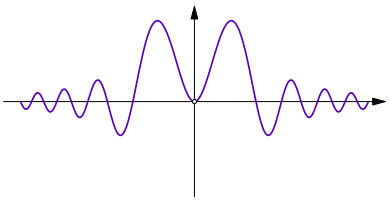
$$f^P(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per} \quad x > 0 \\ f(-x) & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

è l'estensione pari di f.

Estensione pari di una funzione Data una funzione $F(x)$ definita solo per $x > 0$,



la sua *estensione pari* a tutta retta reale è definita come la funzione

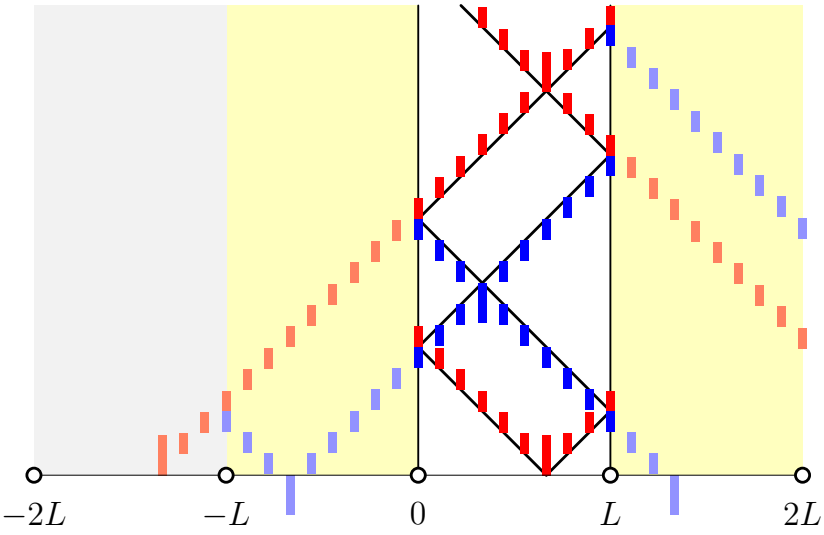


che coincide con F per $x > 0$ e che vale $F(-x)$ per $x < 0$.

PROBLEMI AL CONTORNO SU UN INTERVALLO LIMITATO Un esempio di problema al contorno in un intervallo limitato $[0, L]$ con condizioni di Dirichlet omogenee è il seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & 0 < x < L\,, t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = q(x) \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = q(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{11.20}$$

Ragionando sulla figura sotto,

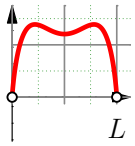


ci si può convincere che la soluzione è ancora della forma (11.2),

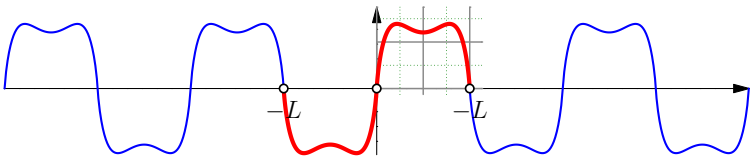
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[q^{\#D}(x-vt) + q^{\#D}(x+vt)\right] + \frac{1}{2v}\left[\int_{x-vt}^{x+vt} p^{\#D}(x)\,dx\right] \tag{11.21}$$

dove $q^{\#D}$ e $q^{\#D}$ sono le estensioni *periodiche dispari* di $q(x)$ e $p(x)$ alla retta reale, nel senso indicato sotto. Si veda anche la figura 11.6.

Estensione periodica dispari di una funzione. Data una funzione $F(x)$ definita solo per $0 < x < L$,



la sua *estensione periodica dispari* è definita come la funzione che è estesa prima in modo dispari a $[-L, L]$ e poi per periodicità a tutta la retta reale



Analogamente, per l'equazione del calore in un intervallo limitato $[0, L]$ con condizioni al contorno di Dirichlet omogenee, si arriva alla conclusione che la soluzione è

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f^{\#D}(y)dy\,, \tag{11.22}$$

Condizioni al contorno di Neumann omogenee $\partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(L,t)$ richiedono invece un'estensione periodica pari dei dati iniziali.

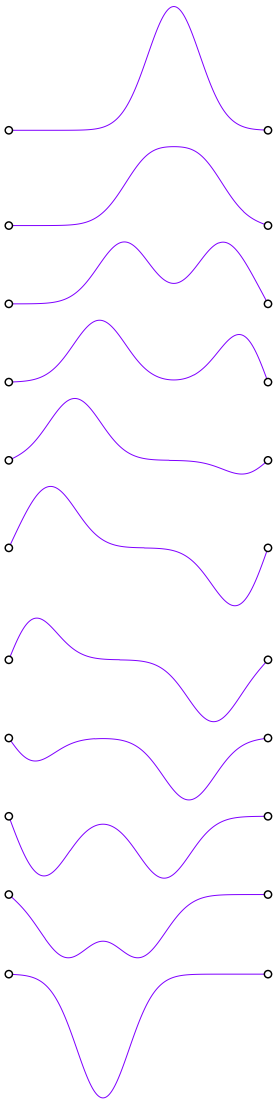
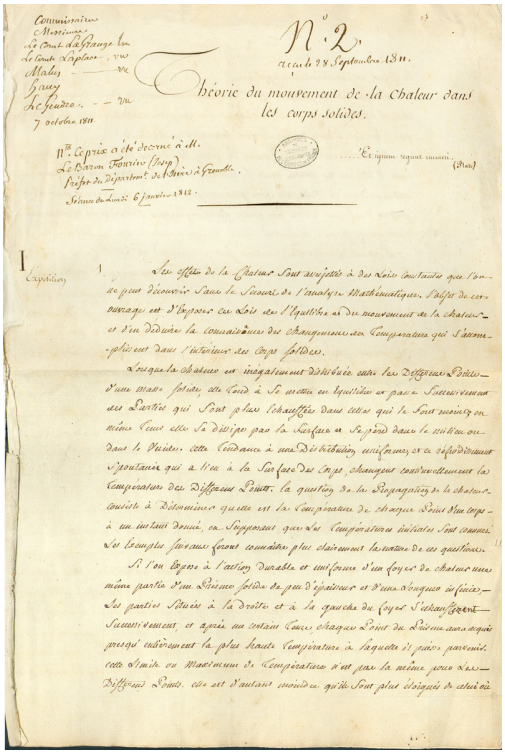


Figura 11.6: Corda di violino. La corda, tenuta ferma ai suoi estremi, è portata inizialmente nella configurazione iniziale in alto, quindi viene lasciata libera di evolvere. I fotogrammi dall'alto in basso descrivono come la configurazione della corda evolve nel tempo. I fotogrammi sono stati ottenuti con la regola dell'estensione periodica dispari del dato iniziale.

11.4 *Il metodo di Fourier*



N.° 2.

Reçu le 28 Septembre 1811.

Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides.

Figura 11.7: Prima pagina dell memoria *Theorie du mouvement de la chaleur dans le corps solides* presentata da Jean Baptiste Joseph Fourier nel 1807 all'Accademia di Francia. La commissione che deve giudicare la memoria è formata da Lagrange, Laplace, Haüy, Malus e Legendre. La commissione rende noto il suo verdetto il 16 Dicembre 1811:

La commission chargée de l'examen des Mémoires qui ont concouru pour le prix de Géométrie, relatif à la chaleur, propose de décerner le prix au Mèmoire n° 2 portant pour épigraphe: "Et ignem regunt numeri (Plato)". Le président ayant fait l'ouverture du billet cacheté joint au Mémoire, on y trouve le nom de Joseph Fourier. Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de transmission de la chaleur[...]; et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet Ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'Auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur.

La memoria non viene pubblicata. L'accettazione definitiva delle idee innovatrici di Fourier e la gloria non arriveranno prima del 1822.

Nel suo articolo del 1807, Fourier trovò la soluzione del problema al contorno

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad 0 < x < L\,, t > 0 \tag{11.23}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad t \geq 0 \tag{11.24}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leq x \leq L \tag{11.25}$$

$$|u(x,t)| \leq M \tag{11.26}$$

Nel fare questo, introdusse e sviluppò la teoria delle serie che in seguito vennero chiamate *serie di Fourier*. Anche se lo abbiamo già incontrato nella risoluzione di problemi dei capitoli precedenti, a costo di essere ridondanti, analizziamo passo per passo il metodo di Fourier.

Mediante il *metodo di separazione delle variabili* di Bernoulli, si cerca una soluzione particolare dell'equazione. Essendo l'equazione e le condizioni al contorno lineari e omogenee, si cerca una soluzione $u(x,t)$ che possa essere espressa come il prodotto di una funzione solo di x per una funzione solo di t, cioè $u(x,t) = X(x)T(t)$. Una soluzione di questo tipo è certamente molto particolare, tuttavia,

questa mancanza di generalità del metodo all'*inizio* è compensata alla *fine* dal prendere tutte le combinazioni lineari di soluzioni della forma XT.

Sostituendo $u = XT$ nella (11.23), si trova $XT' = DX''T$ e dividendo per DXT, si ottiene $X''/X = T'/(DT)$. Questa equazione non può essere verificata a meno che ciascun membro dell'equazione sia una costante indipendente da x e t. Chiamiamo $-\lambda^2$ questa costante. La ragione per scegliere la costante $-\lambda^2$ invece di λ verrà chiarita sotto. L'equazione (11.23) si separa allora in due equazioni ordinarie $X'' + \lambda^2 X = 0$ e $T' + \lambda^2 DT = 0$, le cui soluzioni sono $X = a\cos\lambda x + b\sin\lambda x$ e $T = ce^{-\lambda^2 Dt}$, dove a, b, c sono costanti di integrazione.

Risulta chiarito perché abbiamo scelto $-\lambda^2$: una costante positiva avrebbe implicato una crescita esponenziale nel tempo della soluzione, che non vogliamo (la scelta del quadrato invece è pura comodità: non volevamo scrivere ogni volta una radice quadrata). Poiché le soluzioni dipendono dal parametro λ (per il momento arbitrario), mettiamo in evidenza questo fatto e scriviamo

$$u_\lambda(x,t) = (a_\lambda \cos\lambda x + b_\lambda \sin\lambda x)\, e^{-\lambda^2 Dt}\,, \tag{11.27}$$

avendo assorbito, senza perdita di generalità, la costante c in a e b.

Imponiamo le condizioni al contorno. La condizione al contorno $u(0,t) = 0$ per tutti i $t \geq 0$ implica

$$u_\lambda(0,t) = a_\lambda e^{-\lambda^2 Dt} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

da cui concludiamo che $a_\lambda = 0$. La condizione al contorno $u(L,t) = 0$ per tutti i $t \geq 0$ implica

$$u_\lambda(L,t) = b_\lambda \sin(\lambda L) e^{-\lambda^2 Dt} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

$b_\lambda = 0$ fornisce la soluzione banale $u = 0$, che è poco interessante. Altre soluzioni (più interessanti) sono ottenute richiedendo che

$$\sin(\lambda L) = 0 \tag{11.28}$$

per cui λL deve essere un multiplo intero di π, cioè

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{L}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{11.29}$$

Si osservi che abbiamo tenuto solo i valori positivi di n, perché i valori negativi hanno l'effetto di cambiare il segno di $\sin\lambda_n x$ e possono quindi essere accomodati dalle costanti $b_{\lambda_n} = b_n$. Il caso $n = 0$ fornisce la soluzione banale $u = 0$. Eravamo partiti col cercare una soluzione, ne troviamo una successione

$$u_n(x,t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Essendo le equazioni (11.23) e (11.24) lineari e omogenee, la sovrapposizione lineare delle soluzioni u_n

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Dn^2\pi^2 t/L^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{11.30}$$

è ancora una soluzione ed è più generale delle singole soluzioni u_n. Imponendo adesso che sia soddisfatta la condizione iniziale (11.25), si ottiene l'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \tag{11.31}$$

nelle incognite b_n per la data funzione $f(x)$. Se sappiamo risolvere questa equazione, allora il gioco è fatto.

Fourier risolse l'equazione (11.31) con un trucco ingegnoso. Si moltiplichino ambo i membri della (11.31) per $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e si integrino tra 0 e L, scambiando la serie con l'integrale,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) f(x)\, dx\,. \tag{11.32}$$

Adesso si calcoli

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta\, d\theta$$

(avendo fatto il cambiamento di variabili $x = L\theta/\pi$). Dalla trigonometria (o dalla formula di Eulero):

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

Allora per $m \neq n$

$$\int_0^\pi \sin m\theta \sin n\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos(m-n)\theta - \cos(m+n)\theta\right] d\theta = 0\,,$$

e per $n = m$

$$\int_0^L \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]^2 dx = \frac{L}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 n\theta\, d\theta = \frac{L}{\pi}\times\frac{\pi}{2} = \frac{L}{2}\,.$$

Ne segue che

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \delta_{mn}\frac{L}{2}\,. \tag{11.33}$$

Sostituendo la (11.33) nella (11.32), si ottiene

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx\,. \tag{11.34}$$

Allora la (11.30), con b_n dato dalla (11.34) è la la soluzione del problema al contorno.

Non c'è niente di speciale in una serie di Fourier di seni. Serie di Fourier di coseni emergono in modo altrettanto naturale. Si consideri il *problema omogeneo di Neumann* in cui la (11.24) è sostituita dalla condizione

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0 \tag{11.35}$$

Nell'analisi precedente, nulla cambia fino alla (11.27). Per imporre le condizioni di Neumann, occorre calcolare la derivata della (11.27):

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x}(x,t) = (-a_\lambda \lambda \sin \lambda x + b_\lambda \lambda \cos \lambda x)\, e^{-\lambda^2 D t}\,, \tag{11.36}$$

La condizione di annullamento della derivata per $x = 0$ e per tutti i $t \geq 0$ implica

$$b_\lambda \lambda e^{-\lambda^2 D t} = 0 \quad \text{per tutti i } t \geq 0$$

da cui concludiamo che $b_\lambda = 0$ per $\lambda \neq 0$. L'annullamento della derivata per $x = L$ e per tutti i $t \geq 0$ implica $-a_\lambda \lambda \sin(\lambda L) e^{-\lambda^2 D t} = 0$, cioè, trascurando le soluzioni banali, $\sin(\lambda L) = 0$. Arriviamo così nuovamente alla (11.36), la cui soluzione è data dalla (11.29). Ma adesso sono i b_n ad essere nulli e le soluzioni possibili sono $u_n(x,t) = c_0$ (corrispondente a $\lambda = 0$) e

$$u_n(x,t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-D n^2 \pi^2 t/L^2}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Le equazioni analoghe alle (11.30) e (11.31) sono allora

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D n^2 \pi^2 t/L^2} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{11.37}$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x) \tag{11.38}$$

L'equazione (11.38) nelle incognite c_0 e a_n si risolve con lo stesso trucco di prima. La costante c_0 si trova immediatamente integrando ambo i membri della (11.38), scambiando serie con integrale e osservando che l'integrale dei coseni è nullo, per cui

$$c_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \tag{11.39}$$

Le costanti a_n si determinano moltiplicando ambo i membri della (11.38) per $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ e integrando tra 0 e L (sempre scambiando la serie con l'integrale). Adesso la relazione da usare (che, come prima, si trova con un po' di trigonometria) è

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \delta_{mn}\frac{L}{2} \tag{11.40}$$

Quindi

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx\,. \tag{11.41}$$

La soluzione del problema omogeneo di Neumann è allora la (11.37) con c_0 e a_n dati rispettivamente dalle equazioni (11.39) e (11.41). Si osservi che $c_0 = a_0/2$.

11.5 *Il metodo di Fourier nel linguaggio degli spazi vettoriali*

Consideriamo lo spazio lineare $C[a,b]$ delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Per due funzioni continue qualunque f e g, si definisca

$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}g(x)dx\,. \tag{11.42}$$

La dimostrazione che la (11.42) definisce un prodotto scalare in $C[a,b]$ è riportata a margine. Si tratta di un prodotto scalare molto importante detto *prodotto scalare* L^2.

Osserviamo che la disuguglianza di Cauchy- Schwartz introdotta nella sezione 2.6 vale anche per spazi di dimensione infinita (se si considera la dimostrazione datane nella sezione 2.6, si vede che la dimensionalità dello spazio non gioca alcun ruolo). Questo fatto permette di dimostrare che la norma

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f\,,\,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\,, \tag{11.43}$$

indotta dal prodotto scalare è davvero una norma, che è detta *norma* L^2 in $C[a,b]$.

In termini del prodotto scalare L^2, le (11.33) e (11.40) possono essere interpretate come relazioni di ortogonalità in $C[0,L]$ e riscritte come

$$\langle \mathsf{S}_m\,,\,\mathsf{S}_m\rangle = \delta_{mn}\frac{L}{2} \tag{11.44}$$

$$\langle \mathsf{C}_m\,,\,\mathsf{C}_n\rangle = \delta_{mn}\frac{L}{2} \tag{11.45}$$

avendo definito, per comodità, le funzioni

$$\mathsf{S}_k = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \mathsf{C}_k = \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \tag{11.46}$$

si osservi che dalle relazioni sopra segue che

$$||\mathsf{C}_n|| = ||\mathsf{S}_n|| = \sqrt{\frac{L}{2}}\,, \quad ||1|| = \sqrt{L}$$

Dimostrazione che (11.42) *definisce un prodotto scalare.*V erifichiamo che le proprietà (i), (ii) e (iii) della (2.30) sono verificate. La (i) è immediata; la (ii) segue dalla linearità dell'integrale e la (iii) è verificata in quanto le funzioni sono continue. Per quel che riguarda la (iii), preliminarmente, si osservi che per ogni funzione continua si ha

$$\langle f\,,\,f\rangle = \int_a^b \overline{f(x)}f(x)dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \geq 0$$

e che $\langle f\,,\,f\rangle < \infty$ poichè ogni funzione continua su un intervallo chiuso è limitata, cioè esiste una costante M tale che $|f(x)| < M$ per tutti gli $x \in [a,b]$ e dunque

$$\langle f\,,\,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx < M^2(b-a)\,.$$

Inoltre, se $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$, allora chiaramente $\langle f\,,\,f\rangle = 0$. D'altro canto, la condizione

$$\langle f\,,\,f\rangle = \int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0$$

insieme con la continuità di f in $[a,b]$, assicurano che $f(x) = 0$ per ogni $x \in [a,b]$. Perciò la (11.42) definisce un prodotto scalare in $C[a,b]$. □

Inoltre, per ottenere la serie di coseni si è usata la relazione di ortogonalità

$$\langle 1\,,\,\mathsf{C}_n\rangle = 0\,, \quad n = 1,2,\dots \tag{11.47}$$

I coefficienti a_n e b_n, dati rispettivamente dalle equazioni (11.34) e (11.41), possono essere riscritti come

$$b_n = \frac{2}{L}\,\langle \mathsf{S}_n\,,\,f\rangle \tag{11.48}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\,\langle \mathsf{C}_n\,,\,f\rangle \tag{11.49}$$

$$c_0 = \frac{1}{L}\,\langle 1\,,\,f\rangle \tag{11.50}$$

e le equazioni (11.31) e la (11.38) in linguaggio geometrico diventano

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\,\langle \mathsf{S}_n\,,\,f\rangle\,\mathsf{S}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{\mathsf{S}_n}{||\mathsf{S}_n||}\,,\,f \right\rangle \frac{\mathsf{S}_n}{||\mathsf{S}_n||} \tag{11.51}$$

$$f = \frac{1}{L}\,\langle 1\,,\,f\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L}\,\langle \mathsf{C}_n\,,\,f\rangle\,\mathsf{C}_n = \left\langle \frac{1}{||1||}\,,\,f \right\rangle \cdot \frac{1}{||1||} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{\mathsf{C}_n}{||\mathsf{C}_n||}\,,\,f \right\rangle \frac{\mathsf{C}_n}{||\mathsf{C}_n||} \tag{11.52}$$

Questo risultato è molto interessante perché ci permette di interpretare le serie di Fourier come decomposizioni di un vettore rispetto ad un insieme ortogonale di vettori.

Si osservi che abbiamo solo tradotto nel linguaggio degli spazi lineari quel che fece Fourier. Resta naturalmente aperto il problema della convergenza delle serie, problema che affronteremo nei prossimi capitoli.

Problemi

Problema 11.1. □ Per una corda di spostamento verticale $y = u(x,t)$, di densità lineare μ e tensione T, l'energia è

$$E = \underbrace{\int \frac{1}{2}\mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\int \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx}_{\text{energia potenziale}}$$
$$= \frac{\mu}{2}\int dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$= \frac{\mathcal{Z}}{2c}\int dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

dove si è introdotto l'impedenza $\mathcal{Z} = \sqrt{\mu T} = \mu v$. Dimostrare che l'energia si conserva nel corso del tempo.

Problema 11.2. □ Assumendo che la soluzione del problema di Cauchy (11.1) abbia la forma generale di d'Alembert (7.6) , si dimostri che

$$f(x) = \frac{1}{2}q(x) - \frac{1}{2v}\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx\,, \tag{11.53}$$
$$g(x) = \frac{1}{2}q(x) + \frac{1}{2v}\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx \tag{11.54}$$

per un qualunque x_0. Quindi si mostri che da queste equazioni segue la soluzione (11.2).

Aiuto. Dalla (7.6) e dalla sua derivata calcolate per $t = 0$, si ottengono le equazioni

$$q(x) = f(x) + g(x)$$
$$\frac{p(x)}{v} = -f'(x) + g'(x)$$

Integrare la seconda equazione tra un generico punto x_0 e x e risolvere il sistema nelle incognite f e g.

Problema 11.3. □ Sfruttando la simmetria del problema, si mostri direttamente (cioè senza usare la soluzione generale (11.7)) che la soluzione di

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = a \ \text{ per } \ x > 0\,, \quad u(x,0) = b \ \text{ per } \ x < 0\,, \end{cases}$$

è

$$u(x,t) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-s^2} ds\,.$$

Quindi si mostri che $u(x,t)$ è la soluzione che ottiene applicando la (11.7).

Aiuto. L'osservazione cruciale è che l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

è invariante per il cambiamento di scala

$$x \to \sqrt{\alpha}x\,, \qquad t \to \alpha t$$

e che lo stesso vale per il dato iniziale. Si cerchi allora una soluzione dell'equazione che abbia la stessa simmetria del problema, cioè una funzione del tipo

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\,.$$

(Per evitare complicazioni inessenziali, si divida l'equazione per D assorbendo la costante D nel tempo, cioè si ponga $t' = Dt$ e per semplicità si scriva t' anziché t e si risolva il problema per $D = 1$. Alla fine si ripristini la situazione originaria sostituendo t con Dt).

Problema 11.4. □ Con riferimento al problema 11.3, mostrare che per t che tende all'infinito si raggiunge una distribuzione di temperatura uniforme che è la media della due temperature iniziali.

Problema 11.5. □ Si considerino i valori delle costanti a e b nel problema 11.3 tali che il dato iniziale è la funzione di Heaviside (scalino unitario)

$$\mathrm{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0\,, \end{cases}$$

Quindi si usi il problema 7.4 per mostrare che

$$K_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

è soluzione dell'equazione del calore.

Problema 11.6. □ Dimostrare il metodo delle immagini basato sull'estensione dispari del dato iniziale per il problema al contorno (11.13).

Aiuto. La soluzione del problema per $x \in \mathbb{R}$ è data dall'integrale di d'Alembert (7.6), $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, imponendo una condizione esprimente che per $x = 0$ è $u = 0$ per qualunque t. Posto $s = vt$, questo si traduce nella condizione funzionale

$$0 = f(-s) + g(s) \quad \text{ossia} \quad f(-s) = -g(s)\,.$$

Sfruttare questa condizione per arrivare alla (11.63).

PROBLEMA 11.7. □ Verificare che la (11.17) è soluzione del problema al contorno (11.15).

PROBLEMA 11.8. □ Per determinare l'età della Terra, Kelvin considerò il seguente modello. La Terra è un corpo solido sferico che al tempo $t = 0$ era uniformemente alla temperatura di solidificazione T_s. Poiché i dati geologici suggeriscono che la temperatura superficiale della Terra non abbia subito variazioni significative dalla sua formazione, Kelvin assunse costante la temperatura sulla superficie della terra per tutto il periodo della sua storia. Qual è il problema al contorno più semplice che rende conto del modello di Kelvin?

PROBLEMA 11.9. □ Se si trascura il raggio di curvatura della Terra e per comodità si sceglie una scala di temperatura tale che la temperatura superficiale della Terra sia 0, il problema al contorno del modello di Kelvin può essere ulteriormente semplificato nel seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,, & x > 0\,,\ t > 0 \\ T(x,0) = T_s\,, & x > 0 \\ T(0,t) = 0\,, & t > 0\,, \end{cases}$$

dove $T(x,t$ è la temperatura a profondità x al tempo t. Assumendo che sperimentalmente si possa determinare il valore al tempo presente t di

$$v = \frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$$

e che D e T_s siano sperimentalmente determinabili sulla base di campioni di roccia sulla superficie terrestre, trovare una formula che esprima t in funzione di v, D e T_s.

Aiuto. Si usi la (11.17). La formula cercata è

$$t = \frac{T_s^2}{\pi D v^2}$$

PROBLEMA 11.10. □ Risolvere il problema al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & 0 < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = a \ \text{ per } \ 0 < x < 1\,, \\ u(x,0) = 0 \ \text{ per } \ x > 1\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0\,, & t > 0 \end{cases}$$

e interpretare fisicamente il risultato.

PROBLEMA 11.11. □ Si trovi la soluzione stazionaria del problema al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+ \\ |u(x,t)| < M \\ u(0,t) = A\cos\omega t \end{cases}$$

Aiuto. Si usi il formalismo complesso noto dalla teoria dei circuiti elettrici e si cerchi una soluzione del tipo $u = v(x)e^{i\omega t}$. Imponendo le condizioni di limitatezza e al contorno, si eliminino le costanti arbitrarie di integrazione. Prendendo la parte reale di quanto ottenuto, si arriva alla soluzione cercata, che è

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}\cos\omega\left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)$$

Nota. Il significato fisico del problema è come varia la temperatura sotto il suolo in presenza di una variazione periodica della temperatura sulla superficie: $x = 0$ è il livello del suolo, $x > 0$ misura la profondità. La soluzione ottenuta mostra che la temperatura u ad una qualsiasi profondità x è una funzione sinusoidale di t con ampiezza $Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}$ minore dell'ampiezza A in superficie, e la riduzione è tanto maggiore quanto maggiore è la profondità e quanto maggiore è la frequenza delle oscillazioni. La fase varia da punto a punto e, precisamente, le

oscillazioni si risentono verso l'interno con un ritardo $x/(\sqrt{2D\omega})$ proporzionale alla distanza x dalla superficie, cosa che si può esprimere dicendo che *le oscillazioni di temperatura si propagano nell'interno con una velocità $\sqrt{2D\omega}$ (tanto maggiore quindi quanto maggiore è la frequenza ω)*. Ne deriva, in particolare che per $x = \pi\sqrt{2D/\omega}$ le oscillazioni sono in opposizione di fase con quelle in superficie.

PROBLEMA 11.12. □ Studiare le variazioni di temperatura sotto il suolo in presenza delle variazioni di temperatura diurne e stagionali, cioè quando per $x = 0$ sono presenti due oscillazioni di frequenza ω_1 e ω_2. Considerando variazioni diurne e annue di 20^0 per un terreno ordinario terreno umido ($D \approx 0.0049\text{cm}^2/\text{s}$), fare un grafico delle curve ottenute e confrontare le variazioni diurne con quelle annuali.

Nota. Si può così verificare che la teoria (già sviluppata da Fourier) predice che ad una profondità di qualche metro le oscillazioni della temperatura sono in completa opposizione di fase di circa sei mesi (la temperatura nel terreno sarà più calda in inverno e più fredda in estate). (Il che spiega perché conviene avere la cantina di qualche metro sotto il livello del suolo :-)

PROBLEMA 11.13. □ Sia $u = u(x,t)$ l soluzione del problema di Dirichlet non omogeneo

$$u(0,t) = a\,, \quad u(L,t) = b\,, \quad t > 0$$

per l'equazione delle onde o del calore. Mostrare che ci si può ricondurre ad un problema omogeneo mediante opportuna trasformazione lineare da $u = u(x,t)$ a $w = w(x,t)$ in modo tale che

$$w(0,t) = 0\,, \quad w(L,t) = 0\,, \quad t > 0$$

PROBLEMA 11.14. Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin^3 x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

PROBLEMA 11.15. Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 3\,, t > 0 \\ u(0,t) = 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(3,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = \sin\dfrac{\pi x}{2} - \sin\dfrac{5\pi x}{6} \end{cases}$$

Nota. La condizione $\dfrac{\partial u}{\partial x}(3,t) = 0$ significa che nel suo estremo destro la sbarra è termicamente isolata e non c'è flusso di calore.

PROBLEMA 11.16. Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < 1\,, 0 < y < 1 \\ u(0,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = 0 & 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 0 & u(x,1) = \sin\frac{3\pi}{2}x \end{cases}$$

Soluzioni

Problema 11.1. □ Verifichiamo la conservazione dell'energia, calcolando dE/dt. Differenziando sotto il segno di integrale

$$E = \frac{\mathcal{Z}}{2c}\int dx \left[\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]$$

e integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\mathcal{Z}}{2c}\int dx \left[2\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}\right] \\ &= \frac{\mathcal{Z}}{v}\int dx \frac{\partial y}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

L'energia ad un qualunque tempo t ha dunque lo stesso valore che ha al tempo iniziale, $E(t) = E(0)$.

Problema 11.2. □ Dalla (7.6) e dalla sua derivata calcolate per $t = 0$, si ottengono le equazioni

$$q(x) = f(x) + g(x) \tag{11.55}$$

$$\frac{p(x)}{v} = -f'(x) + g'(x) \tag{11.56}$$

Integrando la (11.56) tra un generico punto x_0 e x, si ottiene

$$-f(x) + f(x_0) - g(x) - g(x_0) = \frac{1}{v}\int_{x_0}^{x} p(y)dy$$

che, sommata alla (11.55), fornisce

$$g(x) = \frac{1}{2}q(x) + \frac{1}{2v}\int_{x_0}^{x} p(y)dy + \frac{1}{2}[f(x_0) - g(x_0)]\,.$$

Dalla (11.55),

$$f(x) = q(x) - g(x) = \frac{1}{2}q(x) \; - \frac{1}{2v}\int_{x_0}^{x} p(y)dy \; - \frac{1}{2}[f(x_0) + g(x_0)]$$

Sostituendo le espressioni trovate nella (7.6), si ottiene

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[q(x-vt) + q(x+vt)\right] + \frac{1}{2v}\left[\int_{x_0}^{x+vt} p(x)\,dx - \int_{x_0}^{x-vt} p(x)\,dx\right],$$

da cui segue la (11.2).

Problema 11.3. □ Sia

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \tag{11.57}$$

e calcoliamone le derivate

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x}{2t^{3/2}} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = -\frac{x}{2t\sqrt{t}} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t^{1/2}} f'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \frac{1}{t} f''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Posto $s = x/\sqrt{t}$, dalla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

si ottiene

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{s}{2t} f'(s) - \frac{1}{t} f''(s)$$

che dà la seguente equazione per f ($t \neq 0$) $f'' + \frac{s}{2} f' = 0$. Usando il fattore integrante $\exp(\int \frac{s}{2} ds) = e^{s^2/4}$, questa diventa $\left(e^{s^2/4} f'(s)\right)' = 0$. Perciò, $e^{s^2/4} f'(s) = c_1$, dove c_1 è una costante arbitraria. Risolvendo per $f'(s)$ e integrando, otteniamo $f(s) = c_1 \int_0^s e^{-s^2/4} ds + c_2$ dove c_2 è un'altra costante arbitraria (abbiamo scelto una particolare primitiva, essendo liberi di farlo per la presenza della costante arbitraria c_2). Ritornando alla (11.57),

$$u(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = c_1 \int_0^{x/\sqrt{t}} e^{-s^2/4} ds + c_2$$

Mediante cambiamento di variabili $s = 2s'$ nell'integrale,

$$u(x,t) = c_1' \int_0^{x/(2\sqrt{t})} e^{-s'^2} ds' + c_2$$
$$= c_1 \int_0^{x/\sqrt{4t}} e^{-s^2} ds + c_2$$

(essendo la costante c_1 arbitraria). Ripristinando la costante D con la sostituzione $t \to Dt$, otteniamo

$$u(x,t) = c_1 \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-s^2} ds + c_2 \qquad (11.58)$$

Prendendo il limite $t0+$, si ottiene: se $x > 0$,

$$c_1 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds + c_2 = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2 \equiv a$$

e se $x < 0$,

$$c_1 \int_0^{-\infty} e^{-s^2} ds + c_2 = -c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2 \equiv b$$

La condizione iniziale $u(x,0)$ è dunque la funzione a scalino che vale a per x positivi e b per quelli negativi. Determiniamo c_1 e c_2 in funzione di a e b

$$c_1 = \frac{a-b}{\sqrt{\pi}} \qquad c_2 = \frac{a+b}{2}\,,$$

da cui segue

$$u(x,t) = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-s^2} ds\,. \tag{11.59}$$

PROBLEMA **11.4.** □ Nel limite per t che tende all'infinito l'integrale a secondo membro della (11.59) si annulla: il profilo iniziale di temperatura a scalino, a destra a e a sinistra b, tende verso la distribuzione di temperatura uniforme $\frac{1}{2}(a+b)$, che è la media delle due temperature iniziali.

PROBLEMA **11.5.** □ Per cambiamento delle unità di misura e di temperatura di riferimento la condizione iniziale del problema precedente può essere resa uguale alla *funzione di Heaviside* o *scalino unitario*

$$\mathrm{u}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0\,, \end{cases}$$

per la quale si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} e^{-s^2} ds\,. \tag{11.60}$$

Essendo l'equazione del calore lineare omogenea a coefficienti costanti, per il problema 7.4, anche

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)} = K_t(x)$$

è una soluzione (si ricordi la regola di Leibniz (5.55)), il che fornisce una verifica indipendente che il nucleo del calore è soluzione dell'equazione del calore per $t > 0$.

PROBLEMA **11.6.** □ La soluzione del problema per $x \in \mathbb{R}$ è data dall'integrale di d'Alembert (7.6), $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$, imponendo una condizione esprimente che per $x = 0$ è $u = 0$ per qualunque t. Posto $s = vt$, questo si traduce nella condizione funzionale

$$0 = f(-s) + g(s) \quad \text{ossia} \quad f(-s) = -g(s)\,. \tag{11.61}$$

Dunque, la soluzione generale è

$$u = f(x-vt) - f(-x-vt) \tag{11.62}$$

e contiene una sola funzione arbitraria invece di due.

Se sono assegnate q e p per tutta la corda, cioè per $x \in \mathbb{R}$, la funzione f risulta determinata per $x \in \mathbb{R}$. La (11.53) determina infatti $f(s)$ nel seguente modo. In primo luogo osserviamo che dalla (11.61) segue che $f(0) = g(0) = 0$. Allora, per $s > 0$, la (11.53) diventa

$$f(s) = \frac{1}{2}a(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s p(x)\,dx \quad s > 0\,.$$

Quanto a f per $s < 0$, essa è data dalla (11.61) unitamente alla (11.54),

$$f(s) = -g(-s) = -\frac{1}{2}a(-s) - \frac{1}{2c}\int_0^{-s} p(x)\,dx \quad s < 0$$

Se denotiamo con q^D e p^D le estensioni dispari di q e p,

$$q^D(s) = \begin{cases} q(s) & \text{per} \quad s > 0 \\ -q(-s) & \text{per} \quad s < 0 \end{cases} \qquad p^D(s) = \begin{cases} p(s) & \text{per} \quad s > 0 \\ -p(-s) & \text{per} \quad s < 0 \end{cases}$$

allora $f(s)$ può essere compattamente espressa come

$$f(s) = \frac{1}{2}q^D(s) - \frac{1}{2c}\int_0^s p^D(x)\,dx \quad -\infty < s < \infty\,,$$

in temini della quale possiamo calcolare la soluzione generale (11.62)

$$\begin{aligned} u &= f(x-ct) - f(-x-ct) \\ &= \frac{1}{2}q^D(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} p^D(x)\,dx - \frac{1}{2}q^D(-x-ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{-x-ct} p^D(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[q^D(x-ct) + q^D(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^0 p^D(x)\,dx + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} p^D(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[q^D(x-ct) + q^D(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} p^D(x)\,dx\right] \qquad (11.63) \end{aligned}$$

PROBLEMA 11.7. □

PROBLEMA 11.8. □ Sia $T = T(\mathbf{r}, t)$ la temperatura, C, la temperatura superficiale della Terra e R il raggio della Terra. Allora il problema al contorno è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial t} = D\Delta T = 0\,, |\mathbf{r}| \le R,\ t > 0 \\ T(\mathbf{r}, 0) = T_s\,, \quad \text{per tutti} \quad |\mathbf{r}| \le R \\ T(\mathbf{r}, t) = C\,, \quad \text{per tutti} \ |\mathbf{r}| = R \ \text{ e } \ t > 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 11.9. □ Dalla (11.17) segue immediatamente che

$$T(x,t) = \frac{T_s}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_0^\infty \left[e^{-(x-y)^2/(4Dt)} - e^{-(x+y)^2/(4Dt)}\right] dy$$

Allora

$$\begin{aligned} v &= \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \left\{\frac{T_s}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_0^\infty \left[-\frac{2(x-y)}{4Dt}e^{-(x-y)^2/(4Dt)} + \frac{2(x+y)}{4Dt}e^{-(x+y)^2/(4Dt)}\right] dy\right\}_{x=0} \\ &= \frac{T_s}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_0^\infty \frac{y}{Dt}e^{-y^2/(4Dt)}\,dy = \frac{T_s}{\sqrt{\pi Dt}}\left[-e^{-y^2/(4Dt)}\right]_0^\infty = \frac{T_s}{\sqrt{\pi Dt}}\,, \end{aligned}$$

da cui

$$t = \frac{T_s^2}{\pi D v^2}$$

PROBLEMA **11.10.** □

PROBLEMA **11.11.** □ Cerchiamo una soluzione stazionaria del tipo

$$u = v(x)e^{i\omega t}\,,$$

Sostituendo $u = v(x)e^{i\omega t}$ nell'equazione del calore, si ottiene

$$i\omega v(x) = D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,,$$

che ha soluzione

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x} + c_2 e^{-\sqrt{i\frac{\omega}{D}}x}\,.$$

per

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \cos\pi/4 + i\sin(\pi/4) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Dunque

$$v(x) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano imponendo la condizione che u sia limitata per $x \to \infty$ e che $u(0,t) = Ae^{i\omega t}$, quindi deve essere $v(0) = A$. Si ha così $c_1 = 0$ e $c_2 = A$ e quindi

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1+i)x}e^{i\omega t} = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}e^{i\omega\left(t-\frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)}$$

Passando alla parte reale

$$u(x,t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x}\cos\omega\left(t - \frac{1}{\sqrt{2D\omega}}x\right)$$

PROBLEMA **11.12.** □ Poiché il problema è lineare, se al suolo sono presenti due oscillazioni di frequenza ω_1 e ω_2 , la temperatura sarà la sovrapposizione lineare delle temperature per le due oscillazioni. Questo permette di confrontare le variazioni diurne e stagionali. Si trova così che l'assorbimento e la velocità di propagazione delle oscillazioni diurne sono maggiori di quelle annue. Ad esempio, per un ordinario terreno umido ($D = 0.0049\text{cm}^2/\text{s}$) un'escursione diurna di 20^0, si riduce a 0.86^0 a soli 36 cm di profondità (dove le oscillazioni sono opposte a quelle superficiali) e a 0.004^0 ad un metro. Un'escursione annua di 20^0, invece, si ridurrebbe a 17.5^0 a 30 cm, a 12.7^0 ad un metro e a 0.2^0 a 10 metri (a tale profondità si può dunque ritenere che la temperatura resti costante nel passaggio dall'estate all'inverno).

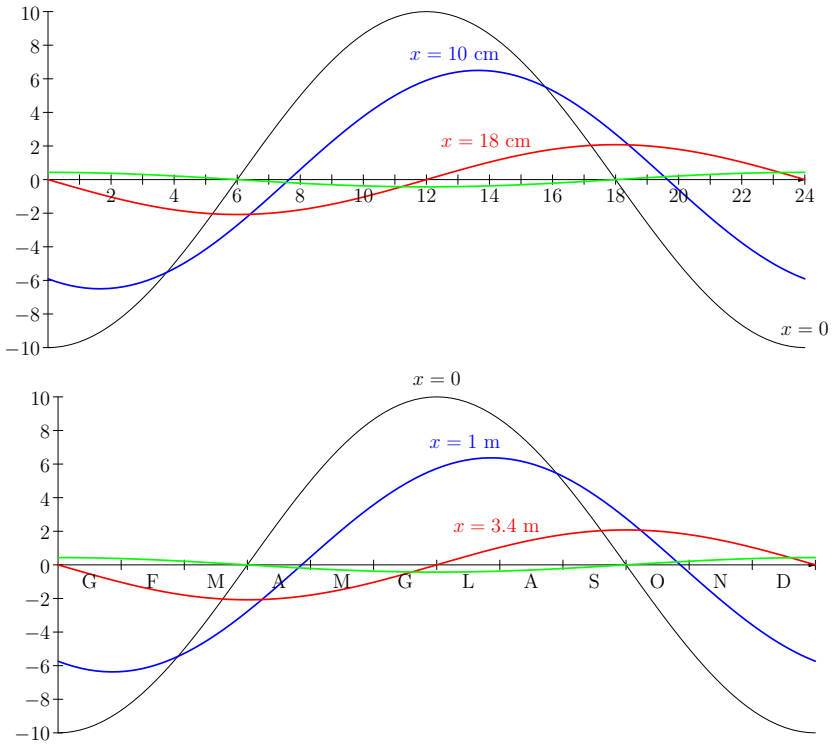


Figura 11.8: Variazioni di temperatura rispetto alla media (posta uguale a zero): giornaliera (in alto) e annua (in basso). La linea in verde corrisponde a $x = \pi\sqrt{2D/\omega}$ in entrambi i grafici (circa 36 cm per il primo e circa 8 m nel secondo). A questa profondità la variazione esterna di 20^0 si è ridotta ad una frazione di grado. In entrambi i grafici la linea in rosso corrisponde a $x = \pi\sqrt{2D/\omega}/2$. A questa profondità c'e opposizione di fase di circa 6 ore nel caso giornaliero e di 3 mesi in quello annuo.

Problema 11.13. □ Il problema di Dirichlet non omogeneo può essere ricondotto ad un problema omogeneo ponendo

$$w = u - a - \frac{b-a}{L}x\,, \tag{11.64}$$

per il quale si ha $w(0,t) = w(L,t) = 0$. Risolto il problema omogeneo per w, la soluzione del problema non omogeneo di partenza è

$$u = w + a + \frac{b-a}{L}x\,.$$

12
Tre vie che portano a Fourier

Indice

12.1 ***La via originaria*** 241

12.2 ***Serie di Fourier di soli seni o coseni*** 243

12.3 ***Serie di Fourier completa*** 246

12.4 ***Convergenza delle serie di Fourier*** 248

12.5 ***Il fenomeno di Gibbs*** 252

12.6 ***La via delle funzioni armoniche*** 254

12.7 ***La via della migliore approssimazione ai minimi quadrati*** 257

PROBLEMI 260

SOLUZIONI 261

12.1 La via originaria

La prima via che porta alla serie di Fourier è quella discussa nell'ultima sezione del capitolo precedente in modo del tutto identico alla trattazione che ne diede Fourier nel 1807 (a parte la traduzione nel linguaggio degli spazi vettoriali, che è moderna).

I matematici contemporanei di Fourier ritennero che la sua trattazione fosse lacunosa, essendo priva di una giustificazione che lo scambio della serie con l'integrale fosse lecito e di chiarimenti sulla convergenza delle serie alla funzione f. Nel 1829, Dirichlet trovò come condizioni sufficienti di convergenza delle serie di Fourier la continuità di f sul cerchio unitario e la continuità a tratti della derivata di f. Questi risultati sono uno dei temi centrali di questo capitolo. Prima, però, facciamo il punto su dove siamo arrivati alla fine del capitolo precedente. Incomiciamo col richiamare alcune nozioni sulle funzioni periodiche.

Gustav Lejeune Dirichlet (1805– 1829) è stato un matematico tedesco che diede profondi contributi alla teoria dei numeri, all'analisi e alla teoria delle serie di Fourier.

NOZIONE DI FUNZIONE PERIODICA Una funzione di variabile reale $f(x)$ è detta periodica di periodo P se per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x+P) = f(x)$, essendo P una costante positiva. Il minimo valore di P è detto *periodo minimo* di f, o semplicemente *periodo* di f. Ad esempio le funzioni

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right),$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ sono funzioni periodiche, di periodo $2L/n$ e $2L/m$ rispettivamente.

Una funzione periodica di periodo P può essere specificata considerando una qualunque funzione f in un intervallo $[a, b)$ ed estendendola per periodicità $f(x+P) = f(x)$ a tutta la retta reale. (La scelta di un intervallo aperto a destra è convenzionale: per l'estensione si sarebbe potuto scegliere l'intervallo $(a, b]$.) L'intervallo $[a, b)$ è detto intervallo fondamentale. Scegliendo $[-L, L)$, come intervallo fondamentale, si può passare, per ogni intero positivo N (arbitrariamente grande), a combinazioni lineari delle funzioni 1 (che è banalmente periodica per qualunque P), $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ e $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, e così ottenere la funzione

$$T_N(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{N} \left[p_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \tag{12.1}$$

che è periodica di periodo uguale al minimo comune multiplo di $2L/n$ e $2L/m$, al variare di n e m tra 1 e N, e quindi di periodo $2L$.

Una funzione della forma (12.1), con d_0, q_n, p_n, $n = 1, \ldots N$ e $x \in \mathbb{R}$ e a_N o $b_N \neq 0$, è detta *polinomio trigonometrico di grado* N. L'insieme dei polinomi trigonometrici forma uno spazio lineare reale di dimensione $2N + 1$. Sovente (ma non sempre), useremo unità di misura tali che $L = \pi$. In questo caso è d'uso (ma non d'obbligo) chiamare la variabile indipendente θ.

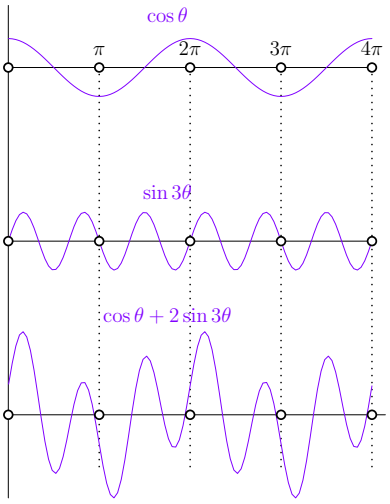


Figura 12.1: Il periodo di una combinazione lineare di funzioni periodiche è il minimo comune multiplo dei loro periodi.

IL CERCHIO $\mathbb{T}$ Funzioni periodiche sulla retta reale e funzioni sul cerchio unitario $\mathbb{T}$ sono sostanzialmente la stessa cosa: a una funzione continua su $\mathbb{T}$ corrisponde una funzione continua periodica su $\mathbb{R}$ e viceversa, a una funzione differenziabile su $\mathbb{T}$ corrisponde una funzione differenziabile periodica su $\mathbb{R}$ e così via.

Questa corrispondenza è chiara e semplice, ma occorre fare attenzione a quanto segue. Quando si rappresentano i punti del cerchio con l'angolo θ c'è arbitrarietà nella scelta dell'intervallo di variazione dell'angolo; ad esempio si può scegliere $\theta \in [-\pi, \pi]$ o $\theta \in [0, 2\pi]$. Fatta una scelta, è importante tenere presente che la funzione è continua, se essa ha lo stesso valore agli estremi; se ad esempio $\theta \in [-\pi, \pi]$ allora la funzione è continua se $f(-\pi) = f(\pi)$. Stessa accortezza

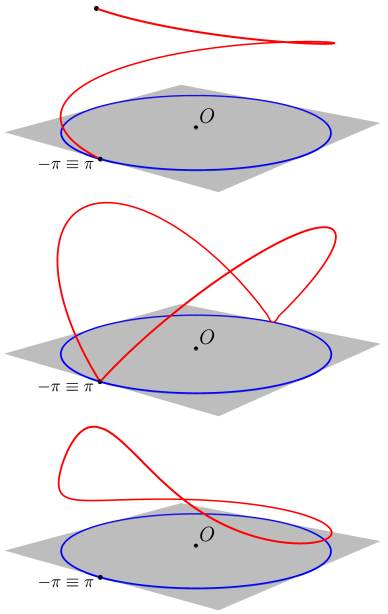


Figura 12.2: In alto è riportato il grafico della funzione $f(\theta) = \theta$, che *non è* continua sul cerchio unitario $\mathbb{T}$, in quanto $f(-\pi) \neq f(\pi)$. In mezzo, il grafico della funzione $f(\theta) = |\sin\theta|$, che invece è continua, ma con derivata discontinua in 0 e π. In basso, il grafico della funzione $1/(5 - 4\cos\theta)$, che è infinitamente differenziabile su $\mathbb{T}$.

per le derivate: la funzione ha derivata prima continua se la derivata prima esiste e ha lo stesso valore agli estremi, e così via.

12.2 *Serie di Fourier di soli seni o coseni*

Per brevità, chiameremo "buona" una funzione che soddisfa le condizioni di convergenza (quelle di Dirichlet, che studieremo nella prossima sezione, o altre che furono scoperte in seguito).

Sia f una funzione "buona" in $[0, L]$. Allora, per il trucco ingegnoso di Fourier visto nel capitolo precedente, si ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L] \tag{12.2}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.3}$$

Denoteremo con $S_N^{(s)} f$ la *somma parziale* dei primi N termini della serie di Fourier di seni, cioè

$$S_N^{(s)} f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{12.4}$$

Chiaramente, $S_N^{(s)} f$ è un polinomio trigonometrico di grado N.

È importante osservare che il secondo membro della (12.2) fornisce *l'estensione periodica dispari* $f^{\#D}$ di f da $[0, L]$ a tutta la retta reale. La funzione

$$f^{\#D}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

ha infatti le le seguenti proprietà: $f^{\#D}(-x) = -f^{\#D}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, è periodica di periodo $P = 2L$ e $f^{\#D}(0) = f^{\#D}(L) = 0$. Quindi, se vale la (12.2) in $[0, L]$, essa vale anche per la funzione $f^{\#D}$ sulla retta reale che è l'*estensione periodica dispari* di f.

Tavoletta di integrali utili

$$\int \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}$$
$$\int x\sin nx\,dx = \frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}$$
$$\int x^2\sin nx\,dx = \frac{2x}{n^2}\sin nx + \left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos nx$$

$$\int \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}$$
$$\int x\cos nx\,dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}$$
$$\int x^2\cos nx\,dx = \frac{2x}{n^2}\cos nx + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\sin nx$$

Esempio 12.1. Consideriamo la funzione $f(x) = x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$ e calcoliamone i coefficienti di Fourier b_n, usando la tavoletta sopra.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin nx\,dx = 2\int_0^\pi x\sin nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin nx\,dx \\ &= \left[2\left(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{n^3} - \frac{x^2}{n}\right)\cos nx\right]_0^\pi \\ &= -\frac{2\pi(-1)^n}{n} - \frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right] + \frac{2\pi(-1)^n}{n} \\ &= -\frac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

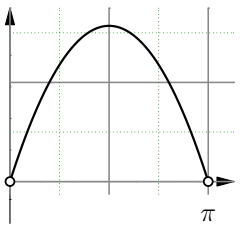


Figura 12.3: $f(x) = x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$.

Allora la serie di Fourier di seni della funzione $f(x) = x(\pi - x)$ è

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$$

La figura 12.5 mostra che la convergenza delle somme parziali della serie è molto rapida. In effetti, i moduli dei termini della serie a secondo membro sono maggiorati dalle costanti $M_n = (8/\pi)/(2n+1)^3$ e la serie $\sum M_n$ è convergente. Allora per il *Criterio M* di Weierstrass la serie converge uniformemente a $f(x) = x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$. Dunque $f(x)$ è una funzione "buona" in $[0, L]$ e si ha uguaglianza in $[0, \pi]$ tra la funzione e la serie, cioè

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right) \qquad x \in [0, \pi]$$

Inoltre, la serie converge uniformemente su tutta la retta reale alla funzione $f^{\#D}$ che è l'estensione periodica dispari di $f(x) = x(\pi - x)$, si veda la figura 12.5.

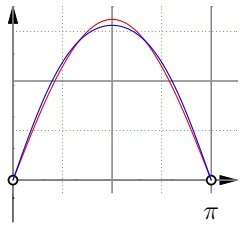


Figura 12.4: In blu il primo termine della serie di Fourier, in rosso la somma parziale per $N = 2$.

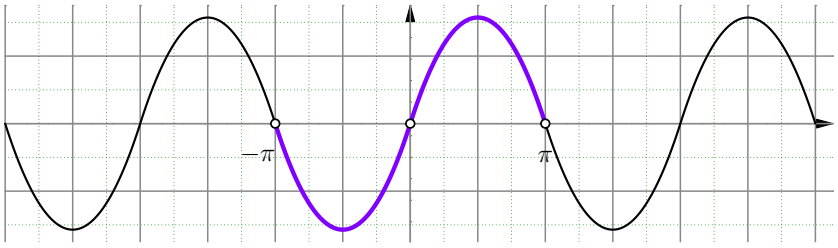


Figura 12.5: La serie di Fourier di seni della funzione $f(x) = x(\pi - x)$ in $[0, \pi]$ converge su tutta la retta reale alla funzione $f^{\#D}$ che è l'estensione periodica dispari di f.

SERIE DI FOURIER DI COSENI Sia f una funzione "buona" in $[0, L]$. Allora per quanto visto nel capitolo precedente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{12.5}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{12.6}$$

Valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per ila serie di seni: se vale la (12.5) in $[0, L]$, essa vale anche per la funzione $f^{\#P}$ sulla retta reale che è l'*estensione periodica pari* di f. La somma parziale dei primi N termini di una serie di Fourier di coseni è

$$S_N^{(c)} f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{12.7}$$

ESEMPIO 12.2. Consideriamo in $[0,\pi]$ la stessa funzione $f(x) = x(\pi - x)$ dell'esempio precedente, ma adesso la sviluppiamo in serie di coseni. Calcoliamo i coefficienti di Fourier a_n. Il primo termine $a_0/2$ è la media della funzione, e si calcola facilmente:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

Per $n \geq 1$, usando la tavoletta sopra, si ottiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos nx\,dx = 2\int_0^\pi x\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx \\ &= \left\{2\left(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x\sin nx}{n}\right) - \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right)\sin nx\right]\right\}_0^\pi \\ &= \frac{2}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right] - \frac{4}{n^2}(-1)^n \\ &= -\frac{2}{n^2}\left[(-1)^n + 1\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ dispari} \\ -\dfrac{4}{n^2} & n \text{ pari} \end{cases} \end{aligned}$$

Otteniamo così la serie di coseni

$$\frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$$

La convergenza della serie di coseni a $f(x) = x(\pi - x)$ è un po' più lenta di quella di seni (si veda la figura 12.6). Tuttavia, anche in questo caso, il criterio M di Weierstrass garantisce la convergenza uniforme, dunque $f(x)$ è una funzione "buona" in $[0, L]$ anche per lo sviluppo in serie di coseni. Inoltre, la serie di coseni converge uniformemente su tutta la retta reale alla funzione $f^{\#P}$ che è l'estensione periodica pari di $f(x) = x(\pi - x)$ (si veda la figura 12.7).

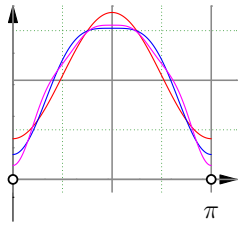


Figura 12.6: Somme parziali della serie di coseni per $N = 2, 3, 5$.

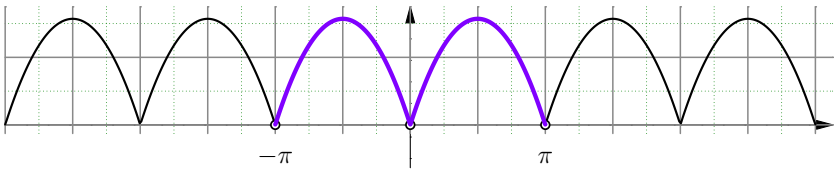


Figura 12.7: La serie di Fourier di coseni della funzione $f(x) = x(\pi - x)$ in $[0,\pi]$ converge su tutta la retta reale alla funzione $f^{\#P}$ che è l'estensione periodica pari di f.

Le serie di Fourier di soli seni o di soli coseni sono dette *serie di Fourier a intervallo dimezzato*. Esse sono le serie di Fourier di una funzione definita nell'intervallo $[0, L]$ ed estese a $[-L, L]$ nei due modi possibili: come funzione pari o come funzione dispari. Per un'estensione dispari, la serie è solo di seni, mentre per l'estensione pari, nello sviluppo sono presenti solo coseni e la funzione 1. Ovviamente, nell'intervallo $[0, L]$ le due serie convergono agli stessi valori, ma sulla retta reale definiscono differenti funzioni periodiche di periodo $2L$.

Ecco alcuni esempi di serie di Fourier di soli coseni, lasciando per esercizio il calcolo dei coefficienti.

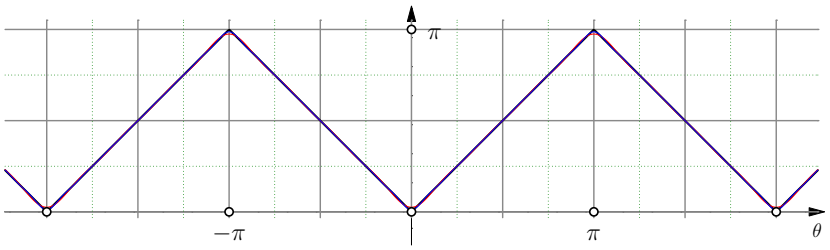


Figura 12.8: **Onda triangolare**

$$f(x) = |\theta| \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

Serie di Fourier:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2}\,.$$

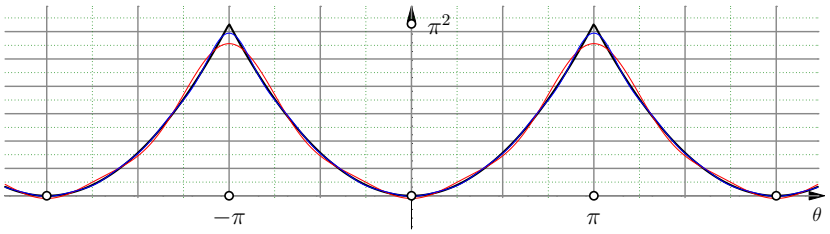


Figura 12.9: **Onda parabolica**

$$f(\theta) = \theta^2 \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

Serie di Fourier:

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\theta}{n^2}\,.$$

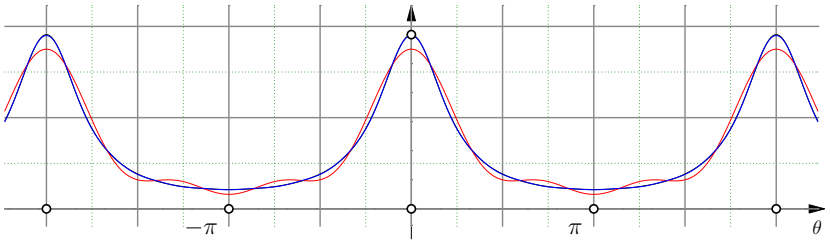


Figura 12.10: **Onda "liscia"**

$$f(\theta) = \frac{3}{5-4\cos\theta}\,, \quad -\pi \le \theta \le \pi$$

Serie di Fourier:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos n\theta\,.$$

12.3 *Serie di Fourier completa*

Una funzione può essere espressa come la somma della sua parte pari e di quella dispari

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]}_{f^P(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right]}_{f^D(x)}$$

Se f è periodica, f^D è periodica dispari, e se è "buona", essa ammette lo sviluppo di Fourier in seni (12.2) dove

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f^D(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx - \frac{1}{L}\int_0^L f(-x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx + \frac{1}{L}\int_{-L}^0 f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \\
&= \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx
\end{aligned}$$

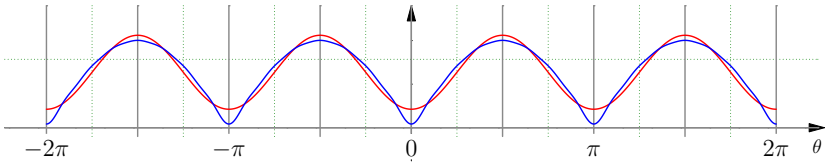


Figura 12.11: **Onda del modulo del seno**
$$f(\theta) = |\sin(\theta)|\,.$$
Serie di Fourier:
$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right]$$

Consideriamo adesso f^P. Se f^P è "buona" è sviluppabile nella serie di Fourier di coseni (12.5) e procedendo in modo analogo a prima si trova

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f^P(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,.$$

In conclusione,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \tag{12.8}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,, \tag{12.9}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,, \quad n = 1,2,\dots\,. \tag{12.10}$$

Questo è lo sviluppo completo di Fourier di una funzione periodica "buona". Le costanti a_n, b_n sono dette *coefficienti* o *coordinate* (reali) di Fourier della funzione $f(x)$.

Nel linguaggio degli spazi vettoriali della sezione 11.5, usando le notazioni (11.46), lo sviluppo completo di Fourier si rappresenta come

$$f = \left\langle \frac{1}{||1||}\,,\, f\right\rangle \cdot \frac{1}{||1||} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\langle \frac{\mathsf{C}_n}{||\mathsf{C}_n||}\,,\, f\right\rangle \frac{\mathsf{C}_n}{||\mathsf{C}_n||} + \langle \mathsf{S}_n\,,\, f\rangle\,\mathsf{S}_n\right] \tag{12.11}$$

ed è interpretato come la decomposizione del vettore f rispetto al sistema ortogonale $\{1, \mathsf{S}_n, \mathsf{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

FORMA COMPLESSA DELLE SERIE DI FOURIER Usiamo la formula di Eulero per esprimere i seni e coseni a secondo membro della (12.17) e, per brevità di scrittura, usiamo le notazioni (11.46) insieme con le notazioni abbreviate

$$\mathsf{E}_n \equiv \exp\left(\frac{in\pi}{L}x\right) \qquad \mathsf{E}_{-n} \equiv \exp\left(-\frac{in\pi}{L}x\right) \tag{12.12}$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} a_n\mathsf{S}_n + b_n\mathsf{C}_n &= a_n\frac{\mathsf{E}_n + \mathsf{E}_{-n}}{2} + b_n\frac{\mathsf{E}_n - \mathsf{E}_{-n}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2}\mathsf{E}_n + \frac{a_n + ib_n}{2}\mathsf{E}_{-n} \end{aligned}$$

Se poniamo

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}\,, \quad c_{-n} \equiv \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n}\,, \quad c_0 \equiv \frac{a_0}{2} \tag{12.13}$$

e osserviamo che $\mathsf{E}_0 = 1$, vediamo che la serie a secondo membro della (12.17) può essere riscritta come

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \mathsf{S}_n + b_n \mathsf{C}_n] = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \mathsf{E}_n + c_{-n} \mathsf{E}_{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathsf{E}_n$$

Quindi, ritornando alle notazioni originarie, la (12.17) diventa

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{n\pi}{L} x\right) \tag{12.14}$$

Dalla definizione dei c_n insieme con le (12.9) e (12.10), si ottiene

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx - \frac{i}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \exp\left(-i \frac{n\pi}{L} x\right) f(x) dx\,. \end{aligned} \tag{12.15}$$

I vettori E_n e E_m sono ortogonali tra loro per $m \neq n$. Infatti,

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{E}_n\,,\, \mathsf{E}_m \rangle &= \int_{-L}^{L} \exp\left(-i \frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(i \frac{m\pi}{L} x\right) dx \\ &= \int_{-L}^{L} \exp\left(i \frac{(m-n)\pi}{L} x\right) dx = 2L\delta_{nm} \end{aligned}$$

Allora le (12.14) e (12.15) possono essere riscritte compattamente come

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\mathsf{E}_n}{||\mathsf{E}_n||}\,,\, f \right\rangle \frac{\mathsf{E}_n}{||\mathsf{E}_n||}\,, \tag{12.16}$$

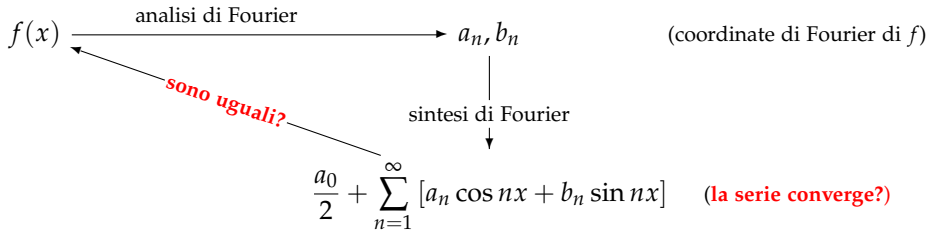
che è la decomposizione del vettore f rispetto all'insieme ortogonale $\{\mathsf{E}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

12.4 *Convergenza delle serie di Fourier*

Chiariamo adesso quali sono le funzioni "buone" per cui si ha convergenza delle serie di Fourier. Per comodità, scegliamo unità di misura tali che $L = \pi$.

Ricordiamo che lo sviluppo di $f(x)$ in serie di Fourier è stato ottenuto *assumendo* che la serie convergesse alla funzione $f(x)$ e che fosse lecita l'integrazione termine a termine della serie. Il problema matematico lasciato aperto è quello di stabilire quando queste assunzioni sono effettivamente giustificate. Questo è il problema fondamentale dell'*analisi di Fourier*.

Possiamo descrivere questo problema mediante il seguente diagramma:



Nel primo stadio di "analisi" vengono determinate le coordinate a_n, b_n: il requisito minimo a è l'integrabilità della funzione su $[\pi, \pi]$. Il secondo stadio consiste nella "sintesi" della serie di Fourier di f. A questo stadio la domanda cruciale è se la serie converga. L'ultimo stadio del processo è la risalita: la funzione ottenuta come serie, è uguale alla funzione di partenza $f(x)$?

Per rispondere alla prima domanda, si possono usare criteri di convergenza delle serie, alcuni dei quali sono stati incontrati nei primi capitoli, come il il *Criterio M* di Weierstrass o il *Criterio di Abel*. La risposta alla seconda domanda richiede più lavoro. L'intuizione originaria di Fourier era che il recupero di una funzione dalle sue coordinate di Fourier valesse per un'ampia classe di funzioni.

Per rispondere alla seconda domanda, studiamo il problema della convergenza delle somme parziali

$$S_N f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \,. \tag{12.17}$$

Usando le formule (12.9) per i corfficienti a_n e b_n, otteniamo

$$\begin{aligned} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right) \cos nx + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \right) \sin nx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left(\cos nu \cos nx + \sin nu \sin nx \right) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u-x) \, du \end{aligned} \tag{12.18}$$

Inoltre,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \, du \,. \tag{12.19}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos nx + b_n \sin nx] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \, du + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u-x) \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(N + \frac{1}{2})(u-x)}{\sin \frac{1}{2}(u-x)} du \end{aligned}$$

per il problema 1.9. Ricordando la definizione (10.27) di nucleo di Dirichlet e la parità di D_N, abbiamo

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-u)f(u)\,du = \frac{1}{2\pi} D_N \star f(x) \tag{12.20}$$

Se assumiamo che f sia una funzione periodica continua con derivata prima generalmente continua, dal teorema (10.32) segue immediatamente la convergenza di $S_N f(x)$ a f per N che tende all'infinito. Si ottiene così il seguente teorema, noto come teorema di Dirichlet.

Teorema di Dirichlet (I). Sia f una funzione periodica continua con derivata prima generalmente continua. Allora la successione delle somme parziali della serie di Fourier di f converge uniformemente a f quando N tende all'infinito. (12.21)

Un problema matematico molto interessante è di indebolire le ipotesi del teorema e studiare la convergenza della serie di Fourier associata. Nel 1873, il matematico tedesco Paul Du Bois-Reymond diede un esempio di serie di Fourier di una funzione continua che divergeva su un *insieme denso*. Questa scoperta rese chiaro che la continuità da sola non era sufficiente a garantire la convergenza delle serie di Fourier. Nel 1923 il matematico russo Andrej Kolmogorov (all'età di 21 anni !) trovò un esempio di funzione assolutamente integrabile (che è il requisito minimo per l'esistenza dei coefficienti di Fourier) che divergeva *quasi ovunque*; in seguito, questo risultato fu migliorato e mostrata la divergenza *ovunque*.

Il lavoro di ricerca sulla convergenza delle serie di Fourier continuò per tutto il Novecento, ma noi non entreremo (se non tangenzialmente) nel merito di questi sviluppi. Considereremo invece un indebolimento minimo delle ipotesi del teorema di Dirichlet ponendoci la seguente domanda: *che cosa succede quando la funzione f, con derivata prima generalmente continua, non è continua, ma soltanto generalmente continua?* Due esempi notevoli di questo tipo sono l'onda quadra e l'onda a dente di sega.

Un'*onda quadra dispari* è l'estensione periodica dispari di $f(\theta) = 1$ per $0 < \theta < \pi$, si veda la figura 12.12.

Essendo dispari la serie contiene solo seni con coefficienti

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos n\theta}{n}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 4/(n\pi) & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}.$$

Quindi la serie di Fourier associata all'onda quadra è

$$\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right] = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2n+1)\theta\right]}{2n+1}$$

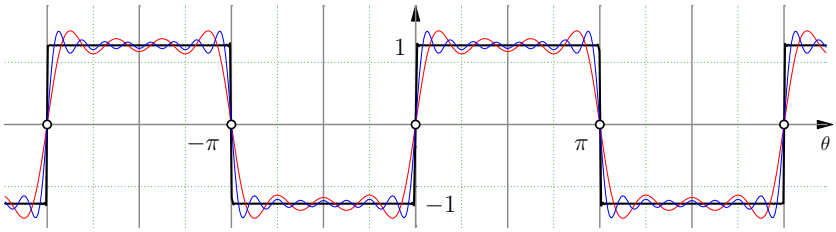


Figura 12.12: In figura sono rappresentate le somme parziali per $N = 4$ (in rosso) e per $N = 8$ (in blu) dell'**onda quadra dispari** (in nero).

Osserviamo che per $\theta = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la serie è identicamente nulla, e quindi converge a 0. In qualunque intervallo chiuso che non contenga questi punti, $S_N f$ converge uniformemente a f, ma se li contiene la convergenza non è uniforme.

L'estensione periodica di $f(\theta) = \theta$, per $-\pi < \theta \leq 2\pi$ è nota come "*onda a dente di sega*", si veda la figura 12.13. Anche in questo caso, essendo la funzione l'estensione periodica dispari di θ in $[0, \pi]$, sono presenti solo i coefficienti b_n, che valgono

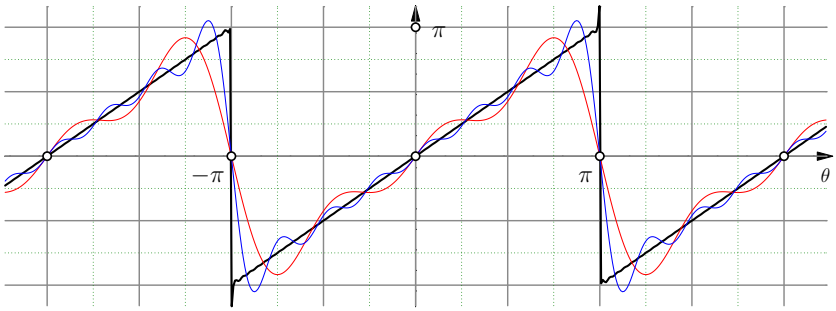


Figura 12.13: In figura sono rappresentate le somme parziali per $N = 4$ (in rosso) e per $N = 8$ (in blu) dell'*onda a dente di sega* (in nero).

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta \sin(n\theta)d\theta = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin n\theta}{n^2} - \frac{\theta\cos n\theta}{n}\right]_0^\pi = -\frac{2\pi}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2(-1)^n}{n}$$

Quindi la serie di Fourier del dente di sega è

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right] = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n\theta}{n}$$

Per $\theta = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, la serie è identicamente nulla, e quindi converge a 0 e in qualunque intervallo chiuso che non contenga questi punti si ha convergenza uniforme, ma se li contiene la convergenza non è uniforme.

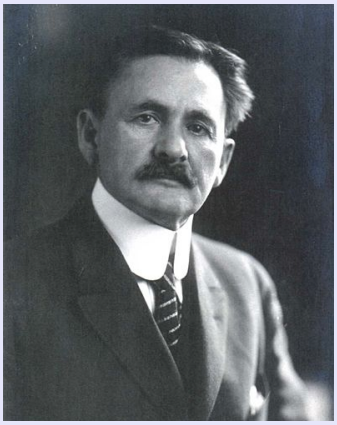
Si osservi che sia per l'onda quadra sia per l'onda a dente di sega, nei punti di discontinuità di f, la serie vale 0, che è la media dei limiti destro e sinistro del punto di discontinuità. Questo non è un caso, ma è un fenomeno del tutto generale, come stabilito dal seguente teorema.

Teorema di Dirichlet (II). Sia f una funzione periodica generalmente continua con derivata prima generalmente continua. Allora, per N che tende all'infinito, la successione delle somme parziali della serie di Fourier di f converge uniformemente a f in ogni intervallo che non contenga punti di discontinuità di f e converge alla media dei limiti destro e sinistro di f nei punti di discontinuità. (12.22)

La dimostrazione della a convergenza al valore medio dei limiti destro e sinistro nei punti di discontinuità di f, non è difficile e può essere ottenuta manipolando opportunamente il nucleo di Dirichlet in modo simile a come è stato fatto a pag. 209 e a pag. 209. Nel seguito, ne daremo una spiegazione che ha un significato fisico trasparente.

12.5 *Il fenomeno di Gibbs*

Il fisico americano Albert Michelson inventò molti strumenti di straordinaria precisione, soprattutto nel campo dell'ottica. Nel 1898, costruì un analizzatore armonico che permetteva di determinare le prime 80 coordinate di Fourier di una funzione $f(\theta)$ data graficamente. La macchina poteva anche essere usata come sintetizzatore armonico. Perciò Michelson procedette ad una verifica di precisione delle operazioni della macchina, perché, avendo ottenuto le prime 80 coordinate, la macchina doveva sintetizzarle e ridare la funzione originale con un elevato grado di precisione.



Albert Michelson (1852–1931) è stato un fisico americano noto per il suo lavoro sulla misura della velocità della luce e specialmente per l'esperimento di Michelson-Morley.

Michelson trovò che così era per la maggior parte delle funzioni analizzate, ma quando provò con un'onda quadra scoprì uno strano fenomeno. La sintesi riproduceva l'onda quadra (a parte piccole oscillazioni), ma al punto di discontinuità appariva una protuberanza che non era presente nella funzione originaria. Michelson era perplesso e pensava che forse qualche difetto meccanico interno della macchina poteva causare il problema. Scrisse allora a Gibbs, l'eminente fisico matematico, tra i padri della moderna meccanica statistica, chiedendogli la sua opinione. Gibbs investigò il fenomeno e lo spiegò (in una lettera a *Nature* nel 1899), sulla base della convergenza non uniforme delle serie di Fourier nella vicinanza di un punto di discontinuità.

In figura 12.14 è riprodotto quanto probabilmente osservò Michelson con il suo strumento. Lo stesso fenomeno per l'onda a dente di sega è illustrato in figura 12.15. Per analizzare quello che succede consideriamo l'onda a dente di sega (lasciando come esercizio l'ana-

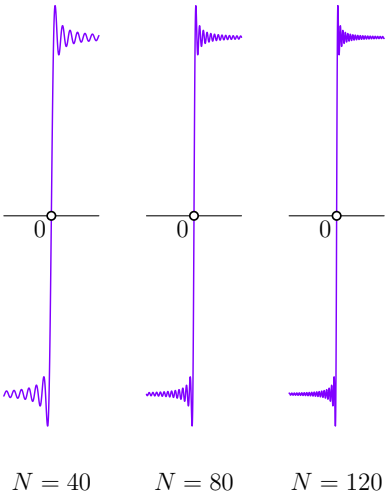


Figura 12.14: Fenomeno di Gibbs per l'onda quadra.

logo studio per l'onda quadra), la cui somma parziale N-esima della sua serie di Fourier è

$$S_N f(\theta) = -2 \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\sin n\theta}{n}.$$

Vogliamo stimare, al variare di N, l'errore massimo

$$E_{\max} = \sup |S_N f(\theta) - f(\theta)|. \tag{12.23}$$

A tal fine, determiniamo i massimi di $S_N f(\theta)$ calcolandone la derivata prima e ponendola uguale a 0. Poniamo inoltre $z = e^{i\theta}$. Si ha

$$\begin{aligned} S_N(f)'(\theta) &= -2 \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos n\theta = -2 \text{ Re } \left[\sum_{n=1}^{N} (-z)^n \right] \\ &= -2 \text{ Re } \left[(-z) \frac{1-(-z)^N}{1+z} \right] \end{aligned}$$

(ricordando la solita formula per la progressione geometrica). Perciò dobbiamo risolvere l'equazione

$$\text{Re } \left[(-z) \frac{1-(-z)^N}{1+z} \right] = 0$$

Si ha

$$\begin{aligned} &\text{Re } \left[(-z) \frac{1-(-z)^N}{1+z} \right] = \frac{1}{1+\cos\theta} \text{ Re } \left\{ e^{i\theta} \left[1-(-1)^N e^{iN\theta} \right] \left[1+e^{iN\theta} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{1+\cos\theta} \left\{ \cos\theta + 1 - (-1)^N \cos(N+1)\theta - (-1)^N \cos N\theta \right\} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \frac{1}{1+\cos\theta} \left\{ \cos(N+1)\theta + \cos(N+1)\theta \cos\theta + \sin(N+1)\theta \sin\theta \right\} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \cos(N+1)\theta + (-1)^N \frac{\sin(N+1)\theta \sin\theta}{1+\cos\theta} = 0 \end{aligned}$$

L'espressione si annulla quando $\theta^\star = (M/N+1)\pi$ e M ha la stessa parità di N. Evidentemente il massimo assoluto di $S_N f(\theta)$ in $[-\pi, \pi)$ si ha per

$$\theta^\star_{\max} = \frac{N}{N+1}\pi$$

Calcoliamo l'andamento di $S_N f\left(\theta^\star_{\max}\right)$ per $N \to \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} S_N(f)\left(\theta^\star_{\max}\right) &= -2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{nN\pi}{N+1}\right)}{n} = -2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{n\pi}{N+1}\right)}{n} \\ &= 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N+1}\right)}{n} = 2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)}{n\frac{\pi}{N}} \frac{\pi}{N} \end{aligned}$$

Ricordando l'esempio 5.4,

$$2 \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{N}\right)}{n\frac{\pi}{N}} \frac{\pi}{N} = 2 \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\theta} d\theta$$

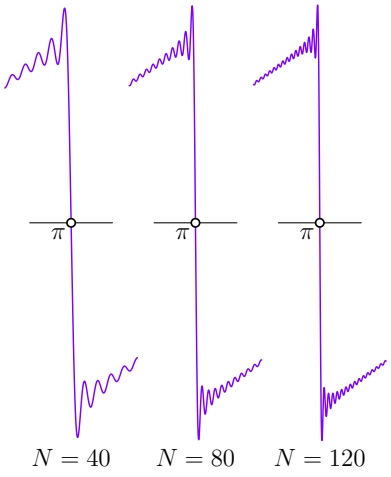


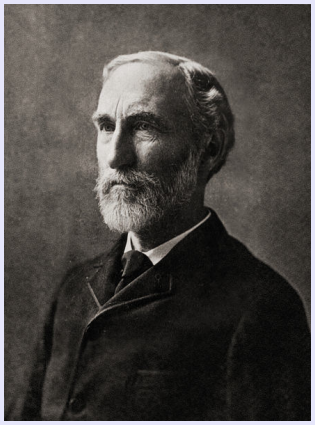
Figura 12.15: Fenomeno di Gibbs per l'onda a dente di sega.

La conclusione è dunque che *l'errore massimo non va a zero, ma si assesta su un valore costante per N grande!* Questo era l'effetto che Michelson osservò con la sua macchina armonica. Possiamo determinarne il valore numerico. Il calcolo numerico dell'integrale $2\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\theta}$ lo si può fare per sviluppo in serie di Taylor di $\sin\theta/\theta$ e poi passando all'integrazione termine a termine. Diciamo che ci basta un valore numerico con 3 cifre significative dopo la virgola. Si dovrebbe ottenere $\lim_{N\to\infty} S_N(f)(\theta^\star_{\max}) = 3.704$.

Si ha quindi uno sforamento (rispetto al valore $y = \pi$ della funzione in $\theta = \pi$) di 0.562 che è circa il 9% di 2π, cioè il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità $\theta = \pi$ (dove la funzione salta da π a $-\pi$). Questo fatto, detto *fenomeno di Gibbs*, è abbastanza universale: se ripetete il calcolo per l'onda quadra, trovate di nuovo uno sforamento di circa il 9% della variazione della funzione nel punto di discontinuità.

Questo assestamento dell'errore su un valore costante non è però incompatibile con la regola della media: nel punto di discontinuità si ha esatta compensazione tra l'errore a destra e quello a sinistra della discontinuità e la funzione converge alla media tra i limiti destro e sinistro. Come correttamente comprese Gibbs, questo fenomeno è una manifestazione dell'assenza di uniformità del limite in prossimità della discontinuità — l'errore massimo non va a zero.

Il fenomeno di Gibbs è stato anche sfruttato per scopi pratici; ad esempio, nel microscopio a contrasto di fase, permette di evidenziare il contrasto tra il contorno di un oggetto e lo sfondo.



J. Willard Gibbs (1839–1903) è stato un fisico, chimico e matematico americano. Gettò le basi della termodinamica chimica e della chimica-fisica. Come matematico, inventò il calcolo vettoriale moderno (indipendentemente da Oliver Heaviside). Come fisico matematico, fu il padre, insieme con Ludwig Boltzmann, della moderna meccanica statistica.

12.6 *La via delle funzioni armoniche*

La via che ha portato Fourier a scoprire le serie che prendono il suo nome è stata quella della ricerca di soluzioni dell'equazione del calore, ma c'è un'altra via, indipendente da questa, che parte dal problema di Dirichlet dell'equazione di Laplace nel disco unitario. Vediamo in che modo si arriva alle serie di Fourier se si segue questa via.

Per il problema 8.9, sappiamo che $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi)f(\phi)d\phi$ è una funzione *armonica* nel disco unitario. Se adesso sostituiamo nell'integrale lo sviluppo in serie $P_r(\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta$, ottenuto nel problema 10.7, abbiamo

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-\phi)f(\phi)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\theta-\phi)\right] f(\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)d\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n(\theta-\phi)f(\phi)d\phi\,, \end{aligned}$$

Essendo $\cos n(\theta-\phi) = \cos n\theta \cos n\phi + \sin n\theta \sin n\phi$, si ha

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n(\theta-\phi) f(\phi) d\phi = \underbrace{\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\phi f(\phi) d\phi\right]}_{a_n} \cos n\theta + \underbrace{\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\phi f(\phi) d\phi\right]}_{b_n} \sin n\theta$$

e $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi = \frac{a_0}{2}$. Quindi

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right] . \tag{12.24}$$

Ma per il teorema (10.26), $u(r,\theta)$ converge *uniformemente* a f quando r tende a 1, dunque

$$f(\theta) = \lim_{r\to 1} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right] \right\} . \tag{12.25}$$

Si arriva così alle serie di Fourier in un modo totalmente diverso da quello originario. In effetti, la storia avrebbe potuto seguire un corso differente e le serie di Fourier avrebbero potuto essere scoperte nel modo descritto sopra.

Inoltre, sembrerebbe che la (12.25) fornisca una versione più forte del teorema di Dirichlet, una versione secondo cui la convergenza delle serie di Fourier vale sotto la sola ipotesi di continuità della funzione f. Ma se le cose stessero davvero così si creerebbe un paradosso: come la mettiamo con i controesempi di Du Bois-Reymond e Kolmogorov a cui abbiamo accennato nella sezione 12.4?

Il paradosso si risolve riflettendo sul fatto che per stabilire la convergenza della serie di Fourier occorre scambiare il limite $r \to 1$ con la serie a secondo membro della (12.25). Questo non sempre è possibile: si può dimostrare che se valgono le condizioni di Dirichlet su f, lo scambio è lecito, ma che in generale, per una generica funzione continua, non lo è. Ciò nonostante, la (12.25) costituisce davvero un passo in avanti rispetto al teorema di Dirichlet.

L'IMPORTANTE CONTRIBUTO DI FEJÉR Il primo a capire l'importanza del risultato (12.25) fu il il matematico ungherese Lipót Fejér che suggerì di trasformare il problema centrale dell'analisi di Fourier nella seguente domanda: *è possibile recuperare i valori di una funzione integrabile dalla conoscenza delle sue coordinate di Fourier?*

Se per "recupero" si intende quello fornito dalla la sintesi di Fourier tradizionale,la risposta è in generale negativa (per i controesempi di Du Bois-Reymond e Kolmogorov). Tuttavia, Fejér si rese conto che possiamo sempre recuperare una funzione continua dalle sue coordinate di Fourier, se le sintetizziamo in una maniera diversa da quella

Lipót Fejér (1880-1959) è stato un matematico ungherese noto per i suoi lavori in analisi reale e complessa. Tra i suoi studenti di dottorato ci furono John von Neumann, Paul Erdös, George Pólya e Cornelius Lanczos. I suoi contributi all'analisi di Fourier sono dei primi anni del 900 e, secondo alcuni, diedero un'impronta significativa agli sviluppi dell'analisi di Fourier nei cinquant'anni successivi. Nella foto è a destra in piedi (a sinistra c'è il matematico greco Constantin Carathéodory, noto ai fisici per una formulazione geometrica della termodinamica).

Karl Weierstrass (1815–1897) fu un matematico tedesco, noto per l'instillazione del rigore in analisi e padre dell'analisi moderna. Fu docente per diverso tempo in scuole secondarie, dove, oltre alla matematica, insegnò fisica, botanica e ginnastica.

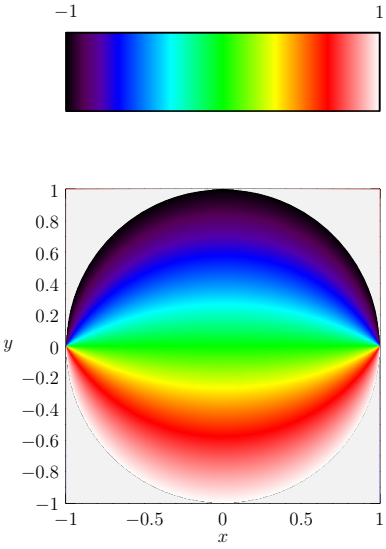
tradizionale, cioè se utilizziamo un modo diverso di sommare le serie infinite. Questo è proprio quello che fa la (12.25).

La (12.25) fornisce un recupero della funzione f a partire dalle sue coordinate di Fourier mediante una sintesi di Fourier opportunamente regolarizzata (se f è solo integrabile, la procedura permette un recupero dei suoi valori dove essa è continua). La differenza tra questa sintesi e quella classica è tutta nel fattore di regolarizzazione r^n. Questa regolarizzazione è chiamata *somma secondo Abel* della serie di Fourier (si vedano i complementi del Capitolo 4). Fejér usò la somma di Cesaro della serie, anziché la regolarizzazione di Abel, ma la differenza è ininfluente per le conclusioni a cui si perviene.

Distribuzione di temperatura in una piastra circolare. La soluzione $u = u(x, y)$ dell'equazione di Laplace nel disco unitario con condizioni al contorno (12.28) può essere calcolata esplicitamente. Si lascia come interessante esercizio dimostrare che che

$$u(x,y) = -\frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{2y}{1-x^2-y^2}\right).$$

Un esercizio altrettanto interessante di calcolo numerico è fare una planimetria ("contour plot") di questa funzione. Usando i colori per rappresentare i livelli, si ottiene un grafico come il seguente:



In termini fisici, $u(x, y)$ può essere interpretata come la distribuzione stazionaria di temperatura di una piastra circolare la cui metà superiore del bordo è mantenuta a temperatura costante, diciamo -10^0 C, e la metà inferiore al valore opposto, 10^0 C. Come ci si poteva aspettare da semplici considerazioni di simmetria, i punti del disco lungo il diametro tra 0 e π (inclusi i due punti sule cerchio) sono a temperatura 0, che è la media tra le due temperature sul bordo. Quando si passa a coordinate polari e si considera la temperatura come funzione dell'angolo θ a diverse distanze r dal centro, si ottiene il grafico di figura 12.16.

IL TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE DI WEIERSTRASS Un'altra ricaduta importante della (12.25) è che da essa segue immediatamente un teorema classico di analisi dovuto a Weierstrass:

> *Teorema di approssimazione di Weierstrass.* Le funzioni continue sul cerchio (e, in generale, su un intervallo chiuso della retta reale) sono approssimate uniformemente dai polinomi trigonometrici. (12.26)

Si consideri infatti il polinomio trigonometrico di grado N

$$S_N^r f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} r^n \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right], \tag{12.27}$$

dove a_n e b_n sono le coordinate di Fourier di f. Allora la (12.25) implica che per ogni precisione $\epsilon > 0$, esistono r_0 e N_0 tali che per tutti gli $r > r_0$ e $N > N_0$ $|f(\theta) - S_N^r f(\theta)| < \epsilon$. Quindi, non solo il teorema di Weierstrass risulta immediatamente dimostrato, ma viene fornita anche una formula esplicita per il polinomio trigonometrico approssimante.

CONVERGENZA AL VALOR MEDIO NEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ Supponiamo che f sia soltanto continua a tratti e sia θ_0 un suo punto discontinuità, e domandiamoci a quale valore converga la funzione

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right]$$

a secondo membro della (12.25). Per costruzione, u è armonica e rappresenta, ad esempio, la distribuzione di temperatura stazionaria in una piastra circolare quando il bordo è mantenuto a temperatura $f(\theta)$. Allora il suo valore in ogni punto (r, θ) è pari al valor medio di u lungo un piccolo cerchio centrato in (r, θ). Man mano che facciamo tendere r a 1 e al contempo rendiamo il raggio del cerchio centrato in (r, θ) sempre più piccolo, il contributo alla media sarà dominato dai

due valori di f immediatamente a destra e a sinistra di θ_0. Dunque, nel limite si ha che u tende alla media del limite destro e sinistro nel punto di discontinuità. In termini fisici, u converge alla temperatura media nel punto di discontinuità.

Come esempio, consideriamo la funzione $u(r,\theta)$ determinata dal valore al contorno

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad -\pi < \theta < 0 \\ -1 & \text{per} \quad 0 < \theta < \pi \end{cases} \tag{12.28}$$

Si veda la nota a margine e la figura 12.16. Si osservi la convergenza alla temperatura media nei punti di discontinuità e l'assenza del fenomeno di Gibbs.

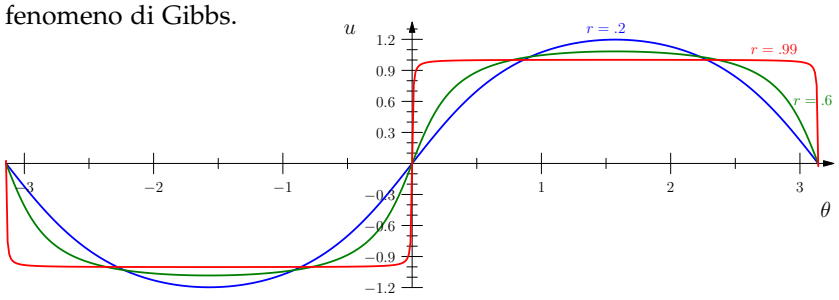


Figura 12.16: Grafico di $u(r,\theta)$ per $r = .2$, .6 e .99.

In un certo senso, si può dire che la serie di Fourier regolarizzata è ancora più interessante della serie classica, specialmente nelle applicazioni alla teoria dei segnali (ma anche in matematica pura). L'effetto della regolarizzazione è di pulire il segnale in presenza di variazioni rapide o discontinuità e quindi di filtrare via artefatti di riverbero, come il fenomeno di Gibbs; si veda la figura 12.17.

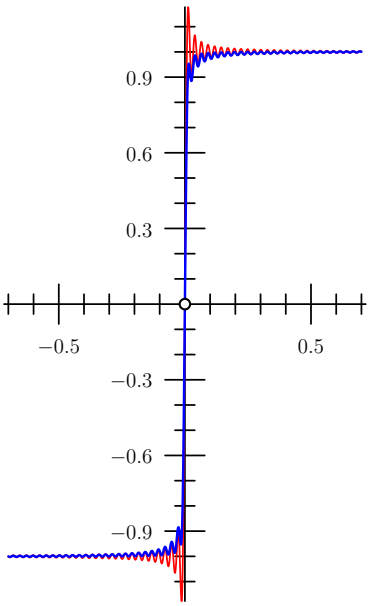


Figura 12.17: Onda quadra in un intorno dello zero. Confronto, per $N = 120$, tra la somma parziale classica (in rosso) e la somma parziale regolarizzata per $r = 0.994$ (in blu). Si noti l'assenza del fenomeno di Gibbs per la somma così regolarizzata.

12.7 *La via della migliore approssimazione ai minimi quadrati*

Supponiamo di voler sviluppare una teoria dell'approssimazione di funzioni sul cerchio mediante polinomi trigonometrici

$$T_N(\theta) = d_0 + \sum_{n=1}^{N} [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta]$$

Se riportiamo in un grafico gli "errori", cioè la curva rappresentata da $f(\theta) - T_N(\theta)$, tali errori appariranno ora positivi ora negativi. Occorre un criterio per valutare la bontà dell'approssimazione. Un tale criterio è l'errore massimo, l'efficacia del quale è garantita dal teorema di approssimazione di Weierstrass.

Un altro criterio è suggerito dalla regressione lineare dove, per evitare ogni compensazione fra errori positivi e negativi si considera il quadrato del modulo, cioè

$$|f(\theta) - T_N(\theta)|^2 .$$

Questo è l'errore quadratico per il singolo "dato" θ. L'errore quadratico totale si ottiene sommando tutti gli errori quadratici nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, vale a dire, si ha un'idea dell'errore compiuto mediante l'approssimazione *sull'intero intervallo* dal valore dell'integrale

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - T_N(\theta)]^2 \, d\theta \tag{12.29}$$

Notiamo che mentre l'approssimazione basata sull'errore massimo si basa su un concetto *locale* di errore, l'errore quadratico totale si basa su un concetto *globale*.

Il polinomio trigonometrico T_N fornisce la *migliore* approssimazione di $f(\theta)$ quando l'errore quadratico totale D è minimo. Ora tale errore dipende dai valori assegnati ai vari coefficienti d_0, p_n e q_n, quindi il minimo di D si troverà uguagliando a zero le derivate parziali di D rispetto ai coefficienti stessi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial d_0} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - T_N(\theta)] \, d\theta = 0 \\
\frac{\partial D}{\partial p_m} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - T_N(\theta)] \cos m\theta d\theta = 0 \\
\frac{\partial D}{\partial q_m} &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta) - T_N(\theta)] \sin m\theta d\theta = 0
\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} T_N(\theta) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ d_0 + \sum_{n=1}^{N} [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta] \right\} d\theta \\
&= 2\pi d_0 \\
\int_{-\pi}^{\pi} T_N(\theta) \cos m\theta d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ d_0 + \sum_{n=1}^{N} [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta] \right\} \cos m\theta d\theta \\
&= \pi p_m \\
\int_{-\pi}^{\pi} T_N(\theta) \sin m\theta d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ d_0 + \sum_{n=1}^{N} [p_n \cos n\theta + q_n \sin n\theta] \right\} \sin m\theta d\theta \\
&= \pi q_m
\end{aligned}$$

Quindi le equazioni di annullamento annullamento delle derivate forniscono

$$d_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \tag{12.30}$$

$$p_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos m\theta d\theta \tag{12.31}$$

$$q_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin m\theta d\theta \tag{12.32}$$

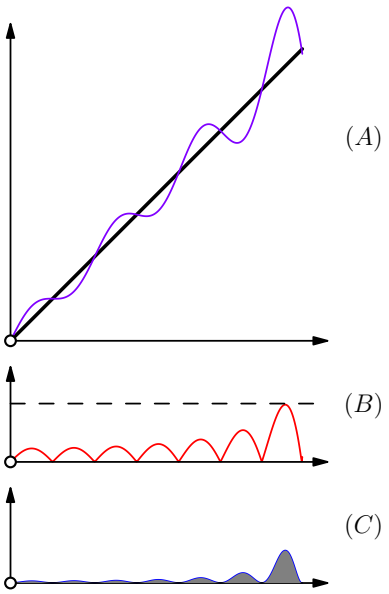


Figura 12.18: (A) Onda a dente di sega $f(\theta)$ tra 0 e π (in nero) e somma parziale di Fourier $S_N(\theta)$ per $N = 8$ (in viola). (B) Grafico dell'errore puntuale $|f(\theta) - S_N(\theta)|$; la linea tratteggiata indica l'errore massimo. (C) Grafico dell'errore quadratico puntuale $|f(\theta) - S_N(\theta)|^2$; l'errore quadratico totale è l'area della regione tra la curva e l'ascissa (in grigio). Dalle figure risulta chiaro che anche se l'errore massimo si stabilizza ad un valore costante (fenomeno di Gibbs), l'errore quadratico totale può diminuire costantemente all'aumentare di N.

che sono proprio le coordinate di Fourier di $f(\theta)$. Concludiamo quindi che le somme parziali $S_N f$ della serie di Fourier di una funzione f sono, tra tutti i polinomi trigonometrici di grado N, *la migliore approssimazione della funzione ai minimi quadrati*. In altre parole, per ogni N (arbitrariamente grande), le somme parziali $S_N f$ approssimano la funzione con il minimo errore quadratico totale. Si arriva così per un'altra via alle serie di Fourier, una via differente da quella originaria di Fourier e da quella delle funzioni armoniche sul disco.

Problemi

Problema 12.1. □ Si consideri il problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione del calore in $[0, L]$. Mostrare mediante calcolo esplicito che il metodo delle immagini e il metodo di Fourier forniscono, come ovviamente ci si aspetta, la stessa soluzione del problema.

Problema 12.2. □ Per l'onda quadra

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

calcolare la serie di Fourier

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$$

Per quali valori di x si ha convergenza puntuale? Per quali valori di x si ha convergenza uniforme?

Problema 12.3. □ Per l'onda triangolare

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$$

calcolare la serie di Fourier

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\,.$$

Per quali valori di x si ha convergenza puntuale? Per quali valori di x si ha convergenza uniforme?

Problema 12.4. □ Per l'onda parabolica

$$f(x) = x^2\,, \quad -\pi \le x \le \pi$$

calcolare la serie di Fourier

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}\,.$$

Per quali valori di x si ha convergenza puntuale? Per quali valori di x si ha convergenza uniforme?

Problema 12.5. □ Per l'onda

$$f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)\,, \quad -\pi \le x \le \pi$$

calcolare la serie di Fourier

$$12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^3}\,.$$

Per quali valori di x si ha convergenza puntuale? Per quali valori di x si ha convergenza uniforme?

Problema 12.6. □ Mostrare che la serie di Fourier dell'onda

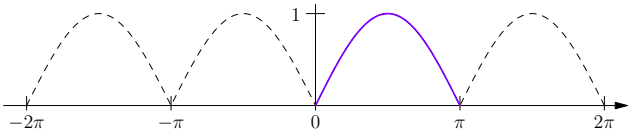
$$f(x) = \frac{3}{5 - 4\cos x}\,, \quad -\pi \le x \le \pi$$

è

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nx\,.$$

Per quali valori di x si ha convergenza puntuale? Per quali valori di x si ha convergenza uniforme?

Problema 12.7. □ Mostrare che l'estensione pari del seno $|\sin x|$



ha serie di Fourier

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \dots\right]$$

La serie converge uniformemente a $|\sin x|$?

Problema 12.8. □ Sia u la funzione scalino di Heaviside, $-\pi \le x \le \pi$,

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Mostrare che la serie di Fourier associata a u è

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \dots\right]$$

Per quali valori di x si ha convergenza puntuale? Per quali valori di x si ha convergenza uniforme?

Problema 12.9. □ Mostrare che la forma complessa della serie di Fourier associata a $u(x)$ è

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2\ell+1)ix}}{2\ell+1}$$

Problema 12.10. □ Sia $f(x) = e^{ax}$, $-\pi \le x \le \pi$. Mostrare che la serie di Fourier associata a $f(x)$ è

$$\frac{\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n(a+in)}{a^2+n^2} e^{inx}$$

Soluzioni

13
Proprietà delle serie di Fourier

Indice

13.1 ***Derivazione delle serie di Fourier*** **263**

13.2 ***Andamento all'infinito dei coefficienti di Fourier*** **264**

13.3 ***Velocità di convergenza delle somme parziali**** **266**

13.4 ***Integrazione delle serie di Fourier*** **266**

13.5 ***Teorema di convoluzione*** **267**

PROBLEMI **269**

SOLUZIONI **270**

13.1 Derivazione delle serie di Fourier

Questa capitolo è dedicato allo studio delle proprietà delle serie di Fourier rispetto alla derivazione, all'integrazione, alla velocità di convergenza delle somme parziali e al prodotto di convoluzione. In questo capitolo seguiremo la convenzione (in uso specialmente nella letteratura matematica) di denotare le coordinate di Fourier complesse c_n con il simbolo $\widehat{f}(n)$ e scrivere

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta} \,. \tag{13.1}$$

Questo rende più evidente l'analogia con gli integrali di Fourier che studieremo nel seguito.

Sia $f(\theta)$ derivabile con derivata prima continua in $\mathbb{T}$. Come abbiamo già sottolineato, questo implica che la funzione ha lo stesso valore in $-\pi$ e π e che la stesso vale per la derivata prima. Poiché $f(\theta)$ è derivabile, si integri per parti

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \,.$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in}e^{-in\theta}f(\theta)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{in}f'(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{in}\widehat{f'}(n)\end{aligned}$$

Dunque,

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n) \tag{13.2}$$

Ricordiamo a questo punto una notazione che è standard in matematica: $C^p(\mathbb{T})$ è l'insieme delle funzioni continuamente derivabili p volte. In particolare, $C^0(\mathbb{T})$ è lo spazio $C(\mathbb{T})$ dellle funzioni continue; $C^1(\mathbb{T})$ è lo spazio delle funzioni continue con derivata prima continua; $C^2(\mathbb{T})$ è lo spazio delle funzioni continue derivabili due volte, con derivate prima e seconda continua, e così via. Naturalmente, si ha $C^p \subset \cdots \subset C^2 \subset C^1 \subset C$.

Capito il gioco che porta alla (13.2), lo si può replicare: se $f(\theta)$ è derivabile due volte, con derivata prima e seconda continua, allora $\widehat{f''}(n) = -n^2\widehat{f}(n)$ e, più in generale, se $f \in C^p(\mathbb{T})$, allora

$$\widehat{f^{(p)}}(n) = (in)^p\widehat{f}(n)\,. \tag{13.3}$$

13.2 *Andamento all'infinito dei coefficienti di Fourier*

Un tema classico dell'analisi di Fourier è la relazione tra le proprietà di regolarità della funzione $f(\theta)$ e l'andamento all'infinito delle sue coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$. Se $f \in C^p(\mathbb{T})$ allora per la (13.3)

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(n)| &= \frac{1}{|n|^p}|\widehat{f^{(p)}}(n)| = \frac{1}{|n|^p}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(p)}(\theta)e^{-in\theta}d\theta\right| \\ &\leq \frac{1}{|n|^p}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f^{(p)}(\theta)|d\theta\right)\end{aligned}$$

Poiché $f^{(p)}(\theta)$ è per ipotesi continua nell'intervallo chiuso $[-\pi, \pi]$, sarà limitata da una costante finita e positiva C,

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^p}\,. \tag{13.4}$$

Risulta così dimostrato che:

Se $f \in C^p(\mathbb{T})$, allora le sue coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$ decadono almeno come $1/|n|^p$ per $|n| \to \infty$. (13.5)

A questo riguardo, tre commenti.

(1) L'inversa della (13.5) in generale non vale: la funzione ottenuta sintetizzando coordinate che decadono come $1/n^p$ non solo non è necessariamente una funzione derivabile p volte, ma non è detto neanche che sia una funzione continua. Come esempio, si consideri la funzione $f(\theta)$ che vale 1 se $\theta \in [0,1]$ e 0 altrimenti. La funzione è chiaramente discontinua e le sue coordinate sono

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} e^{-in\theta}d\theta = \frac{1-e^{-in}}{2\pi in}$$

Ne segue che $|\widehat{f}(n)| \leq 1/(\pi n)$, e dunque le coordinate di f decadono come $1/n$, ma la funzione non né derivabile né continua. Inoltre, l'onda parabolica della figura 12.9 ha coordinate che decadono come $1/n^2$, ma la funzione, pur essendo continua, non ha derivata prima continua.

(2) Dalla (13.5) segue immediatamente la dimostrazione del seguente teorema: *Se $f \in C^2(\mathbb{T})$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{T}$*. Infatti, se $f(\theta)$ è derivabile due volte, allora $|\widehat{f}(n)| \leq C/n^2$. Poiché $\sum 1/n^2$ è convergente, per il criterio M di Weierstrass della sezione 4.9, $\sum \widehat{f}(n)e^{in\theta}$ è uniformemente (e assolutamente) convergente.[1]

(3) Dalla (13.5) segue che *se f è nfinitamente derivabile, allora le sue coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$ decadono esponenzialmente in n per $|n| \to \infty$*. Infatti, in questo caso, la (13.5) stabilisce che le coordinate $\widehat{f}(n)$ vanno a zero più rapidamente di qualunque potenza inversa di n. Questo è il caso dell'onda "molto liscia" $f(\theta) = 3/(5-4\cos\theta)$, che è infinitamente derivabile, le cui coordinate di Fourier decadono come $2^{-n} = e^{-(\ln 2)n}$, cioè più rapidamente di qualunque potenza di $1/n$.

[1] Si osservi che non si può dimostrare in modo analogo che se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{T}$, in quanto l'informazione che le coordinate di f decadono almeno come $1/n$ non è sufficiente a stabilire la convergenza della serie.

Il seguente teorema stabilisce una condizione sufficiente abbastanza utile per stabilire proprietà di regolarità della funzione sulla base dell'andamento all'infinito dei suoi coefficienti di Fourier.

> Se le coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$ di una funzione f soddisfano
> $$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha} \qquad \text{per tutti gli} \quad |n| \gg 1$$
> per qualche potenza $\alpha > p+1$ e qualche costante positiva C allora la serie di Fourier
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$$
> converge uniformemente ad una funzione di classe C^p. (13.6)

(Gli ingredienti per la dimostrazione di questo teorema sono il *Criterio M* di Weierstrass e teorema (4.13), ma non daremo i dettagli

della dimostrazione). È importante che α sia strettamente maggiore di $p+1$ e non maggiore o uguale. Consideriamo infatti la funzione $f(\theta)$ del problema 12.5, i cui coefficienti $\widehat{f}(n)$ decadono come n^{-3}. Dunque, $\alpha = 3$ e quindi deve essere $p < 3-1 = 2$. Se ne conclude che la funzione è almeno di classe C^1, come in effetti è. Si osservi che essendo $f''(\theta) = -6\theta$, la funzione non è di classe C^2.

Osserviamo infine che l'applicazione del teorema (13.6) alle serie di Fourier dell'onda triangolare e dell'onda parabolica, per le quali $|\widehat{f}(n)| < C/n^2$, permette di concludere che le funzioni sintetizzate da questi coefficienti sono C^0, cioè continue (come in effetti sono).

13.3 *Velocità di convergenza delle somme parziali**

Più liscia è f più veloce è la convergenza delle somme parziali di Fourier. Più precisamente, si ha il seguente teorema: *Se $f \in C^p(\mathbb{T})$, per $p \geq 2$, allora esiste una costante C, indipendente da θ, tale che*

$$|f(\theta) - S_N f(\theta)| \leq \frac{C}{N^{p-1}}$$

e se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora esiste una costante C, indipendente da θ, tale che

$$|f(\theta) - S_N f(\theta)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

Questi risultati (che non dimostreremo) forniscono automaticamente la convergenza uniforme delle somme parziali di Fourier per funzioni C^p, $p \geq 1$ e quindi, in particolare, la dimostrazione del teorema: *Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora la sua serie di Fourier converge uniformemente in $\mathbb{T}$.*

13.4 *Integrazione delle serie di Fourier*

La parola d'ordine è che la derivazione peggiora la convergenza della serie di Fourier (in quando le sue coordinate sono moltiplicate per in), ma l'integrazione la migliora. Se la serie è uniformemente convergente, cossiché l'integrale può essere scambiato con il limite delle somme parziali, è chiaro che la serie può essere integrata termine a termine. Come effetto dell'integrazione le coordinate di Fourier $\widehat{f}(n)$ risultano moltiplicate per $1/(in)$. Ma anche se la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}$ associata a f non converge uniformenente, la serie di Fourier ottenuta per integrazione termine a termine converge, purché f sia assolutamente integrabile, cioè tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|\, d\theta < \infty\,. \tag{13.7}$$

Consideriamo l'esempio della serie di Fourier dell'onda quadra, che è una funzione discontinua,

$$Sf(\theta) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} .$$

L'integrazione termine a termine di questa serie fornisce

$$-\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\theta}{(2n+1)^2} + C$$

che converge ad una funzione continua, in accordo con il teorema (13.6). Se si sceglie la costante arbitraria $C = \pi/2$, si ottiene l'onda triangolare dell'esempio 2. Analogamente, per integrazione termine a termine dell'onda a dente di sega (discontinua), si passa all'onda parabolica (continua).

13.5 Teorema di convoluzione

Date due funzioni f e g integrabili, periodiche di periodo 2π, la loro convoluzione su $\mathbb{T}$ è la nuova funzione $f \star g$ data da

$$f \star g\ (\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) g(\theta - \phi) d\phi \,,$$

Il punto $\theta - \phi$ non sarà sempre in $[-\pi, \pi)$, ma poiché l'integrando è periodico di periodo 2π, conosciamo i valori della funzione integranda dappertutto sulla retta reale.

Il prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{T}$ ha proprietà analoghe all'analogo prodotto di funzioni su $\mathbb{R}$ che abbiamo studiato nella sezione 10.3. Più precisamente, siano f e g integrabili, periodiche di periodo 2π e sia c una costante. Allora

(i) $f \star g = g \star f$ (commutativo)

(ii) $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ (distributivo)

(iii) $(cf) \star g = cf \star g$ (omogeneo)

(iv) $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ (associativo)

(v) $\widehat{f \star g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

Le prime quattro proprietà sono immediate. Per funzioni continue la quinta proprietà è conseguenza di un semplice calcolo (vedi sotto). Una volta che questa proprietà è stabilita per funzioni continue, può essere estesa a funzioni integrabili mediante approssimazione di funzioni integrabili con successioni di funzioni continue, e questo

non lo faremo. Ecco il calcolo per funzioni continue f e g:

$$\begin{aligned}
\widehat{f \star g}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\star g\,(\theta)e^{-in\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)g(\theta-\phi)d\phi\right]e^{-in\theta}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\phi)e^{-in\theta}d\theta\right]d\phi \quad \text{(scambio dell'ord. d'integr.: OK funz. cont.)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\phi)e^{-in\theta}e^{in\phi}d\theta\right]d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta-\phi)e^{-in(\theta-\phi)}d\theta\right]d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta')e^{-in\theta'}d\theta'\right]d\phi \quad \text{(cambio di variabili } \theta'=\theta-\phi\text{)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)e^{-in\phi}\widehat{g}(n)d\phi \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)
\end{aligned}$$

Si osservi che al cambiamento di variabili $\theta' = \theta - \phi$ non corrisponde alcun cambiamento del dominio di integrazione perché l'integrando è una funzione periodica di periodo 2π.

Diamo adesso una lista di proprietà che si dimostrano facilmente sulla base di quanto visto finora (la loro dimostrazione è lasciata per esercizio).

(i) Se f e g sono continue anche $f \star g$ lo è.

(ii) La convoluzione di due funzioni integrabili e limitate è continua.

(iii) Se una funzione è derivabile n volte e l'altra m volte, la loro convoluzione è derivabile $n + m$ volte.

(iv) La convoluzione con un polinomio trigonometrico è un polinomio trigonometrico.

Problemi

Problema 13.1. □ Determinare la serie di Fourier della funzione $\frac{1}{2}x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, senza calcolarne esplicitamente i coefficienti di Fourier, ma sfruttando il fatto che la serie di Fourier di x è

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\,, \qquad -\pi < x \leq \pi\,.$$

Problema 13.2. □ Si consideri la formula del problema precedente per x e la si derivi rispetto a x. La derivata di x è 1 e la derivata della serie è

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos nx$$

cioè

$$2\cos x - 2\cos 2x + 2\cos 3x - \cos 4x + \ldots$$

che non è di certo 1: lo sviluppo di Fourier di 1 contiene un solo termine, 1 appunto (perché?). Spiegare dove si è sbagliato.

Soluzioni

14
Funzioni ortogonali e serie di Fourier

Indice

14.1 ***Convergenza in norma*** 271

14.2 ***Basi ortonormali in spazi infinito-dimensionali*** 275

14.3 ***Successioni a quadrato sommabile*** 278

14.4 ***Basi ortonormali per funzioni a quadrato integrabile*** 279

14.5 ***Completezza del sistema trigonometrico*** 282

14.6 ***Serie di Fourier in più variabili*** 283

PROBLEMI 285

SOLUZIONI 287

COMPLEMENTI 290

14.1 Convergenza in norma

Scopo di questo capitolo è chiarire il significato matematico della decomposizione (12.11),

$$f = \left\langle \frac{1}{||1||}\,,\, f \right\rangle \cdot \frac{1}{||1||} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\langle \frac{\mathsf{C}_n}{||\mathsf{C}_n||}\,,\, f \right\rangle \frac{\mathsf{C}_n}{||\mathsf{C}_n||} + \langle \mathsf{S}_n\,,\, f \rangle\, \mathsf{S}_n \right] \tag{12.11}$$

Il problema è duplice: occorre specificare quale sia il tipo di convergenza della serie a secondo membro della (12.11) e per quali funzioni valga tale sviluppo. Gli elementi cruciali per affrontare questo problema sono la nozione di *convergenza in norma* e quella di *base ortogonale* in un spazio vettoriale infinito-dimensionale dotato di prodotto scalare.

Incominciamo con la nozione di *spazio vettoriale normato*. Uno spazio vettoriale V (di dimensione finita o infinita) è detto *normato* se su di esso è definita una *norma* che assegna ad ogni vettore una

"lunghezza" e che soddisfa le proprietà (i), (ii) e (ii) della definizione (2.31).

PRODOTTI SCALARI E NORME L^2 Nella sezione 11.5 abbiamo già incontrato la *norma* L^2 in $C[a,b]$, lo spazio vettoriale delle funzioni continue in un intervallo $[a,b]$. Per comodità, riportiamo le definizioni date:

$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx\,, \tag{11.42}$$

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f\,,\,f\rangle} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx} < \infty\,. \tag{11.43}$$

Queste nozioni di prodotto scalare e norma sono un caso particolare di una nozione più generale. Talvolta è utile definire un prodotto scalare tra funzioni rispetto ad una funzione continua e positiva $\rho(x)$ nel seguente modo:

$$\langle f\,,\,g\rangle_\rho = \int_a^b \overline{f(x)} g(x)\rho(x) dx\,. \tag{14.1}$$

La funzione ρ è solitamente chiamata "peso" e la (14.1) è detta prodotto scalare L^2_ρ. La norma indotta da questo prodotto scalare è

$$||f||^2_\rho = \langle f\,,\,f\rangle_\rho = \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx\,. \tag{14.2}$$

Lasciamo come esercizio mostrare che le proprietà del prodotto scalare e della norma sono soddisfatte.

NORMA UNIFORME In $C[a,b]$, oltre alla norma L^2, si possono introdurre altre norme e quindi altre nozioni di vicinanza tra funzioni. La *norma del sup* o *norma uniforme* è così definita:

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,. \tag{14.3}$$

Come si può facilmente verificare, le proprietà (i) e (ii) della norma sono soddisfatte. Per quel che riguarda la disuguaglianza triangolare, essa è ovvia per numeri reali, $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$, e da questa discende

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)+g(x)| \le \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\,.$$

La norma uniforme *non è* indotta da un prodotto scalare. Un altro esempio di norma non indotta da un prodotto scalare è la *norma* L^1:

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx\,. \tag{14.4}$$

Si lascia come esercizio mostrare che la norma L^1 soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii) della norma.

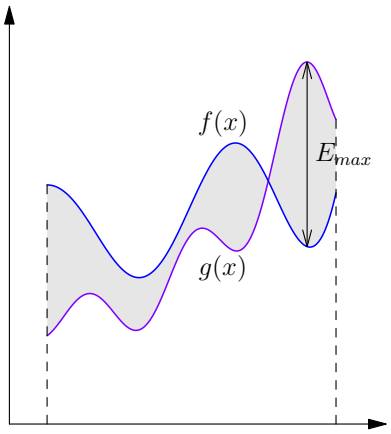


Figura 14.1: Distanze tra due funzioni f e g , $E_{max} = \sup|f(x) - g(x)|$ è la distanza nella norma uniforme. L'area della regione in grigio è la distanza in norma L^1. La norma L^2 è $\int |f(x) - g(x)|^2 dx$.

CONFRONTO TRA LA NORMA L^2 E LA NORMA UNIFORME In uno spazio normato di funzioni risulta ben definita la nozione di *distanza* tra due funzioni f e g,

$$\text{distanza tra } f \text{ e } g = ||f - g|| \tag{14.5}$$

Norme differenti forniscono nozioni di distanza differenti.

Confrontiamo la norma L^2 con la norma uniforme. La prima stima la distanza tra due funzioni in termini dell'area del quadrato della loro differenza e quindi media le differenze tra le due funzioni su tutto l'intervallo, fornendo così una stima globale media di quanto due funzioni siano vicine. Al contrario, la norma uniforme è molto più sensibile alle differenze locali in quanto stima la distanza tra le funzioni in termini del massimo della loro differenza (in figura 14.1, il segmento $E_{\max}$). In effetti, abbiamo già fatto questo confronto nella sezione 12.7: la norma uniforme corrisponde infatti alla nozione di errore massimo che là avevamo considerato e la norma L^2 all'errore quadratico totale (12.29).

CONVERGENZA IN NORMA In uno spazio vettoriale normato, essendo ben definita una nozione di distanza tra vettori, le nozioni di successione e serie di vettori sono una un'estensione diretta del loro analogo per i numeri complessi: basta sostituire il modulo con la norma e il gioco è fatto:

Sia $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$ una successione infinita di vettori nello spazio normato V. La successione converge al vettore $\mathbf{v}$ se $\lim_{n\to\infty} ||\mathbf{v} - \mathbf{v}_n|| = 0$. In tal caso si scrive $\lim_{n\to\infty} \mathbf{v}_n = \mathbf{v}$. (14.6)

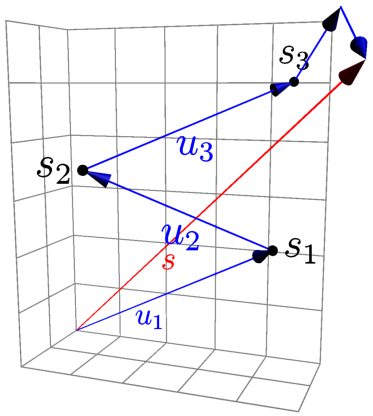


Figura 14.2: Una serie è una somma infinita di vettori. Vale comunque la regola del parallelogramma per la somma, come mostrato in figura. La figura illustra anche che $s_n = s_{n-1} + u_n$. Il vettore in rosso s è la somma di tutti i vettori u, in blu (se la serie converge),

In altre parole, la convergenza di una successione di vettori è definita come la *convergenza in norma* dei vettori della successione.

Come applicazione della nozione di convergenza in norma, dimostriamo ile seguente teorema:

La convergenza di funzioni continue nella norma uniforme è equivalente all'usuale nozione di convergenza uniforme. (14.7)

Dimostrazione. Convergenza uniforme a f della successione $f_1, f_2, \ldots$ di funzioni continue significa infatti che per ogni ϵ positivo esiste un N, lo stesso per tutti gli x in $[a, b]$, tale che $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ per tutti gli $n \geq N$ e tutti gli x in $[a, b]$. Quindi se $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ per tutti

gli x in $[a,b]$, lo stesso vale quando si passa al sup,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_n(x)| = ||f-f_n||_\infty \,,$$

e viceversa. □

La convergenza nella norma L^2 è detta *convergenza L^2* o *convergenza in media quadratica*. Una successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ in $C[a,b]$ converge in media quadratica a $f(x)$ se

$$\lim_{n\to\infty} ||f-f_n||_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x)-f_n(x)|^2 dx = 0$$

Il significato geometrico di questa convergenza era già stato illustrato nella figura 12.18. Questa figura fornisce un confronto tra la norma uniforme e la norma L^2 per la convergenza delle somme parziali di Fourier all'onda a dente di sega e mostra che due funzioni possono essere vicine nella norma L^2, ma distanti nella norma uniforme.

Tuttavia, essendo due funzioni più lontane nella norma uniforme, ci aspettiamo che se c'è convergenza uniforme, allora c'è anche convergenza L^2. Questo fatto è stabilito dal seguente teorema.

> Se f_n è una successione di funzioni continue che converge a f nella norma uniforme di $C[a,b]$, allora converge a f anche nella norma L^2. (14.9)

Il viceversa non è sempre vero. Il seguente contro-esempio mostra che la convergenza L^2 non implica la convergenza uniforme.

ESERCIZIO 14.1. Nell'intervallo $[-1,1]$, si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$$

e la successione di funzioni continue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \le x \le -1/n \\ nx+1 & \text{se} \quad -1/n < x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} ||f-f_n||_2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{-1}^1 |f(x)-f_n(x)|^2 dx} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{-1/n}^0 (nx+1)^2 dx}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 1/\sqrt{3n} = 0$$

Si ha così una successione di funzioni continue che nella norma L^2 converge ad un funzione che non è continua. La convergenza non può essere uniforme perché il limite uniforme di funzioni continue deve essere una funzione continua.

Dimostrazione di 14.9. Se una successione di funzioni continue f_n converge a f nella norma uniforme di $C[a,b]$, questo significa che per ogni $\epsilon > 0$, esiste un M tale che per tutti gli $n > M$,

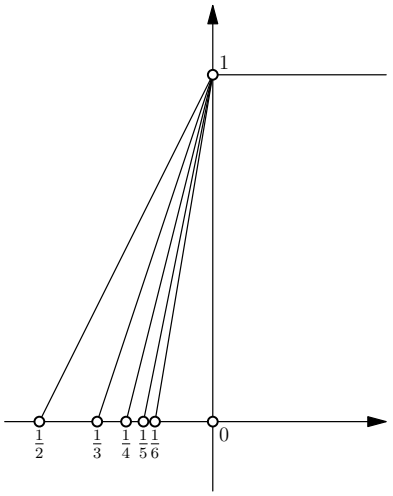
$$\sup |f(x)-f_n(x)| < \epsilon,$$

ma allora

$$||f-f_n||_2^2 = \int_a^b |f(x)-f_n(x)|^2 dx < \epsilon^2 (b-a)\,,$$

(14.8)

il che vuol dire che f_n converge a f nella norma L^2. □



SUCCESSIONI DI CAUCHY E SERIE IN SPAZI NORMATI Chiarita la nozione di convergenza in uno spazio vettoriale normato, la nozione di successione di Cauchy è immediata:

Successione di Cauchy in uno spazio normato. Una successione di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$ in uno spazio normato V è detta di Cauchy se $\left|\left|\mathbf{v}_{n+p} - \mathbf{v}_n\right|\right| < \epsilon$ per tutti gli n dopo un certo N, $p > 0$, qualunque sia il numero $\epsilon > 0$ arbitrariamente scelto. (14.10)

Altrettanto immediata è la nozione di serie infinita.

Serie convergente in uno spazio normato. Sia $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots\}$ una successione infinita di vettori nello spazio normato V. Se la successione delle somme parziali

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k$$

converge al vettore $\mathbf{s}$, la serie è detta convergente e si scrive

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k \,. \qquad (14.11)$$

14.2 *Basi ortonormali in spazi infinito-dimensionali*

Richiamiamo le definizioni (2.34) e (2.35) (2.40) e la definizione di sistema ortonormale (che mantengono la loro validità anche per spazi di dimensione infinita):

- Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vettori in uno spazio vettoriale V con prodotto scalare. Se $\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\rangle = 0$ i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono detti ortogonali.
- Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ vettori in uno spazio vettoriale V con prodotto scalare e sia $\langle \mathbf{e}_i\,,\, \mathbf{e}_j\rangle = 0$ per $i \neq j$. Allora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ è detto insieme (o sistema) ortogonale di vettori.
- Un insieme ortogonale di vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots$ è detto ortonormale se i vettori dell'insieme hanno norma unitaria, equivalentemente, se $\langle \mathbf{e}_i\,,\, \mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$.

Adesso riprendiamo il teorema (2.45) e ricordiamo che esso ammette una semplice interpretazione geometrica. Se $\mathcal{W}$ è il sottospazio di V generato dall'insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$, il teorema stabilisce che ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ può essere decomposto come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + \mathbf{v}_{\perp} \qquad (14.12)$$

dove

$$\mathbf{v}_{||} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}_i\,,\, \mathbf{v}\rangle\, \mathbf{e}_i \qquad (14.13)$$

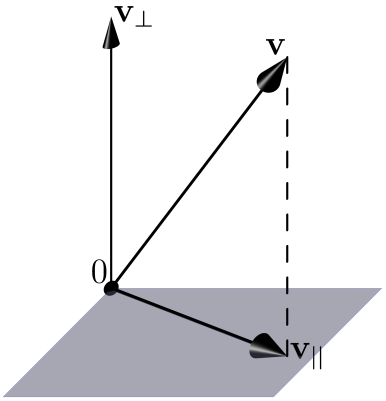


Figura 14.3: Decomposizione ortogonale di un vettore $\mathbf{v}$ come somma della sua componente $\mathbf{v}_{||}$ in $\mathcal{W}$ (il piano orizzontale in figura) e la sua componente verticale $\mathbf{v}_\perp$ nello spazio $\mathcal{W}^\perp$ (la direzione verticale in figura). La lunghezza della linea tratteggiata è la norma di $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$. Il vettore $\mathbf{v}_{||}$ è il vettore nel piano $\mathcal{W}$ che si trova alla distanza minima da $\mathbf{v}$. Qualunque altro vettore nel piano si trova ad una distanza maggiore da $\mathbf{v}$.

è la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{W}$ e $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$ è nello spazio $\mathcal{W}^\perp$ ortogonale a $\mathcal{W}$. Si veda la figura 2.7 che riportiamo a lato.

Come nel caso della geometria elementare, tra tutti i vettori in $\mathcal{W}$, $\mathbf{v}_{||}$ è quello che si trova alla distanza minima da $\mathbf{v}$. Questo fatto è stabilito dal seguente teorema la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Sia $\mathcal{W}$ il sottospazio di V generato dall'insieme ortogonale $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N\}$, $\mathbf{v}$ un qualunque vettore in V e $\mathbf{v}_{||}$ la proiezione di $\mathbf{v}$ su $\mathcal{W}$. Allora

$$\left|\left|\mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}\right|\right| < ||\mathbf{v} - \mathbf{u}|| \tag{14.14}$$

per qualunque altro elemento $\mathbf{u} \in \mathcal{W}$.

Consideriamo adesso l'insieme ortogonale troncato al termine N-esimo e calcoliamo $||\mathbf{v}_\perp||^2$. Per comodità, poniamo $c_k = \langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle$. Si ottiene

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}_\perp||^2 &= \left|\left|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{e}_k\right|\right|^2 = \left\langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{e}_i \, , \, \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= ||\mathbf{v}||^2 - 2\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \overline{c_i} c_k \delta_{ik} \\ &= ||\mathbf{v}||^2 - \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = ||\mathbf{v}||^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle|^2 \end{aligned}$$

Poichè $||\mathbf{v}_\perp||$ è necessariamente positivo (o al limite uguale a zero), si ha

$$||\mathbf{v}||^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle|^2 \geq 0 \, . \tag{14.15}$$

Poichè questa disuguaglianza vale per ogni N, passando al limite $N \to \infty$, si stabilisce il seguente risultato:

Disuguaglianza di Bessel. Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ un insieme ortonormale nello spazio vettoriale con prodotto scalare V e $\mathbf{v}$ un qualunque vettore in V. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq ||\mathbf{v}||^2 \, . \tag{14.16}$$

In uno spazio di dimensione finita, decidere che un insieme ortogonale è una base è una semplice questione di conteggio: se lo spazio ha dimensione N, un insieme ortogonale di N elementi è automaticamente una base. Nel caso infinito il conteggio non funziona, non basta che un insieme abbia infiniti elementi per essere una base. Intuitivamente, sembra naturale richiedere che un insieme ortonormale sia una base per uno spazio di dimensione infinita, quando "non si perde niente", nel senso del teorema di Pitagora (2.43), cioè

quando la disuguaglianza di Bessel è in effetti un'uguaglianza, oppure quando non esiste in V alcun vettore, oltre al vettore nullo, che sia ortogonale a tutti gli elementi dell'insieme. Questo ci porta alle seguenti definizioni:

Definizione di insieme completo. Un insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ nello spazio vettoriale con prodotto scalare V è detto completo se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle|^2 = ||\mathbf{v}||^2 \tag{14.17}$$

per qualunque vettore $\mathbf{v} \in V$. Questa uguaglianza è detta *identità di Parseval*.

Definizione di insieme chiuso. Un insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ nello spazio vettoriale con prodotto scalare V è detto chiuso se l'unico vettore $\mathbf{x}$ che soddisfa le equazioni

$$\langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{x} \rangle = 0 \, , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14.18}$$

è il vettore nullo.

Le nozioni di insieme chiuso e completo sono equivalenti:

Un insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ nello spazio vettoriale con prodotto scalare V è chiuso se e sole se è completo. (14.19)

Dimostrazione di 14.19. Supponiamo che l'insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ sia completo. Se non fosse anche chiuso esisterebbe un vettore $\mathbf{v}$ con $||\mathbf{v}|| > 0$ tale $\langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{v} \rangle = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. In tal caso avremmo

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{v} \rangle|^2 < ||\mathbf{v}||^2 \, ,$$

contro l'ipotesi che l'insieme sia completo. Viceversa, se l'insieme ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ fosse chiuso, ma non completo, esisterebbe un vettore $\mathbf{u}$ tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{e}_n \neq \mathbf{u}$$

e per il vettore

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{u} \rangle \, \mathbf{e}_n$$

si avrebbe

$$\langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{e}_n \, , \, \mathbf{u} \rangle = 0 \, ,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, contro l'ipotesi che l'insieme $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ sia chiuso. □

Si noti che, sulla base della (14.15), l'identità di Parseval significa che

$$\left|\left| \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k \right|\right|^2 \to 0 \quad \text{per} \quad N \to \infty \tag{14.20}$$

e, ricordando la definizione di serie convergente (14.11), questo significa che

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k \, . \tag{14.21}$$

In conclusione, ciascuna delle tre condizioni equivalenti, (14.17), (14.18) e (14.21), può essere riguardata come una definizione di *base ortonormale* per uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Riassumendo, un insieme ortonormale di vettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ è una base ortonormale nello spazio vettoriale con prodotto scalare V se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:

(i) Ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ può essere espresso come $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k$.

(ii) Per qualunque vettore vettore $\mathbf{v} \in V$ vale l'identità di Parseval: $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle \mathbf{e}_k \, , \, \mathbf{v} \rangle|^2 = ||\mathbf{v}||^2$.

(iii) Solo il vettore nullo è ortogonale a ogni vettore dell'insieme $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$.

14.3 *Successioni a quadrato sommabile*

Le successioni infinite di numeri complessi $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty \tag{14.22}$$

sono dette a *successioni a quadrato sommabile* e formano uno spazio lineare con addizione e moltiplicazione per un numero complesso così definite

$$(z_1, z_2, \ldots) + (w_1, w_2, \ldots) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots)$$
$$\alpha(z_1, z_2, \ldots) = (\alpha z_1, \alpha z_2, \ldots)\,.$$

Lo spazio così ottenuto è detto *spazio* ℓ^2.

La seguente forma hermitiana

$$\langle \mathbf{z}\,,\, \mathbf{w}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{z_i} w_i\,. \tag{14.23}$$

definisce un prodotto scalare in ℓ^2 e la norma indotta da questo prodotto scalare è proprio la (14.22),

$$||\mathbf{z}||^2 = \langle \mathbf{z}\,,\, \mathbf{z}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2\,. \tag{14.24}$$

Lo spazio ℓ^2 gioca un ruolo importante nella teoria degli spazi vettoriali infinito-dimensionali perché è lo spazio delle coordinate di un qualunque spazio vettoriale dotato di prodotto scalare: dato uno spazio con prodotto scalare V e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$ una base ortonormale in esso, gli elementi di V possono essere messi in corrispondenza con gli elementi di ℓ^2 nel seguente modo. Al vettore $\mathbf{v}$ si fa corrispondere la successione delle sue coordinate $c_k = \langle \mathbf{e}_k\,,\, \mathbf{v}\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$ e, come nel caso finito-dimenionale, possiamo rappresentare il vettore in termini delle sue coordinate,

$$\mathbf{v} = (c_1, c_2, \ldots)\,. \tag{14.25}$$

Per l'identità di Parseval,

$$\sum_k |c_k|^2 = ||\mathbf{v}|| < \infty\,.$$

Quindi $(c_1, c_2, \ldots)$ è in ℓ^2. Perciò la corrispondenza tra V e ℓ^2 è isometrica (cioè preserva la norma). Se $\mathbf{u}$ è un qualunque altro vettore in V, con coordinate $d_k = \langle \mathbf{e}_k\,,\, \mathbf{u}\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, allora

$$\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u} = \alpha(c_1, c_2, \ldots) + \beta(d_1, d_2, \ldots) = (\alpha c_1 + \beta d_1, \alpha c_2 + \beta d_2, \ldots) \in \ell^2,$$

Dimostrazione che ℓ^2 è uno spazio vettoriale. Per stabilire che ℓ^2 è uno spazio vettoriale occorre mostrare che la somma di due serie assolutamente convergenti è assolutamente convergente e che una serie assolutamente convergente moltiplicata per un numero è ancora assolutamente convergente. Si osservi che per ogni intero n si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |z_i + w_i|^2 &= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_i w_i) + |w_i|^2|| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + 2|z_i||w_i| + |w_i|^2 \\ &\le \sum_{i=1}^{n} (|z_i| + |w_i|)^2 + (|z_i| - |w_i|)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} 2|z_i|^2 + 2|w_i|^2 \\ &\le 2\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2\end{aligned}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha z_i|^2 = |\alpha|^2 \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \le |\alpha|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$$

Le due asserzioni seguono passando al limite $n \to \infty$.

Dimostrazione che (14.24) *è un prodotto scalare.* Per ogni n intero si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\overline{z_i} w_i| &= \sum_{i=1}^{n} |z_i||w_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}|z_i|^2 + \frac{1}{2}|w_i|^2\right) \\ &\le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2\,.\end{aligned}$$

Passando al limite $n \to \infty$, si vede che la serie converge assolutamente e quindi la (14.24) è ben definita per qualunque coppia di vettori in ℓ^2. Inoltre, essa soddisfa le proprietà (i), (ii) e (ii) del prodotto scalare (esercizio) e quindi definisce un prodotto scalare in ℓ^2.

il che vuol dire che la corrispondenza è un morfismo (preserva la struttura di spazio vettoriale).

La situazione è *quasi* del tutto analoga al caso finito-dimensionale è rimarchevole. Sottolineiamo "quasi" perché, a differenza del caso finito-dimensionale, *non è detto che la corrispondenza tra V e ℓ^2 sia biunivoca, cioè che a qualunque elemento $(a_1, a_2, \ldots)$ in ℓ^2 corrisponda un vettore $\sum_k a_k \mathbf{e}_k$ in V*. In altre parole, le coordinate di un vettore rispetto ad una base ortonormale in V sono successioni a quadrato sommabile, ma non tutte le successioni a a quadrato sommabile sono le coordinate di un vettore in V.

14.4 *Basi ortonormali per funzioni a quadrato integrabile*

La nozione di base ortonormale è particolarmente rilevante quando V è uno spazio vettoriale di funzioni per le quali prodotto scalare e norma L^2 sono ben definiti, per esempio per lo spazio delle funzioni continue $C[a, b]$ sull'intervallo chiuso $[a, b]$ a valori reali o complessi.

Si osservi che le (11.42) e (11.43) continuano a essere ben definite se si restringe lo spazio $C[a, b]$ e si considera, ad esempio, $C^\infty[a, b]$, cioè l'insieme delle le funzioni infinitamente differenziabili in $[a, b]$. Lo stesso vale anche se si allarga $C[a, b]$, e se si considerano, ad esempio, le funzioni generalmente continue che sono continue a tratti in $C[a, b]$, cioè le funzioni che sono continue in (un numero finito di) sotto-domini chiusi di $[a, b]$, come la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \end{cases},$$

considerata nell'esempio 14.1. Nello svolgimento dell'esempio abbiamo mostrato che f, nella norma L^2, è approssimata a piacere da una successione f_n di funzioni continue e in modo analogo si possono approssimare funzioni continue a tratti con funzioni continue. Abbiamo inoltre mostrato che una successione di Cauchy di funzioni continue può convergere nella norma L^2 ad un funzione che non è continua. Questo vuol dire che $C[a, b]$ non è completo rispetto alla norma L^2.

LO SPAZIO DI HILBERT DELLE FUNZIONI A QUADRATO INTEGRABILE Poiché è comodo lavorare con spazi completi, si può completare $C[a, b]$ costruendo un spazio più ampio che contiene tutte le successioni di Cauchy in $C[a, b]$ rispetto alla norma L^2. Questo spazio è usualmente denotato $L^2[a, b]$ e contiene tutte le *funzioni a quadrato integrabile* in $[a, b]$, cioè le funzioni f tali che

$$||f||_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \,. \tag{14.26}$$

Per costruzione, $C[a,b]$ è denso in $L^2[a,b]$. Lo spazio $L^2[a,b]$ è uno degli esempi più importanti di *spazio di Hilbert*, che è definito come uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare che è *completo* nella norma indotta da prodotto scalare (nel senso che tutte le successioni di Cauchy di elementi dello spazio convergono ad un elemento dello spazio). Per maggiori dettagli, si vedano i complementi alla fine del capitolo.

MIGLIORE APPROSSIMAZIONE E BUONA APPROSSIMAZIONE Riprendiamo le nozioni introdotte nella sezione 14.2, mettendo in luce il loro significato quando si ha a che fare con funzioni a quadrato integrabile. Sia $f(x)$, $x \in [a,b]$, una funzione in $L^2[a,b]$ e sia $\{e_n(x)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, una base ortonormale di funzioni in questo spazio. Denotiamo con $L^2_N[a,b]$ il sottospazio generato da $\{e_1(x), \ldots, e_N(x)\}$, per N fissato e sia

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n(x)\,,$$

$a_i \in \mathbb{C}$, una generica funzione in questo sottospazio.

Per approssimare una funzione $f \in L^2[a,b]$ mediante una funzione in $L^2_N[a,b]$ si deve determinare una funzione $g_N \in L^2_N[a,b]$ tale che che l'errore complessivo sia "piccolo", secondo un criterio appropriato. Un tale criterio è l'errore massimo, cioè la norma uniforme della differnza tra f e g_N

$$E^N_{\max} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_N(x)| = ||f - g_N||_\infty$$

Tuttavia, l'errore massimo, come abbiamo già sottolineato varie volte, è sensibile alle variazioni locali della funzione e una nozione più robusta è data dalll'errore quadratico medio totale, cioè cioè la norma L^2 della differnza tra f e g_N

$$E^{(N)}_{\text{q.m.}}(a_n) = \int_a^b [f(x) - g_N(x)]^2\, dx = ||f - g_N||_2^2 \tag{14.27}$$

Il teorema (14.14) stabilisce allora che la funzione in $L^2_N[a,b]$ che meglio approssima f , nel senso di rendere minimo l'errore quadratico medio, è quella per cui $a_n = \langle e_n\,,\, f\rangle$, cioè

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \langle e_n\,,\, f\rangle = \sum_{n=1}^{N} \left[\int_a^b \overline{e_n(y)} f(y) dy\right] e_n(x) \tag{14.28}$$

che è dunque la migliore approssimazione di f ai minimi quadrati.

Per la (14.20), il fatto che $\{e_n(x)\}$ sia una base significa che l'errore quadratico medio calcolato per $a_n = \langle e_n\,,\, f\rangle$ tende a 0 quando N tende all'infinito,

$$\lim_{N\to\infty} E^N_{q.m.}(c_n) = \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} \langle e_n\,,\, f\rangle\, e_n(x)\right|^2 dx = 0\,, \tag{14.29}$$

il che significa che f_N solo è la *migliore* approssimazione di f, ma è anche una *buona* approssimazione.

Identità di Parseval e uguaglianza in media quadratica

Consideriamo adesso l'identità di Parseval per funzioni: siano $c_n = \langle e_n\,,\, f\rangle$ le coordinate di una funzione a quadrato integrabile su $[a,b]$ rispetto ad una base ortonormale $\{e_n(x)\}$. Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\,dx \tag{14.30}$$

Si consideri adesso l'equazione (14.21) per funzioni. È importante fare attenzione che essa NON significa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x)\,, \tag{14.31}$$

perchè questo vorrebbe dire che la serie a secondo membro converge a $f(x)$ puntualmente, cioè per ogni valore di x, mentre il significato della (14.21) è la convergenza in norma, cioè la convergenza data dalla (14.29). In effetti, la serie a secondo membro della (14.31) può assumere valori diversi da $f(x)$ in molti punti di $[a,b]$ (l'insieme di questi punti può addirittura essere non numerabile), pur continuando ad essere soddisfatta la (14.29). Per evitare fraintendimenti, invece della (14.31), si potrebbe scrivere

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x)\,, \tag{14.32}$$

dove "$\overset{L^2}{=}$" significa *uguaglianza in media quadratica*, cioè nel senso della (14.29). Un'altro modo di rappresentare f evitando fraintendimenti è la (14.25), cioè in termini delle coordinate di f rispetto alla base $\{e_n(x)\}$, cioè

$$f = (c_1, c_2, \ldots)\,.$$

Spesso, con abuso di notazione, si usa la (14.31) (non c'è niente di male in questo, purché si tenga presente che non si tratta di un'identità puntuale).

Osserviamo infine che l'osservazione alla fine della sezione 14.3 risulta particolarmente chiara per spazi di funzioni: se le funzioni $e_n(x)$ sono lisce, costituiscono una base per spazi di funzioni differenti, per esempio, lo spazio delle funzioni continue, quello delle funzioni con derivata prima continua, e così via. Poiché si tratta di spazi diversi, ciascuno di essi non può essere in corrispondenza biunivoca con ℓ^2. Uno spazio di funzioni in $[a,b]$ che può essere messo in corrispondenza biunivoca e isometrica con ℓ^2 è lo spazio $L^2[a,b]$. Per maggiori dettagli su questo, si vedano i complementi alla fine del capitolo.

14.5 *Completezza del sistema trigonometrico*

In questa sezione mostriamo che il sistema trigonometrico

$$\left\{ \frac{1}{||1||_2}, \frac{S_n}{||S_n||_2}, \frac{C_n}{||C_n||_2} \right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{cioè, in } [-\pi, \pi], \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

è una *base ortonormale* in $L^2(\mathbb{T})$ e ne esaminiamo le conseguenze.

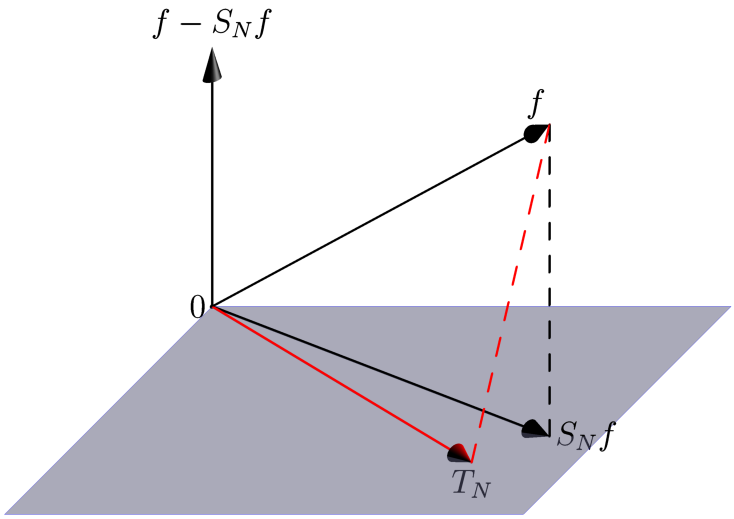


Figura 14.4: Decomposizione ortogonale $f = S_N f + (f - S_N f)$ di f. $S_N f$ è il polinomio trigonometrico più vicino a f, qualunque altro polinomio trigonometrico T_N si trova più lontano.

Il passo essenziale per giungere a questo risultato è la completezza del sistema trigonometrico in $C(\mathbb{T})$, le funzioni continue sul cerchio, e gli ingredienti della dimostrazione di questo fatto sono il teorema (14.9) e il il teorema di approssimazione di Weierstrass (12.26) che, in termini di norma uniforme può essere così riformulato: *Sia* $f \in C(\mathbb{T})$. *Allora per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste un polinomio trigonometrico* T_N *tale che* $||f - T_N||_\infty < \epsilon$.

Per il teorema (14.9), la convergenza nella norma uniforme implica la convergenza nella norma L^2. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico T_N tale che $||f - T_N||_2 < \epsilon$. La somma parziale di Fourier $S_N f$ è la proiezione ortogonale di f sullo spazio dei polinomi trigonometrici di grado N, rispetto al prodotto scalare L^2, ed è il polinomio trigonometrico più vicino a f, nel senso della norma L^2. Quindi

$$||f - S_N f||_2 \leq ||f - T_N||_2 < \epsilon\,,$$

da cui segue la completezza del sistema trigonometrico per le funzioni continue. Ma le funzioni continue sono dense in $L^2(\mathbb{T})$ (per costruzione), dunque la completezza del sistema trigonometrico risulta stabilita per *qualunque* funzione in $L^2(\mathbb{T})$, che è quello che si voleva dimostrare.

Vediamo adesso quali sono le conseguenze immediate della completezza del sistema trigonometrico. Una conseguenza è che la decomposizione (12.11) che abbiamo richiamato all'inizio di questo capitolo (o, equivalentemente, la (12.16)) vale per *qualunque* funzione $f \in L^2(\mathbb{T})$ e va intesa, come abbiamo sottolineato nella sezione precedente, non come un'identità puntuale, ma come uguaglianza tra vettori nel senso della norma L^2.

Un'altra conseguenza è che data un funzione continua f (o più in generale una funzione a quadrato integrabile) in $[a, b]$, non solo la somma di parziale S_N della serie di Fourier di f è la migliore approssimazione di f, ma è anche una buona approssimazione, in quanto l'errore quadratico medio tende a 0 quando N tende all'infinito.

Infine, la completezza del sistema trigonometrico implica l'identità di Parseval (14.30) che, per $f \in L^2(\mathbb{T})$, diventa

$$\left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, f \right\rangle\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|\left\langle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, f \right\rangle\right|^2 \right) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Tenuto conto delle formule per i coefficienti a_n e b_n di

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

si ha

$$\pi \frac{1}{2}|a_0|^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

e dividendo per π, si ottiene la forma standard dell'identità di Parseval per il sistema trigonometrico,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) . \tag{14.33}$$

14.6 Serie di Fourier in più variabili

Si può dimostrare che se $\{e_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, è una base ortonormale in $L^2[a, b]$ e $\{f_m(x)\}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, è una base ortonormale in $L^2[c, d]$ allora le funzioni $\{e_n(x)e_m(y)\}$, $n, m = 1, 2, 3, \ldots$, sono una base per le funzioni in $L^2[[a, b] \times [c, d]]$, cioè le funzioni $f(x, y)$ di due variabili tali che

$$\int_a^b \int_c^d |f(x, y)|^2 dx dy < \infty .$$

Un'applicazione immediata di questo sono gli sviluppi in serie di Fourier di funzioni definite in $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ e a quadrato integrabile, la cui serie di Fourier, usualmente detta *serie di Fourier*

doppia, è (usando per comodità coordinate complesse)

$$f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{nm} e^{inx} e^{imy} \tag{14.34}$$

$$c_{nm} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-inx} e^{-imy} dxdy \tag{14.35}$$

In notazione vettoriale $\mathbf{r} = (x,y)$, $\mathbf{q} = (n,m)$, queste equazioni possono essere riscritte come

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} c_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tag{14.36}$$

$$c_{\mathbf{q}} = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^\nu \mathbf{r}\,, \tag{14.37}$$

per $\nu = 2$ (ed è sottinteso che la sommatoria è estesa a tutti i valori positivi e negativi del vettore $\mathbf{q}$). Chiaramente, le equazioni in forma vettoriale hanno una generalizzazione naturale a funzioni di ν variabili.

Problemi

Problema 14.1. □ Sia V uno spazio vettoriale. Dimostrare che se $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$ sono basi di V e una di esse è finita, cioè, con un numero finito di elementi, allora anche l'altra lo è e il numero di elementi è lo stesso.

Problema 14.2. □ Dati due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ in uno spazio con prodotto scalare, sotto quali condizioni vale l'uguaglianza $||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$? Può questa uguaglianza valere anche se i vettori non sono ortogonali?

Problema 14.3. □ Dimostrare che la funzione su $\mathbb{C}^n$ a valori reali positivi

$$\|(u_1, u_2, \ldots, u_n)\| = \max\{|u_1|, |u_2|, \ldots, |u_n|\}$$

soddisfa tutte le proprietà della norma.

Problema 14.4. □ Si dimostri che

$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx \quad f \in C[a,b]\,.$$

soddisfa tutte le proprietà della norma.

Problema 14.5. □ Siano $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ in $C[-1,1]$. Calcolare i seguenti prodotti scalari e norme L^2

(a) $\langle f_1\,,\, f_2\rangle$

(b) $\langle f_1\,,\, f_3\rangle$

(c) $||f_1 - f_2||^2$

(d) $||2f_1 + 3f_2||$

Problema 14.6. □ Calcolare la proiezione di $f(x) = \cos^2 x$ su ciascuna delle funzioni $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \cos 2x$, $-\pi \le x \le \pi$ (si chiede il valore numerico della proiezione, non il vettore proiettato).

Problema 14.7. □ Dimostrare che l'insieme di funzioni $\{1, x, |x|\}$ è linearmente indipendente in $C[-1,1]$ e costruire il corrispondente sistema ortogonale rispetto al prodotto scalare L^2. Il dato insieme è linearmente indipendente in $C[0,1]$?

Problema 14.8. □ Determinare i valori reali di α per cui $f(x) = x^\alpha$ in $[0,1]$ ha norma

$$||f||_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty\,.$$

Problema 14.9. □ Determinare i valori reali di α per cui x^α in $[1,\infty)$ ha norma

$$||f||_2^2 = \int_1^\infty |f(x)|^2 dx < \infty\,.$$

Problema 14.10. □ Assumendo che l'intervallo (a,b) sia finito, dimostrare che se $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ allora l'integrale $\int_a^b |f(x)|dx$ esiste. Mostrare che l'inverso è falso dando l'esempio di una funzione f tale che $|f|$ è integrabile su (a,b), ma non è a quadrato integrabile.

Problema 14.11. □ Esprimere $\sin^3(x)$ come combinazione lineare delle funzioni del sistema trigonometrico $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$.

Problema 14.12. □ Dato $\rho(x) = e^{-x}$, dimostrare che ogni polinomio $p = p(x)$, $x \ge 0$ ha norma L^2_ρ finita, cioè

$$\int_0^\infty |p(x)|^2 \rho(x) dx < \infty$$

Problema 14.13. □ Determinare, se esiste, il limite nella norma L^2 delle seguenti successioni

(i) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, per $0 \le x \le 1$

(ii) $f_n(x) = nx$, per $0 \le x < 1/n$, $f_n(x) = 1$ per $1/n \le x \le 1$

(iii) $f_n(x) = nx(1-x)^n$, per $0 \le x \le 1$.

Problema 14.14. □ Determinare un insieme ortonormale di vettori per lo spazio lineare che consiste di tutte le funzioni lineari

$$\{a + bx : a, b \in \mathbb{R}, x \le 0 \le 1\}$$

con prodotto scalare (reale) L^2,

$$\langle f\,,\, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx\,, \quad f, g \in V\,.$$

PROBLEMA 14.15. □ Mostrare che $\{1, \cos x, \sin x\}$ è una base ortogonale per lo spazio $V = \{c + a\cos x + b\sin x, a, b, c \in \mathbb{R}, -\pi \leq x \leq \pi\}$ con prodotto scalare

$$\langle f\,,\, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx\,, \quad f, g \in V$$

e determinare una base ortonormale in questo spazio.

PROBLEMA 14.16. □ Si consideri lo spazio lineare dei polinomi di variabile reale nell'intervallo $[-1, 1]$. Questo spazio è generato dall'insieme linearmente indipendente $\{1, x, x^2, \ldots\}$. A partire da questo insieme, si determinino i primi tre elementi p_0, p_1 e p_3 di un insieme ortonormale rispetto al prodotto scalare L^2.

PROBLEMA 14.17. □ Determinare i coefficienti c_i nella combinazione lineare

$$c_1 + c_2 \sin \pi x + c_3 \sin 2\pi x$$

che danno la migliore approssimazione in media quadratica della funzione $f(x) = x$, $0 < x < 2$.

PROBLEMA 14.18. □ Determinare i coefficienti a_i e b_i nella combinazione lineare

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

che danno la migliore approssimazione in in media quadratica di $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

PROBLEMA 14.19. □ Dimostrare il teorema (14.14). *Aiuto.* Assumere per semplicità che lo spazio sia reale. Sia $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbf{e}_k$ un generico vettore in $\mathcal{W}$ e, per $\mathbf{v}$ fissato, si consideri il quadrato della distanza da $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$ come funzione delle coordinate $x_1, \ldots, x_N$. Si determini il minimo di questa funzione, analogamente a quanto è stato fatto nella sezione 12.7.

PROBLEMA 14.20. □ Dimostrare la seguente versione del lemma di Riemann-Lebesgue. *Sia f una funzione a quadrato integrabile su $[a, b]$ e $\{e_n(x)\}$ un sistema ortonormale di funzioni reali in $L^2[a, b]$, allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e_n(x) f(x) = 0$$

PROBLEMA 14.21. □ (a) Calcolare la serie di Fourier della funzione $f(x) = |x|$ in $[-2, 2]$. (b) Scrivere l'uguaglianza di Parseval corrispondente alla serie di Fourier calcolata in (a). (c) In base al punto (b), determinare la somma della serie

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots \frac{1}{n^4} + \ldots$$

Soluzioni

Problema 14.14. □ Lo spazio lineare è chiaramente isomorfo a $\mathbb{R}^2$ e l'insieme $\{1, x\}$ è chiaramente una base, ma non è ortogonale. Poiché il vettore 1 è chiaramente unitario, $||1||^2 = \int_0^1 dx = 1$, possiamo includerlo nell'insieme ortonormale cercato e determinare un vettore $a + bx$ ortogonale ad esso, cioè un vettore tale che

$$\langle 1\,,\, a + bx\rangle = \int_0^1 (a + bx)dx = a + \frac{b}{2} = 0\,,$$

Questa condizione è soddisfatta per $b = -2a$. I vettori $a - 2ax$, $a \in \mathbb{R}$, sono dunque ortogonali a 1 e, tra questi, quello unitario è determinato dalla condizione $||a - 2ax|| = 1$. Ma

$$\begin{aligned} ||a - 2ax||^2 &= \int_0^1 (a - 2ax)^2 dx = a^2 \int_0^1 (1 - 4x + 4x^2)dx \\ &= a^2(1 - 2 + \frac{4}{3}) = \frac{a^2}{3}\,, \end{aligned}$$

da cui segue che per $a = \sqrt{3}$ il vettore è unitario. Quindi

$$\{1, \sqrt{3}(1 - 2x)\}$$

è un possibile insieme ortonormale. Naturalmente, ci sono infinite altre possibili scelte, la precedente è solo una scelta semplice.

Problema 14.15. □ Mostriamo che i tre vettori sono ortogonali tra loro. La funzione 1 è chiaramente ortogonale alle altre due:

$$\begin{aligned} \langle 1\,,\, \cos x\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\, dx = 0 \\ \langle 1\,,\, \sin x\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, dx = 0\,. \end{aligned}$$

Inoltre, seno e coseno sono ortogonali tra loro:

$$\langle \sin x\,,\, \cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\, \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Calcoliamo adesso le norme:

$$\begin{aligned} ||1||^2 &= \langle 1\,,\, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi \\ ||\cos x||^2 &= \langle \cos x\,,\, \cos x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ ||\sin x||^2 &= \langle \sin x\,,\, \sin x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Quindi

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \right\}$$

è un insieme ortonormale in V. Essendo V isomorfo a $\mathbb{R}^3$, ed essendo l'insieme linearmente indipendente (teorema (2.38)), esso è una base ortonormale in V.

PROBLEMA **14.16.** □ Applichiamo il metodo di Gram-Schmidt. Denotiamo con q_n e p_n i polinomi corrispondenti ai vettori $\mathbf{u}_n$ e $\mathbf{e}_n$ dell'esercizio 2.5 e facciamo partire n da 0. Posto $q_0 = 1$, dal primo passo del metodo si ottiene il primo polinomio dell'insieme cercato:

$$p_0 = \frac{q_0}{||q_0||} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} dx}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Per il secondo passo dobbiamo calcolare

$$q_1 = x - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, x \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x\,dx\, \frac{1}{\sqrt{2}} = x - 0 = x$$

che ha norma

$$||q_1|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,,$$

Quindi il secondo polinomio cercato è

$$p_1 = \frac{q_1}{||q_1||} = \frac{x}{||x||} = \sqrt{\frac{3}{2}}x\,.$$

Adesso occorre calcolare

$$q_2 = x^2 - \left\langle p_0\,,\, x^2 \right\rangle p_0 - \left\langle p_1\,,\, x^2 \right\rangle p_1$$

ma

$$\left\langle p_0\,,\, x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, x^2 \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$
$$\left\langle p_1\,,\, x^2 \right\rangle = \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}x\,,\, x^2 \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0\,.$$

Quindi

$$q_2 = x^2 - \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3}\,,$$

che ha norma

$$||q_2|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{\frac{8}{45}}\,,$$

da cui

$$p_2 = \frac{q_2}{||q_2||} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$$

$p_0 = 1/\sqrt{2}$, $p_1 = \sqrt{3/2}x$ e $p_3 = \sqrt{5/8}(3x^2 - 1)$ sono i tre elementi cercati. La procedura può continuare. Si osservi che $\langle x^n\,,\, x^m \rangle = 0$ se $n + m$ è dispari. Quindi p_{2k} contiene solo potenze pari di x mentre p_{2k+1} contiene solo potenze dispari di x.

PROBLEMA **14.17.** □ Risposta: $c_1 = 1$, $c_2 = -2/\pi$, $c_3 = -1/\pi$.

PROBLEMA **14.18.** □ Risposta: $a_0 = \pi/2$, $a_1 = -4/\pi$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$.

PROBLEMA **14.19.** □ Per semplicità, assumiamo che V sia uno spazio reale. Sia $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbf{e}_k$ un generico vettore in $\mathcal{W}$ e, per $\mathbf{v}$ fissato, consideriamo il quadrato della distanza da $\mathbf{v}$ a $\mathbf{u}$ come funzione delle coordinate $x_1, \ldots, x_N$,

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_N) &= \left|\left| \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbf{e}_k \right|\right|^2 = \left\langle \mathbf{v} - \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{e}_i \,,\, \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} x_k \mathbf{e}_k \right\rangle \\ &= ||\mathbf{v}||^2 - 2 \sum_{k=1}^{N} x_k \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} x_i x_k \delta_{ik} \\ &= ||\mathbf{v}||^2 - 2 \sum_{k=1}^{N} x_k \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle + \sum_{k=1}^{N} x_k^2 \end{aligned} \tag{14.38}$$

Questa è una funzione quadratica che ha un minimo per

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle + x_k = 0 \quad k = 1, \ldots, N \,,$$

cioè per

$$x_k = \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle \quad k = 1, \ldots, N \,.$$

Quindi $\mathbf{v}_{||} = \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{e}_k \,,\, \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{e}_k$ è il vettore in $\mathcal{W}$ a distanza minima da $\mathbf{v}$, tutti gli altri vettori in $\mathcal{W}$ si trovano a distanza maggiore. Questa dimostrazione si estende facilmente al caso in cui V è uno spazio complesso (esercizio).

Complementi

Spazi di Hilbert

Uno spazio lineare normato V, in cui ogni successione di Cauchy converge ad un elemento di V, è detto completo. (14.39)

Uno spazio normato completo è anche detto *spazio di Banach*.

Esercizio 14.2. Lo spazio delle funzioni continue $C[a,b]$ con norma uniforme (14.3) è completo.

Dimostrazione. Sia $f_1, f_2, \ldots$ una successione di Cauchy di funzioni continue. Questo significa che esiste un N, indipendente da x, tale che $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$, per tutti gli n e m maggiori di N. Per x fissato, $f_1(x), f_2(x), \ldots$ è una successione di Cauchy di numeri reali e quindi esiste il limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ (si ha cioè convergenza puntuale della successione). Quindi si ha $|f(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ per tutti gli $m \geq N$ e gli $x \in [a,b]$. Ergo, f_m converge a f uniformemente. Poiché f è il limite uniforme di funzioni continue, f stessa è continua e quindi la successione converge a f in $C[a,b]$. □

Stefan Banach (1892–1945) è stato un matematico polacco tra i più influenti del XX secolo. Noto al grande pubblico (si fa per dire) per il paradosso di Banach-Tarski, secondo cui esiste una decomposizione finita di una sfera tale che ricomponendone i pezzi si possono formare due sfere identiche a quella di partenza (e, naturalmente, la procedura può essere iterata).

Uno spazio con prodotto scalare che è completo nella norma indotta da prodotto scalare è detto *spazio di Hilbert*. (14.40)

Gli spazi di Hilbert sono di solito denotati con $\mathscr{H}$ ("H" corsivo). Il prototipo di spazio di Hilbert è lo spazio ℓ^2 delle successioni a quadrato sommabile.

Esercizio 14.3. Dimostrare che ℓ^2 è uno spazio di Hilbert, cioè che ogni successione di Cauchy in ℓ^2 converge ad un elemento di ℓ^2.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \mathbf{z}^{(3)}, \ldots$ una qualunque successione di Cauchy in ℓ^2, cioè tale che

$$\lim_{n,m\to\infty} \left|\left|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\right|\right| = 0$$

e dimostriamo che esiste un elemento $\mathbf{z} \in \ell^2$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}\right|\right| = 0 \tag{14.41}$$

Osserviamo che, essendo per ogni indice k

$$|z_k^{(n)} - z_k^{(m)}| \leq \left|\left|\mathbf{z}^{(n)} - \mathbf{z}^{(m)}\right|\right| ,$$

esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} z_k^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} z_k .$$

David Hilbert (1862–1943) è stato un matematico tedesco, probabilmente il più influente a cavallo tra il XIX e il XX secolo. Noto il per il suo approccio formalistico al problema dei fondamenti della matematica, si occupò anche di fisica, in particolare arrivò alle equazioni della relatività generale quasi parallelamente ad Einstein. L'azione, da cui seguono queste equazioni per principio di minimo, è detta "azione di Einstein-Hilbert". Sembra che abbia detto: "la fisica è troppo difficile per essere lasciata ai fisici".

Proviamo ora che la successione $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots)$ è in ℓ^2. Fissato un generico N, tronchiamo le successioni fino a N, ottenendo così vettori nello spazio vettoriale finito dimensionale $\mathbb{C}^N$. Denotiamo con un pedice N i vettori così ottenuti e consideriamo la disuguaglianza triangolare in $\mathbb{C}^N$

$$\left|\left|\mathbf{z}_N^{(n)}\right|\right| \leq \left|\left|\mathbf{z}_N^{(n)} - \mathbf{z}_N^{(m)}\right|\right| + \left|\left|\mathbf{z}_N^{(m)}\right|\right|$$

cioè

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left|z_k^{(n)}\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left|z_k^{(n)} - z_k^{(m)}\right|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left|z_k^{(m)}\right|^2}$$

L'osservazione importante è che il primo membro è limitato da una costante indipendente da n e da N, possiamo quindi passare al limite $n \to \infty$ a primo membro e stabilire così la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2$$

Per provare ora la (14.41), osserviamo che, fissato $\epsilon > 0$, esiste N_ϵ tale che per tutti gli n e m maggiori di N_ϵ, si ha (essendo $(\mathbf{z}^{(n)})$ una successione di Cauchy)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|z_k^{(m)} - z_k^{(n)}\right|^2 < \epsilon^2$$

da qui, passando al limite per $m \to \infty$, segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|z_k - z_k^{(n)}\right|^2 < \epsilon^2 \,,$$

cioè la (14.41). □

Un sistema ortonormale in ℓ^2 è dato dai vettori $\hat{\mathbf{e}}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ le cui componenti sono tutte 0 eccetto per l'n-esima, che vale 1:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad \hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad \hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots$$

Tale sistema è ovviamente chiuso e quindi completo; dunque $\{\hat{\mathbf{e}}_n\}$ è una base ortonormale in ℓ^2.

L'esistenza di un sistema ortonormale completo *numerabile* in uno spazio di Hilbert non può essere data per scontata in quanto non è conseguenza delle proprietà del prodotto scalare e della completezza della norma da esso indotta. Se uno spazio di Hilbert ha una base ortogonale completa numerabile è detto *separabile*. Nelle applicazioni questa condizione è tipicamente soddisfatta e la nozione di spazio di Hilbert è usualmente identificata con quella di spazio di Hilbert

separabile. Per tali spazi vale il seguente importante teorema:

> Tutti gli spazi di Hilbert sui complessi di dimensione n sono unitariamente equivalentii a $\mathbb{C}^n$. Tutti gli spazi di Hilbert infinito dimensionali (separabili) sono *unitariamente equivalenti* allo spazio ℓ^2 delle successioni a quadrato sommabile. (14.42)

Per equivalenza unitaria si intende quanto segue: due spazi di Hilbert $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}'$ sono detti unitariamente equivalenti se esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori $\mathbf{u}$ di $\mathscr{H}$ e i vettori $\mathbf{u}'$ di $\mathscr{H}'$ tale che:

(1) se a $\mathbf{u}$ corrisponde $\mathbf{u}'$ e a $\mathbf{v}$ corrisponde $\mathbf{v}'$, al vettore $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ di $\mathscr{H}$ corrisponde il vettore $\alpha\mathbf{u}' + \beta\mathbf{v}'$ di $\mathscr{H}'$ qualunque siano i numeri α e β;

(2) se a $\mathbf{u}$ corrisponde $\mathbf{u}'$, allora

$$||\mathbf{u}||_{\mathscr{H}} = ||\mathbf{u}'||_{\mathscr{H}'}$$

Se $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert e $\{\mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale in esso, si consideri la corrispondenza tra le basi di $\mathscr{H}$ e ℓ^2:

$$\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_1\,, \quad \mathbf{e}_2 \leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_2\,, \quad \mathbf{e}_3 \leftrightarrow \hat{\mathbf{e}}_3\,, \quad \ldots$$

e la si estenda per linearità

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbf{e}_n \;\leftrightarrow\; \hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{e}}_n = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$$

Allora a $\mathbf{u}$ in $\mathscr{H}$ è associato il vettore in ℓ^2

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{e}}_n = (c_1, c_2, c_3, \ldots)\,, \qquad c_n = \langle \mathbf{e}_n\,,\, \mathbf{u}\rangle$$

e

$$||\mathbf{u}||^2_{\mathscr{H}} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = ||\hat{\mathbf{u}}||^2_{\ell^2}$$

segue dalll'identità di Parseval. Viceversa, a

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \hat{\mathbf{e}}_n = (c_1, c_2, c_3, \ldots)$$

in ℓ^2 è associato il vettore $\mathbf{u}$ in $\mathscr{H}$. La corrispondenza tra $\mathscr{H}$ e ℓ^2 è dunque biunivoca e isometrica (cioè conserva la norma), che è quanto si voleva dimostrare.

L'ovvio corollario di questo è che *tutti gli spazi di Hilbert sono unitariamente equivalenti* tra loro. Questo fatto risulta meno misterioso se

si tiene conto che lo spazio di Hilbert $\mathscr{H}$, astrattamente definito, è l'analogo infinito-dimensionale dello spazio euclideo tri-dimensionale E^3 della geometria elementare. Fissare una base ortonorrmale $\{\mathbf{e}_n\}$ in $\mathscr{H}$ è come fissare il sistema di versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ in E^3. Lo spazio ℓ^2 è come lo spazio $\mathbb{R}^3$ delle coordinate (x, y, z) dei vettori rispetto al sistema di riferimento individuato dai versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Inoltre, la corrispondenza tra $\mathscr{H}$ e ℓ^2 è analoga alla corrispondenza tra vettori e terne di coordinate, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \leftrightarrow \quad (x, y, z)$. Infine, come abbiamo già osservato, l'identità di Parseval è la versione infinito-dimensionale del teorema di Pitagora $||\mathbf{r}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile

Un esempio di spazio con prodotto scalare che non è di Hilbert è $C[a, b]$ con prodotto scalare L^2. Questo spazio non è completo: una successione di di Cauchy di funzioni continue può convergere nella norma L^2 ad un funzione che non è continua. Questo fatto è illustrato dall'esempio 14.1. In analogia a quando si passa dai razionali ai reali, si può completare $C[a, b]$ costruendo uno spazio più ampio: *lo spazio di tutte le successioni di Cauchy di $C[a, b]$ rispetto alla norma L^2*. Questo spazio è usualmente denotato $L^2[a, b]$ ed è lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in $[a, b]$, cioè delle funzioni f su $[a, b]$ tali che

$$||f||_2^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \,. \tag{14.43}$$

Per costruzione, $L^2[a, b]$ è uno spazio di Hilbert e $C[a, b]$ è denso in $L^2[a, b]$.

È importante osservare che passando al completamento di $C[a, b]$ in $L^2[a, b]$, inevitabilmente si introducono funzioni discontinue. Ad esempio, la funzione $f(x)$ dell'esempio 14.1 è discontinua, ma essendo ottenuta come limite nella norma L^2 di una successione di funzioni continue è in $L^2[-1, 1]$. Tuttavia, se si permettono funzioni discontinue nello spazio, allora viene meno la proprietà della norma che stabilisce che la norma è zero se e solo se la funzione è zero. Si considerino, per esempio, le seguenti due funzioni: la funzione f che vale zero per tutti i punti di $[a, b]$, cioè la funzione che vale *puntualmente* zero, e la funzione g che vale zero eccetto che per un insieme numerabile di punti in $[a, b]$ dove vale 1. La funzione g ha la norma $||f||_2^2 = 0$ (in quanto l'integrale non vede un insieme numerabile di punti), ma non è f, la funzione identicamente zero. Esiste dunque una funzione diversa da zero che ha norma zero.

Si devono dunque riguardare gli elementi di $L^2[a, b]$ non come funzioni, ma come classi di equivalenza di funzioni che hanno la stessa norma; ad esempio la funzione 0 in $L^2[a, b]$ denota realmente

una classe di funzioni, ciascuna delle quali ha norma zero. La funzione che è puntualmente uguale a zero è solo un membro, in effetti il solo membro continuo, di quella classe. Similmente, si dice che due funzioni f e g sono uguale in L^2 se $||f-g|| = 0$, anche se f e g possono non essere *puntualmente* uguali in $[a,b]$. Nella terminologia della teoria della misura, si dice che f e g sono uguali *quasi ovunque*, cioè possono differire su un insieme in $[a,b]$ di *misura nulla*. Quindi lo spazio $L^2[a,b]$ è fatto di classi di equivalenza di funzioni, definite dall'uguaglianza nel senso L^2, vale a dire funzioni che sono uguali quasi ovunque.

Finora abbiamo usato il simbolo $L^2[a,b]$ per denotare lo spazio delle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tali che $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Ma poiché questo integrale non è modificato dalla sostituzione dell'intervallo chiuso $[a,b]$ con quello aperto (a,b) o con i semiaperti $(a,b]$ e $[a,b)$, $L^2[a,b]$ coincide con $L^2(a,b)$, $L^2(a,b]$ e $L^2[a,b)$. Inoltre, non è richiesto che l'intervallo (a,b) sia limitato da una parte, dall'altra o da entrambe, e così abbiamo $L^2(a,\infty)$, $L^2(-\infty,b)$ e $L^2(-\infty,\infty) = L^2(\mathbb{R})$. In questi casi, così come nel caso in cui la funzione è illimitata, interpretiamo l'integrale di $|f|^2$ come un integrale improprio di Riemann. Talvolta scriveremo semplicemente L^2 quando l'intervallo è sottinteso o quando è irrilevante specificarlo.

Un altro problema è il seguente: la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle f\,,\,g\rangle| \leq ||f||_2\,||g||_2$ assicura che il prodotto scalare di f e g è ben definito se le norme $||f||_2$ e $||g||_2$ esistono, cioè se $|f|^2$ e $|g|^2$ sono integrabili. Tuttavia, l'integrabilità secondo Riemann di $|f|^2$ e $|g|^2$ non garantisce l'integrabilità di $\overline{f}g$. Questi problemi richiedono approfondimenti di analisi al di là del livello della presente trattazione: per risolvere questi problemi, occorre introdurre la nozione di misura e di integrale di Lebesgue.

Qual è la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier?

L'analisi di Fourier, cioè lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione, può essere "trasformata" in due direzioni opposte: ristretta verso il discreto, cioè rivolta alle funzioni ottenute per discretizzazione finita dell'intervallo $[-P/2, P/2]$, oppure estesa al caso in cui il periodo P aumenta a dismisura fino a che $[-P/2, P/2]$ diventa l'intera retta reale. Naturalmente, si potrà parlare ancora di analisi di Fourier, seppure in un senso generalizzato, se queste "trasformazioni" preservano in qualche modo la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier. Ma qual è la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier?

L'essenza dell'analisi di Fourier classica è quella di decomporre un segnale periodico in una somma pesata di armoniche, dove ciascun armonica ha una frequenza che è un multiplo intero della frequenza

fondamentale. In effetti, l'analisi di Fourier è comunemente chiamata anche *analisi armonica*.

È importante sottolineare che tutte le armoniche sono generate dall'armonica fondamentale $e(x) = e^{i\omega x}$, di frequenza angolare ω, nel seguente modo

$$e_1(x) = e(x)\,,\ e_2(x) = e(x)^2 = e^{i\omega 2x}\,,\ldots\,,e_n(x) = e(x)^n = e^{i\omega nx}\,,\ldots$$

(Quando, per semplicità, lavoriamo in $\mathbb{T}$, come torneremo a fare tra poco, $\omega = 1$.) Le potenze negative danno le frequenze negative (cioè moti circolari nella direzione opposta),

$$e_{-n}(x) = e(x)^{-n} = e^{-i\omega nx}$$

e, naturalmente,

$$e_{-n}(x)e_n(x) = 1$$

cioè il modo zero. In breve, l'insieme delle armoniche $e_n(x) = e^{inx}$ forma una rappresentazione moltiplicativa del gruppo additivo degli interi $\mathbb{Z}$, nel senso che

$$\begin{aligned} e_{n+m}(x) &= e_n(x)e_m(x) \\ e_{-n}(x) &= e_n(x)^{-1} \end{aligned}$$

L'armonica fondamentale $e^{i\omega x}$ è chiamata generatore del gruppo.

È questa proprietà di gruppo, tutto sommato abbastanza astratta, che rende conto matematicamente del significato concreto dell'analisi di Fourier. Quando combiniamo questa proprietà con l'altro aspetto fondamentale delll'analisi di Fourier, che è la decomposizione di un vettore rispetto ad una base ortonormale, otteniamo tutto quello che c'è da dire sull'analisi di Fourier. E tutto questo può essere riassunto in 6 punti:

(I) Ad ogni funzione $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) è associata una *successione* $\{c_n\} = \{\widehat{f}(n)\}$ di numeri complessi. Questi numeri sono noti come *coordinate* (o coefficienti) *di Fourier* di f.

(II) La coordinate di Fourier sono date dalla formula

$$c_n = \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \qquad \text{per} \quad n \in \mathbb{Z}$$

(III) I mattoni di base delle serie di Fourier sono le *funzioni trigonometriche* $e_n : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ date da

$$e_n(x) = e^{inx}\,, \qquad \text{dove} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{T}$$

(sono chiamate trigonometriche piuttosto che esponenziali per sottolineare il legame con seni e coseni dato dalla formula di

Eulero). L'n-esima coordinata di Fourier può essere scritta in termini di prodotto scalare L^2 come

$$c_n = \widehat{f}(n) = \left\langle \frac{e_n}{||e_n||}, f \right\rangle .$$

(IV) L'insieme delle *funzioni trigonometriche* $e_n(x) = e^{inx}$ forma una rappresentazione moltiplicativa del gruppo additivo degli interi $\mathbb{Z}$, nel senso che

$$e_{n+m}(x) = e_n(x)e_m(x)$$
$$e_{-n}(x) = e_n(x)^{-1}$$

(V) La serie associata a f è

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

(VI) L'insieme $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ forma una *base ortonormale* per lo spazio vettoriale $L^2(\mathbb{T})$ delle funzioni a quadrato integrabile su $\mathbb{T}$. In particolare, questo significa che per $f \in L^2(\mathbb{T})$, le somme parziali di f convergono a f nel senso L^2, cioè

$$\left|\left| f - \sum_{|n|\leq N} \widehat{f}(n)e^{inx} \right|\right|_{L^2} \to 0 \quad \text{per} \quad N \to \infty$$

e vale l'identità di Parseval (cioè il teorema di Pitagora infinito-dimensionale)

$$||f||_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 = \left|\left|\widehat{f}\right|\right|_{\ell^2}$$

Analisi di Fourier nel discreto

Consideriamo la seguente situazione: nel suo intervallo fondamentale, il segnale è un vettore v con un numero finito di componenti complesse, diciamo N. Quindi è un vettore in $\mathbb{C}^N$. Poi è ripetuto con periodicità a destra e a sinistra. Quale analisi armonica è appropriata per una situazione come questa?

Incominciamo col fissare le notazioni. Si consideri la base standard in $\mathbb{C}^N$, che conveniamo di denotare con dei ket,

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, |N-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(La ragione di questa notazione non convenzionale, sia per i ket sia per partire da 0 anziché da 1, apparirà chiara tra poco.) Denotiamo un generico vettore di questa base con

$$|\alpha\rangle\,, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, N-1$$

Il prodotto scalare in $\mathbb{C}^N$ è

$$\langle v\,,\, u\rangle = \sum \overline{v(\alpha)} u(\alpha) = \sum \langle v\,,\, \alpha\rangle\,\langle \alpha\,,\, u\rangle$$

e

$$\langle \alpha\,,\, \beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

dove $\delta_{\alpha\beta}$ è la delta di Kronecker. Allora, per un vettore $v \in \mathbb{C}^N$ possiamo scrivere

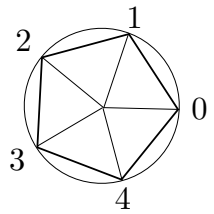
$$|v\rangle = \sum |\alpha\rangle\,\langle \alpha\,,\, v\rangle$$

sottintendendo che tutte le somme d'ora in avanti corrono da 0 a $N-1$. Si osservi che $\langle \alpha\,,\, v\rangle$ è la α-esima componente del vettore. Possiamo, per comodità, pensare a v come ad una funzione definita sull'insieme finito di punti $\alpha = 0, 1, \ldots, N-1$, e a valori in $\mathbb{C}$, e scrivere

$$v(\alpha) = \langle \alpha\,,\, v\rangle$$

Adesso torniamo al problema di partenza. Vogliamo analizzare il segnale discreto $v(\alpha)$ in termine di armoniche: è chiaro che non possiamo aspettarcene più di N. Se vogliamo mantenere la struttura fondamentale dell'analisi di Fourier, dobbiamo cercare un analogo della proprietà (IV) per un insieme discreto.

L'insieme C_N delle radici n-esime dell'unità, $C_N = \{z \in \mathbb{C} | z^N = 1\}$ è un gruppo abeliano rispetto all'operazione di moltiplicazione con N elementi ed è il gruppo ciclico di ordine N. In effetti, è una rappresentazione del gruppo additivo modulo N. Per esempio, per $N = 5$ il gruppo additivo si rappresenta con i vertici di un pentagono regolare



e le addizioni sono costruite per ciclicità, per esempio: $1 + 2 = 3$, $1 + 4 = 0$, $2 + 4 = 1$ *etc.*. La sua rappresentazione moltiplicativa è data dalle radici quinte complesse: $1, e^{i2\pi/5}, e^{i4\pi/5}, e^{i6\pi/5}, e^{i8\pi/5}$ e si verifica facilmente che si tratta proprio di una rappresentazione: si consideri, per esempio, $1 + 2 = 3$, questo è rappresentato in $e^{i2\pi/5} e^{i4\pi/5} = e^{i6\pi/5}$, oppure $1 + 4 = 0 \to e^{i2\pi/5} e^{i8\pi/5} = 1$, cioè l'elemento neutro

rispetto all'addizione (o) è trasformato nell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione. E così via.

Per l'analisi armonica in uno spazio a N dimensioni, considereremo allora

$$e(\alpha) = e^{i2\pi\alpha/N}$$

come armonica fondamentale. Il sistema di armoniche generato da $e(\alpha)$ consiste dunque negli N vettori $\tilde{e}_n$, con componenti $e(\alpha)^n$ rispetto alla base $|\alpha\rangle$, $n = 0, 1, \dots N-1$ (per $n = N$ si ritorna a $n = 0$), cioè

$$\langle \alpha\,,\, \tilde{e}_n \rangle = e(\alpha) = e^{i2\pi n\alpha/N}\,, \quad \text{dove} \quad \alpha = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{e} \quad n = 0, 1, \dots N-1$$

Si verifica facilmente che i vettori $\tilde{e}_n$ sono ortogonali tra loro e hanno tutti norma uguale a $\sqrt{N}$ (esercizio):

$$\langle \tilde{e}_n\,,\, \tilde{e}_m \rangle = N\delta_{nm}\,.$$

È quindi conveniente passare alla base ortonormale

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{e}_n\,, \qquad \langle \alpha\,,\, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i2\pi n\alpha/N} = e_n(\alpha)$$

La trasformata di Fourier discreta del segnale discreto $v(\alpha)$ è definita come

$$\widehat{v}(n) = \langle e_n\,,\, v \rangle = \sum_\alpha v(\alpha)\overline{e_n(\alpha)} \quad \text{ovvero} \quad \widehat{v}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_\alpha v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N}$$

Poichè $\{e_n\}$ è una base ortornormale, la trasformata di Fourier discreta è una trasformazione unitaria e si ha

$$v(\alpha) = \langle \alpha\,,\, v \rangle = \sum_n \langle \alpha\,,\, e_n \rangle \langle e_n\,,\, v \rangle = \sum_n \widehat{v}(n) e_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \widehat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N}$$

e vale l'analogo finito dell'identità di Parseval (che è proprio il teorema di Pitagora finito-dimensionale).

Si osservi che avremmo potuto convenire di assorbire il fattore di normalizzazione nel prodotto scalare e definire in $\mathbb{C}^N$ il nuovo prodotto scalare

$$\langle v\,,\, u \rangle = \frac{1}{N} \sum \overline{f(\alpha)} u(\alpha) = \frac{1}{N} \sum \langle f\,,\, \alpha \rangle \langle \alpha\,,\, u \rangle$$

(che, con abuso di notazione, denotiamo nello stesso modo di prima) e utilizzare come armoniche le $\tilde{e}_n \sim e^{i2\pi n\alpha/N}$, che nel nuovo prodotto scalare sono automaticamente normalizzate. Allora, con questo nuovo prodotto scalare, le formule per la trasformata di Fourier discreta e la sua inversa diventano

$$\widehat{v}(n) = \langle \tilde{e}_n\,,\, v \rangle = \frac{1}{N} \sum_\alpha v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} \qquad \text{("analisi")}$$

$$v(\alpha) = \langle \alpha\,,\, v \rangle = \sum_n \widehat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N} \qquad \text{("sintesi")}$$

ESEMPIO 14.1. N=5. Posto $e^{i2\pi/5} = \varepsilon$, si ha (rispetto al prodotto scalare usuale) la seguente base ortonormale di Fourier:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon\\\varepsilon^2\\\varepsilon^3\\\varepsilon^4\end{bmatrix},\quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon^2\\\varepsilon^4\\\varepsilon\\\varepsilon^3\end{bmatrix},\quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon^3\\\varepsilon\\\varepsilon^4\\\varepsilon^2\end{bmatrix},\quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\\varepsilon^4\\\varepsilon^3\\\varepsilon^2\\\varepsilon\end{bmatrix}$$

La matrice della trasformata di Fourier discreta è ottenuta come la matrice le cui colonne sono i vettori testé trovati (che è la regola generale per la matrice di cambiamento di base).

A questo punto, ecco una domanda su cui riflettere: in che modo i sei punti indicati all'inizio della lezione come caratterizzanti dell'analisi di Fourier si sono trasformati nel passaggio dal continuo al discreto? Chiaramente, tutti i problemi di convergenza sono evaporati, ma che dire del resto? È ragionevole dire che la struttura di base è preservata? Comunque si risponda a questa domanda, c'è un senso preciso in cui l'analisi di Fourier discreta approssima quella continua, che è quello di cui ci vogliamo occupare adesso.

Osserviamo che l'analisi di Fourier nel discreto può essere resa ancora più simile a quella nel continuo se consideriamo un numero N dispari. Se N è dispari è naturale scegliere una numerazione simmetrica dello spazio delle α:

$$-(N-1)/2, -(N-2)/2, \ldots, -2-1, 0, 1, 2, \ldots (N-2)/2, (N-1)/2$$

e analogamente per i vettori $|\alpha\rangle$ e i vettori e_n. Le formule per la trasformata di Fourier e la sua inversa (le ultime che abbiamo ricavato), restano inalterate

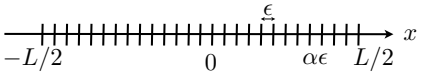
$$\widehat{v}(n) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha} v(\alpha) e^{-i2\pi n\alpha/N} \qquad \text{("analisi")}$$

$$v(\alpha) = \sum_{n} \widehat{v}(n) e^{i2\pi n\alpha/N} \qquad \text{("sintesi")}$$

ma le somme adesso sono da $-(N-1)/2$ a $(N-1)/2$.

Adesso mostriamo che l'analisi di Fourier nel discreto è in effetti un'approssimazione di quella nel continuo. Poiché consideriamo $N \gg 1$, trascureremo la differenza tra N e $N-1$.

Siamo interessati al caso in cui i valori discreti del segnale $v(\alpha)$ sono stati ottenuti campionando un segnale continuo $f(x)$ di periodo P, ad intervalli di ampiezza ϵ. Dunque, $N = P/\epsilon$ e $v(\alpha) = f(x)$ per $x = \alpha\epsilon$, al variare di α da $-N/2$ a $N/2$. Abbiamo cioè la discretizzazione dell'intervallo reale $[-P/2, P/2]$ in blocchi di ampiezza $\epsilon = P/N$ come mostrato in figura:



Consideriamo la formula per le coordinate di Fourier discrete

$$\widehat{v}(n) = \frac{1}{N}\sum_{\alpha} v(\alpha)e^{-i2\pi n\alpha/N} = \frac{\epsilon}{P}\sum_{\alpha} f(\alpha\epsilon)e^{-i2\pi n\alpha\epsilon/P} = \frac{\epsilon}{P}\sum_{\alpha} f(x)e^{i\frac{2\pi}{P}nx}$$

Nel limite $\epsilon \to 0$ riconosciamo a secondo membro il limite della somma di Riemann dell'integrale

$$\frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{P}nx}dx\,,$$

cioè

$$\widehat{v}(n) \to \widehat{f}(n)\,.$$

Quando $\epsilon \to 0$ si ha $N \to \infty$ e quindi la formula per la "sintesi" diventa

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{v}(n)e^{i\frac{2\pi}{P}nx} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{i\frac{2\pi}{P}nx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{i\frac{2\pi}{P}nx}$$

In breve, abbiamo mostrato euristicamente (cioè senza preoccuparci troppo dell'esistenza dei limiti) che nel limite continuo l'analisi di Fourier discreta diventa l'usuale analisi di Fourier, basata sulle relazioni

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{i\frac{2\pi}{P}nx} \tag{14.44}$$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{P}\int_{-P/2}^{P/2} f(x)e^{-i\frac{2\pi}{P}nx}dx \tag{14.45}$$

15
Teoria di Sturm-Liouville

Indice

15.1 ***Equazioni differenziali lineari e omogenee*** 301
15.2 ***Autovalori e autofunzioni*** 304
15.3 ***Forma normale e analisi qualitativa delle equazioni*** 307
15.4 ***Equazione di Sturm-Liouville*** 309
15.5 ***Operatore di Sturm-Liouville*** 310
15.6 ***Problemi di Sturm-Liouville*** 312
15.7 ***Problemi di Sturm-Liouville non regolari*** 314
15.8 ***Il sistema ortogonale delle funzioni di Hermite*** 314
PROBLEMI 317
SOLUZIONI 319

15.1 *Equazioni differenziali lineari e omogenee*

Un'equazione differenziale ordinaria lineare e omogenea del second'ordine (nell'incognita $y = y(x)$ ha la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{15.1}$$

Poiché $a(x)$ è da supporsi non identicamente nulla, si può sempre riscrivere l'equazione nella forma

$$y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{15.2}$$

dove si è posto $b = B/A$ e $b = C/A$.

Una nota e importante proprietà delle equazioni (15.1) è che, trovate due soluzioni particolari y_1 e y_2 indipendenti (cioè tali che il loro rapporto non sia una costante), la soluzione generale y si ottiene come combinazione lineare mediante due costanti arbitrarie c_1 e c_2,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \tag{15.3}$$

Si dice allora che y_1 e y_2 sono state scelte come soluzioni fondamentali. C'è arbitrarietà nella scelta delle soluzioni fondamentali, potendo sostituire y_1 e $y_2$con con due loro combinazioni lineari qualunque, purché indipendenti. In breve, le soluzioni di (15.1) formano un spazio lineare di dimensione 2 e la scelta di due soluzioni fondamentali corrisponde alla scelta di una base in questo spazio.

La soluzione dell'equazione (15.1) è determinata quando si fissano opportunamente delle *condizioni al contorno*. Per esempio, si può considerare il problema di Cauchy per cui in un dato punto $x = a$ sono fissati i valori di y e della sua derivata y'. Ciò è sempre possibile e in questo modo la y risulta univocamente determinata. Oppure si può richiedere che in due dati punti $x = a$ e $x = b$ la y e/o la sua derivata y' soddisfino certe condizioni. Per questo secondo caso, condizioni di particolare interesse sono:

(a) Condizioni di Dirichlet omogenee

$$y(a) = 0 \quad y(b) = 0\,, \tag{15.4}$$

(b) Condizioni di Neumann omogenee

$$y'(a) = 0 \quad y'(b) = 0\,, \tag{15.5}$$

(c) Condizioni miste omogenee

$$\begin{cases} \alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = 0 \\ \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = 0 \end{cases}, \tag{15.6}$$

dove α_a, α_b e β_a, β_b sono opportune costanti. Questo caso contiene dunque i due precedenti per scelta opportuna delle costanti.

(d) Condizioni periodiche

$$y(a) = y(b) \quad y'(a) = y'(b)\,. \tag{15.7}$$

Si osservi che queste condizioni sono soddisfatte, insieme all'equazione differenziale, se si prende $y = 0$ in tutto l'intervallo, cioè per $c_1 = c_2 = 0$. Questa soluzione è evidentemente priva di interesse. Siamo quindi portati a cercare soluzioni non nulle. È di particolare interesse il caso (che come vedremo è eccezionale) in cui le condizioni al contorno *non* determinano univocamente una soluzione dell'equazione.

Consideriamo per esempio il caso delle condizioni (a). Utilizzando l'espressione (15.3) della soluzione generale, si tratta di trovare due valori, non entrambi nulli, per c_1 e c_2, tali che

$$\begin{cases} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = 0 \\ c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = 0 \end{cases} \tag{15.8}$$

È noto dall'algebra che questo sistema di equazioni omogenee ammette soluzioni c_1 e c_2 non nulle solo se

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} = 0 \tag{15.9}$$

Questa equazione vincola i valori, nei punti a e b, delle due soluzioni fondamentali y_1 e y_2, e naturalmente si ottiene un'equazione della stessa forma se si sostituiscono le soluzioni fondamentali y_1 e y_2 con altre due soluzioni fondamentali (essendo il determinante invariante per cambiamento di base).

Se si sanno esprimere esplicitamente y_1 e y_2 in funzione dei coefficienti dell'equazione, la (15.9) diventa immediatamente una condizione a cui devono soddisfare questi coefficienti affinché l'equazione ammetta, per le date condizioni al contorno, una soluzione non nulla (e quindi, essendo l'equazione omogenea, infinite soluzioni non nulle ottenute l'una dall'altra mediante moltiplicazione per una costante).

Esempio 15.1. Consideriamo l'equazione dei mori armonici

$$y'' + \lambda y = 0\,, \tag{15.10}$$

con condizioni al contorno (a). Allora due soluzioni indipendenti sono

$$y_1 = \sin\sqrt{\lambda}x \quad \text{e} \quad y_2 = \cos\sqrt{\lambda}x$$

e la (15.9) diventa

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}a & \cos\sqrt{\lambda}a \\ \sin\sqrt{\lambda}b & \cos\sqrt{\lambda}b \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda}a\cos\sqrt{\lambda}b - \cos\sqrt{\lambda}a\sin\sqrt{\lambda}b = 0\,,$$

ossia

$$\Delta = \sin\left[\sqrt{\lambda}(a-b)\right] = 0\,, \quad n = 1, 2, 3, \dots\,,$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a-b}\right)^2\,.$$

Questi sono i valori che il coefficiente λ dell'equazione deve assumere affinché l'equazione ammetta, per le condizioni al contorno $y(a) = y(b) = 0$, soluzioni non nulle. Come avevamo anticipato, si può osservare che le condizioni al contorno non determinano univocamente una soluzione, ma, in questo caso, infinite. Queste sono determinate come combinazioni $c_1y_1 + c_2y_2$, con c_1 e c_2 ottenuti risolvendo la (15.8). Essendo linearmente dipendenti, si ponga $c_1 = c$. Allora

$$c_2 = -\frac{y_1(a)}{y_2(b)}c = -\frac{\sin\sqrt{\lambda}a}{\cos\sqrt{\lambda}a}c\,,$$

da cui

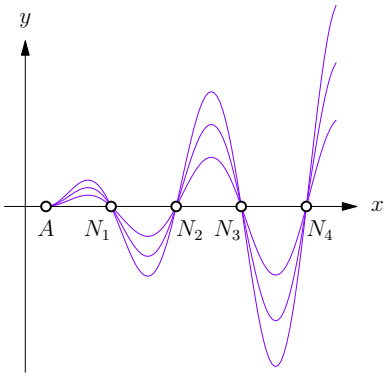
$$\begin{aligned} y &= c \sin\sqrt{\lambda}x - \frac{\sin\sqrt{\lambda}a}{\cos\sqrt{\lambda}a} c \cos\sqrt{\lambda}x \\ &= \frac{c}{\cos\sqrt{\lambda}a}\left[\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}a - \cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}a\right] \\ &= C\sin\sqrt{\lambda}(x-a) \end{aligned}$$

Dunque, ad ogni λ_n è associata la soluzione

$$y_n = C_n \sin\sqrt{\lambda_n}(x-a)\,. \tag{15.11}$$

15.2 *Autovalori e autofunzioni*

In generale, a differenza dell'esempio precedente, non si possiede una espressione esplicita di y_1 e y_2, tuttavia, la (15.9) esprime sempre, in forma implicita, una condizione per i coefficienti dell'equazione. Nel caso delle condizioni (a), la condizione (15.9) può essere espressa in generale nel modo seguente. Ogni soluzione dell'equazione (15.1) può essere rappresentata graficamente mediante una curva $y = f(x)$ nel piano xy (si veda la figura a lato).



Per individuare la curva completamente, basta assegnare $f(a)$ e $f'(a)$ (problema di Cauchy). Consideriamo il fascio di tutte le curve integrali uscenti, in varie direzioni dal punto $A = (a, 0)$. È facile dimostrare che disegnatane una, *qualunque altra si ottiene da essa mediante dilatazione nel senso dell'asse delle y*. Infatti, sia ad esempio $y = f(x)$, la curva che esce da A con inclinazione 1, cioè $f'(a) = 1$, allora $\alpha f(x)$ (dove α è una costante) è un'altra soluzione (essendo l'equazione omogenea) e rappresenta la curva che esce da A con pendenza $f'(a) = \alpha$. Al variare di α si ottengono così *tutte* le curve integrali che escono da A. Da questo segue che *tutte* le soluzioni dell'equazione tagliano l'asse delle x negli stessi punti N_1, N_2, ... (nodi), corrispondenti alle soluzioni di $f(x) = 0$. Detto in altri termini, variando la pendenza $f'(a)$ non si spostano i nodi, per cui la loro posizione è determinata univocamente dall'equazione e quindi dai coefficienti dell'equazione stessa. Se quindi si vuole determinare una soluzione soddisfacente la condizione (a), cioè tale che la curva passi per A e per un altro punto prefissato $B = (b, 0)$, si deve riconoscere che *in generale* tale soluzione non esiste, essa *esiste solo se uno dei nodi* N_1, N_2, ... *cade in* B e la condizione che uno dei nodi cade in B è proprio la (15.9).

In molti casi di interesse, analogamente all'esempio 15.1, l'equazione (15.1) contiene un *parametro* λ, cioè una costante indeterminata. Il caso più interessante è quello in cui λ figura linearmente nel coefficente C, nella forma

$$C(x) = \lambda\alpha(x) + \beta(x)\,. \tag{15.12}$$

Allora le soluzioni fondamentali y_1 e y_2 conterranno anch'esse il parametro λ e quindi lo conterrà il determinante Δ che compare nell'equazione (15.9), che dunque riscriveremo come

$$\Delta(\lambda) = 0\,. \tag{15.13}$$

I valori di λ che risolvono l'equazione (15.13) sono detti gli *autovalori* dell'equazione differenziale nell'intervallo $[a, b]$ per le date condizioni al contorno (a) – (d). Trovato un autovalore λ_n, le (15.8), per condizioni al contorno (a), e analoghe equazioni per altre condizioni al contorno, permettono di ricavare c_1 e c_2 in modo che y soddisfi le date condizioni al contorno (in realtà, il loro rapporto, visto che sono linearmente dipendenti: come nell'esempio 15.1 una delle due può essere scelta a piacere). Una tale soluzione dell'equazione differenziale si chiama *autofunzione*. Va sottolineato che, salvo casi particolari come quello dell'esempio 15.1, non si conosce l'integrale generale dell'equazione. La determinazione esplicita degli autovalori e delle autofunzioni di un'equazione differenziale va studiata caso per caso.

Equazioni del tipo (15.1), con un parametro che compare linearmente nel coefficiente C, generalmente emergono quando si risolvono problemi al contorno mediante il metodo di separazione delle variabili. Per esempio, nello studio del problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione del calore della sezione (11.4) abbiamo ottenuto l'equazione dei moti armonici (15.10) (allora avevamo usato X al posto di y e λ^2 invece di λ). Questa equazione è un caso particolare di (15.1) con $A = 1$, $B = 0$ e $C = \lambda^2$. Sotto sono riportati altri esempi.

Esempio 15.2. Esempi di equazioni del tipo (15.1), con un parametro che compare linearmente nel coefficiente C, che abbiamo incontrato finora:

- l'*equazione di Eulero-Cauchy* (8.11), dove

$$A(x) = x^2\,, \quad B(x) = x\,, \quad C(x) = -\mu\,,$$

- l'*equazione di Bessel* (8.37), dove

$$A(x) = x^2\,, \quad B(x) = x\,, \quad C(x) = (x^2 - n^2)\,,$$

- l'*equazione di Legendre* (8.73), dove

$$A(x) = 1 - x^2\,, \quad B(x) = -2x\,, \quad C(x) = n(n+1)\,,$$

- l'*equazione di Legendre associata* (8.74), dove

$$A(x) = 1 - x^2\,, \quad B(x) = -2x\,, \quad C(x) = n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\,.$$

ESEMPIO 15.3. Altri esempi notevoli di equazioni del tipo (15.1) sono:

- l'*equazione di Hermite*

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0\,, \tag{15.14}$$

  dove

$$A(x) = 1\,, \quad B(x) = -2x\,, \quad C(x) = 2n\,,$$

- l'*equazione di Laguerre*

$$xy'' - (1-x)y' + ny = 0\,, \tag{15.15}$$

  dove

$$A(x) = x\,, \quad B(x) = -(1-x)\,, \quad C(x) = n\,,$$

- l'*equazione di Chebyshev*

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0\,, \tag{15.16}$$

  dove

$$A(x) = 1 - x^2\,, \quad B(x) = -x\,, \quad C(x) = n^2\,.$$

ESEMPIO 15.4. Si consideri l'equazione delle onde per il profilo $u(x,t)$ della corda,

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}T(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - k(x)u(x,t)\,. \tag{15.17}$$

dove $\rho = \rho(x)$ e $T = T(x)$ sono rispettivamente la densità di massa e la tensione della corda $= -k(x)y(x,t)$ è una forza esterna armonica. Per separazione delle variabili $u(x,t) = y(x)\cos(\omega t + \phi)$ si ottiene l'equazione per i modi normali della corda:

$$\left[\frac{d}{dx}T(x)\frac{d}{dx} + \omega^2\rho(x) - k(x)\right] y(x) = 0\,, \tag{15.18}$$

Questa equazione è del tipo (15.1).

ESEMPIO 15.5. Un altro esempio fisicamente rilevante di equazione del tipo (15.1) è l'*equazione di Schrödinger indipendente dal tempo* (in unità di misura opportune) per una particella in una dimensione spaziale,

$$y'' + [E - U(x)]\, y = 0\,, \tag{15.19}$$

dove $U(x)$ è l'energia potenziale e E l'energia (o, equivalentemente, per la relazione di Planck $E = \hbar\nu$, la frequenza di oscillazione). La (15.19) si ottiene dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo per la funzione d'onda $\psi(x,t)$ mediante separazione delle variabili $\psi(x,t) = y(x)e^{iEt/\hbar}$.

15.3 *Forma normale e analisi qualitativa delle equazioni*

L'equazione (15.2) è detta *forma standard* dell'equazione differenziale. Per trasformarla nella *forma normale*, intendendo con ciò un'equazione della forma

$$z'' + F(x)z = 0\,, \tag{15.20}$$

scriviamo $y(x) = w(x)z(x)$. Inserendo questo prodotto nell'equazione (15.2), otteniamo

$$\begin{aligned} w''z + 2w'z' + wz'' + bw'z + bwz' + cwz = 0 \\ wz'' + (2w' + bw)z' + (w'' + bw' + c)z = 0\,. \end{aligned} \tag{15.21}$$

Con

$$w = e^{-\frac{1}{2}\int b dx}$$

il coefficiente di z' si annulla. Se adesso poniamo

$$F(x) = w'' + bw' + cw = -\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b' + c\,, \tag{15.22}$$

e dividiamo ambo i membri della (15.21) per w, otteniamo la (15.20).

Esempio 15.6. Scriviamo in forma normale l'equazione di Hermite (15.14) (si lascia come esercizio trasformare in forma normale le altre equazioni degli esempi precedenti). In questo caso si ha $b = -2x$ e $c = 2n$, da cui $F = -x^2 + 1 + 2n$. Quindi la forma normale dell'equazione di Hermite è

$$z'' + (2n + 1 - x^2)z = 0 \tag{15.23}$$

Quando un'equazione è scritta in forma normale può essere analizzata in maniera qualitativa ottenendo informazioni utili sulle sue soluzioni senza dover risolvere l'equazione stessa. Si osservi innanzitutto che nelle regioni dove $F > 0$ la z e la z'' hanno segno opposto e quindi la curva rappresentante la z in tali regioni è sempre *concava* verso l'asse x; viceversa, essa è *convessa* verso l'asse x nelle regioni in cui $F < 0$. È allora intuitivo, e può essere dimostrato rigorosamente, che nelle prime regioni la curva può attraversare più volte l'asse x con andamento oscillatorio, mentre nelle altre, se anche attraversa una volta l'asse x, dovendo poi volgerli sempre la convessità, non può attraversarlo di nuovo e quindi una di tali regioni può contenere al più un solo nodo e la curva non ha mai carattere oscillatorio. Ciò è reso chiaro se si pensa al caso $F =$ cost.: se tale costante è positiva, la curva è una funzione sinusoidale (carattere oascillatorio, concavità verso l'asse x), se è negativa, la curva è esponenziale (carattere non oscillatorio, concavità verso l'asse x).

Nel caso $F = \text{cost.}$ è chiaro che le soluzioni di $z'' + 4z = 0$ oscillano più velocemente di quelle di $z'' + z = 0$. Il matematico francese Jaques Sturm (1803-1855) dimostrò che questo vale in generale nelle regioni in cui F è positiva.

Teorema del confronto di Sturm. Siano $z_2'' + F_2(x)z_2 = 0$ e $z_1'' + F_1(x)z_1 = 0$, con $0 < F_1(x) < F_2(x)$ per tutti gli x in $[a, b]$. Allora tra qualunque due nodi di z_1 in $[a, b]$ c'è un nodo di z_2. (15.24)

Queste considerazioni sono molto utili per discutere qualitativamente l'andamento delle autofunzioni di equazioni con $F = \lambda - U(x)$, dove λ è un parametro e U una funzione assegnata; questo è il caso dell'equazione di Schrödinger, dove U è l'energia potenziale e λ l'energia.

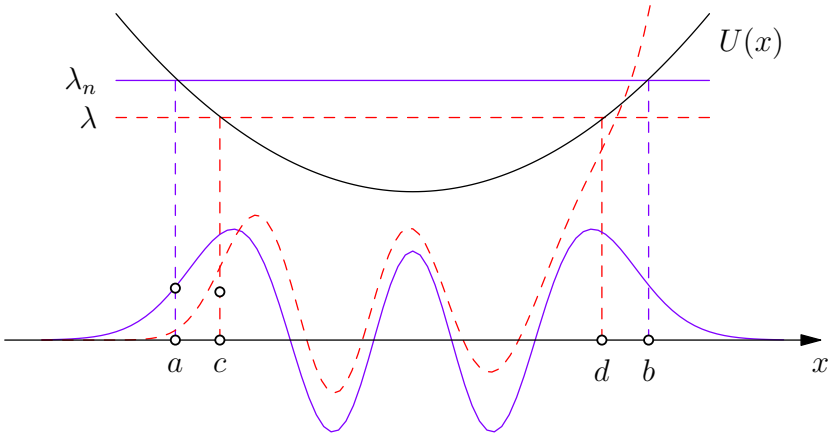


Figura 15.1: Analisi qualitativa di $z'' + [\lambda - U(x)]z = 0$

Consideriamo per esempio un potenziale come quello illustrato in figura 15.1, con un solo minimo e tendente monotonamente all'infinito sia a destra sia a sinistra di questo, in un modo qualunque, non necessariamente simmetrico. Per un valore qualunque di λ consideriamo una curva (tratteggiata in rosso) che verso sinistra tende asintoticamente all'asse x, volgendoli la convessità fino al punto $x = c$, poi inizierà una serie di oscillazioni nel tratto $[c, d]$, per riprendere a destra di d l'andamento non oscillatorio che la porta in generale ad allontanarsi indefinitamente dall'asse x. Solo se λ ha uno dei valori λ_n (autovalori), avviene che la curva torna ad avvicinarsi all'asse x anche verso destra. In quest'ultimo caso essa è un'autofunzione. Per il teorema del confornto di Sturm, al crescere di λ_n aumenta il numero dei nodi dell'autofunzione corrispondente.

15.4 *Equazione di Sturm-Liouville*

Si dice che un'equazione (15.1) è in forma *auto-aggiunta* se $B = A'$ cosicché i primi due termini dell'equazione formano insieme la derivata di Ay' e l'equazione può scriversi come

$$\frac{d}{dx}(Ay') + Cy = 0$$

Si osservi che qualunque equazione del tipo (15.1) può essere messa in forma autoaggiunta: moltiplicando la (15.1) per il fattore non nullo

$$\frac{1}{A}e^{\int (B/A)dx}$$

i tre coefficienti A, B, C diventano rispettivamente

$$P = e^{\int (B/A)dx}, \quad Q = \frac{B}{A}e^{\int (B/A)dx}, \quad R = \frac{C}{A}e^{\int (B/A)dx}$$

e si verifica immediatamente che $Q = P'$, di conseguenza l'equazione si può scrivere

$$\frac{d}{dx}(Py') + Ry = 0\,. \tag{15.25}$$

Se poi C contiene linearmente un parametro λ come nella (15.12), sarà così anche di R, che sarà della forma $R = q(x) - \lambda\rho(x)$ (la scelta del segno negativo è convenzionale, ma utile per gli sviluppi successivi), l'equazione (15.26) avrà la forma

$$\frac{d}{dx}(Py') + [q(x) - \lambda\rho(x)]y = 0\,. \tag{15.26}$$

Risulta poi utile porre $p(x) = -P(x)$ e portare il termine contenente λ a secondo membro, ottenendo così

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]y + q(x)y = \lambda\rho(x)y\,. \tag{15.27}$$

Questa equazione è detta *equazione di Sturm-Liouville*. Qualunque equazione del tipo (15.1) può essere riscritta in questa forma.

Esempio 15.7. Riscriviamo alcune delle equazioni incontrate finora nella forma di Sturm-Liouville.

- Equazione di Legendre:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}\right]y = n(n+1)y \tag{15.28}$$

Qui $x \in [-1,1]$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = 1$, $\lambda = n(n+1)$.

- Equazione di Hermite:

$$-\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2}\frac{d}{dx}\right]y = 2ne^{-x^2}y \tag{15.29}$$

  Qui $x \in [-\infty, \infty]$, $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $\lambda = 2n$.

- Equazione di Laguerre:

$$-\frac{d}{dx}\left[xe^{-x}\frac{d}{dx}\right]y = ne^{-x}y \tag{15.30}$$

  Qui $x \in [0, \infty]$, $p(x) = xe^{-x}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x}$, $\lambda = n$.

- Equazione di Schrödinger indipendente dal tempo:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right]y = Ey \tag{15.31}$$

  Qui $x \in [a, b]$ (con a e b eventualmente $-\infty$ e $+\infty$ rispettivamente), $p(x) = 1$, $q(x) = U(x)$, $\lambda = E$.

15.5 *Operatore di Sturm-Liouville*

La teoria di Sturm-Liouville mira a ottenere informazioni sugli autovalori e autofunzioni dell'equazione di Sturm-Liouville senza risolverla esplicitamente. A tal fine si assume che $p(x)$ sia almeno classe C^1 e che $p(x)$ e $\rho(x)$ siano funzioni *strettamente positive* nell'intervallo (a, b).

Il punto di partenza della teoria è l'osservazione che il primo membro della (15.27) definisce un operatore differenziale, detto *operatore di Sturm-Liouville*,

$$\mathfrak{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\,. \tag{15.32}$$

In termini di questo operatore, l'equazione di Sturm-Liouville può essere riscritta come

$$\mathfrak{L}y = \lambda\rho y \tag{15.33}$$

L'operatore $\mathfrak{L}$ agisce su funzioni definite on $[a, b]$ che sono almeno continuamente differenziabili due volte. Assumeremo che lo spazio lineare $\mathcal{H}$ di queste funzioni sia munito di prodotto scalare L^2, per cui $\mathcal{H} = C^2[a, b] \cap L^2[a, b]$. $\mathfrak{L}$ è un operatore lineare in $\mathcal{H}$, cioè

$$\mathfrak{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathfrak{L}f + \beta\mathfrak{L}g\,,$$

per α e β scalari e f e g funzioni in $\mathcal{H}$.

L'operatore $\mathfrak{L}$ soddisfa la seguente importante uguaglianza, detta *formula di Green*,

$$\langle f\,,\,\mathfrak{L}g\rangle - \langle \mathfrak{L}\,,\,g\rangle = \Big[p(\overline{f}'g - \overline{f}g')\Big]_a^b \tag{15.34}$$

per qualunque coppia di funzioni f e g in $\mathcal{H}$.

Si dice che $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ è un *dominio di autoaggiuntezza* per $\mathfrak{L}$, se per tutte le funzioni f e g in $\mathcal{D}$ si ha

$$\langle f\,,\,\mathfrak{L}g\rangle = \langle \mathfrak{L}f\,,\,g\rangle\,, \tag{15.35}$$

cioè se

$$\Big[p(\overline{f}'g - \overline{f}g')\Big]_a^b = 0 \tag{15.36}$$

Un dominio di autoaggiuntezza per $\mathfrak{L}$ è caratterizzato in termini di condizioni al contorno per le funzioni in $\mathcal{H}$ e/o di condizioni sui coefficienti p e q. Vediamo i casi più rilevanti.

1. Condizioni al contorno (c) (miste omogenee per un intervallo finito $[a,b]$):
$$\begin{cases} \alpha_a y(a) + \beta_a y'(a) = 0 \\ \alpha_b y(b) + \beta_b y'(b) = 0 \end{cases} \tag{15.37}$$
Infatti, se f e g soddisfano queste condizioni, allora $\alpha_a f(a) + \beta_a f'(a) = 0$ e $\alpha_a g(a) + \beta_a g'(a) = 0$. Dalla prima, segue $\alpha_a \overline{f(a)} + \beta_a \overline{f'(a)} = 0$. Allora
$$\overline{f'(a)}g(a) - \overline{f(a)}g'(a) = -\frac{\alpha_a}{\beta_a}\overline{f(a)}g(a) + \frac{\alpha_a}{\beta_a}\overline{f(a)}g(a) = 0$$
(se α_a e α_b non sono entrambe uguali a 0). Lo stesso in b. Allora il secondo membro della (15.34) si annulla. Quindi le condizioni al contorno (c), con $|\alpha_a| + |\beta_a| > 0$ e $|\alpha_b| + |\beta_b| > 0$, definiscono un dominio appropriato $\mathcal{D}_{m.o.}$.

2. $p(a) = p(b)$ e condizioni al contorno (d) (periodiche). Si vede immediatamente che il secondo membro della (15.34) si annulla. Risulta così definito un dominio appropriato $\mathcal{D}_P$ per $\mathfrak{L}$.

3. $p(a) = 0$ e condizione al contorno in b mista omogenea. In questo caso il secondo membro della (15.34) si annulla se f e f' sono limitate in a senza che si richieda che assumano in a un valore al contorno definito. In questo caso il dominio appropriato è formato da funzioni che soddisfano le condizioni al contorno in b e sono limitate con derivata prima limitata in a.

4. $p(b) = 0$ e condizione al contorno in a mista omogenea. Questo caso è analogo al precedente con i ruoli di a e b invertiti.

Dimostrazione della (15.34). Prima si stabiliscono le seguenti formule di Green preliminari:

$$\begin{aligned}\langle f\,,\,\mathfrak{L}g\rangle &= \int_a^b \overline{f}\mathfrak{L}g\,dx \\ &= \int_a^b \overline{f}\left[-\frac{d}{dx}(pg') + qg\right]dx \\ &= -\Big[\overline{f}pg'\Big]_a^b + \int_a^b \Big[\overline{f}'pg' + \overline{f}qg\Big]\,dx\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle \mathfrak{L}f\,,\,g\rangle &= \int_a^b \overline{\mathfrak{L}f}g\,dx \\ &= \int_a^b \left[\overline{-\frac{d}{dx}(pf') + qf}\right]g\,dx \\ &= \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(p\overline{f}' + q\overline{f}\right)\right]g\,dx \\ &= -\Big[\overline{f}'pg\Big]_a^b + \int_a^b \Big[\overline{f}'pg' + \overline{f}qg\Big]\,dx\end{aligned}$$

Allora da queste formule segue che

$$\begin{aligned}\langle f\,,\,\mathfrak{L}g\rangle - \langle \mathfrak{L}\,,\,g\rangle &= -\Big[\overline{f}pg'\Big]_a^b + \Big[\overline{f}'pg\Big]_a^b \\ &= \Big[p(\overline{f}'g - \overline{f}g')\Big]_a^b\end{aligned}$$

□

5. $p(a) = p(b) = 0$. Adesso il dominio è formato da funzioni che sono limitate con derivata prima limitata in a e b, senza che siano specificati valori definiti in questi punti.

6. $[a, b]$ è infinito. Essendo il dominio in L^2, le funzioni devono tendere a 0 all'infinito.

15.6 Problemi di Sturm-Liouville

L'equazione di Sturm-Liuoville insieme con la specificazione di un dominio $\mathcal{D}$ appropriato di $\mathfrak{L}$ è detto *problema di Sturm-Liouville*. Un problema di Sturm-Liouville ha dunque la forma

$$\begin{cases} \mathfrak{L}y(x) = \lambda\rho(x)y(x)\,, \quad x \in [a,b] \\ y(x) \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{15.38}$$

ed è detto

- *regolare*, se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{m.o.}$ e le funzioni $p(x)$ e $\rho(x)$ sono strettamente positive anche in a e b;
- *periodico*, se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_P$;
- *singolare*, negli altri casi (punti 3, 4, 5 o 6 sopra).

Risolvere un problema di Sturm-Liouville significa trovare le coppie di autovalori λ e autofunzioni y_λ che lo risolvono.

Per studiare le proprietà dei problemi di Sturm-Liouville, è utile introdurre l'operatore $\mathfrak{L}_\rho = \mathfrak{L}/\rho(x)$. Si osservi che

Se $\mathfrak{L}$ è autaggiunto rispetto al prodotto scalare L^2, allora $\mathfrak{L}_\rho$ è autaggiunto rispetto al prodotto scalare L^2_ρ. (15.39)

Dimostrazione della (15.39).

$$\begin{aligned} \langle f\,,\, \mathfrak{L}_\rho g\rangle_\rho &= \int \overline{f(x)}\frac{1}{\rho(x)}\mathfrak{L}g(x)\rho(x)dx \\ &= \langle f\,,\, \mathfrak{L}g\rangle = \langle \mathfrak{L}f\,,\, g\rangle \\ &= \int \overline{\mathfrak{L}f(x)}g(x)dx \\ &= \int \overline{\frac{1}{\rho}\mathfrak{L}f(x)}g(x)\rho dx \\ &= \langle \mathfrak{L}_\rho f\,,\, g\rangle_\rho \end{aligned}$$

□

Allora, in termini di $\mathfrak{L}_\rho$, la (15.38) diventa

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_\rho y(x) = \lambda y(x)\,, \quad x \in [a,b] \\ y(x) \in \mathcal{D} \end{cases} \tag{15.40}$$

dove adesso $\mathcal{D} \subset C^2[a,b] \cap L^2_\rho[a,b]$.

Una prima proprietà dei problemi di Sturm-Liouville, di facile dimostrazione, è la seguente.

Gli autovalori di un problema di Sturm-Liouville sono reali. (15.41)

Dimostrazione di (15.41). Sia $\mathfrak{L}_\rho y_\lambda = \lambda y_\lambda$. Allora

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{L}_\rho y_\lambda\,,\, y_\lambda\rangle_\rho &= \langle y_\lambda\,,\, \mathfrak{L}_\rho y_\lambda\rangle_\rho \\ \overline{\lambda}\,\langle y_\lambda\,,\, y_\lambda\rangle_\rho &= \lambda\,\langle y_\lambda\,,\, y_\lambda\rangle_\rho \end{aligned}$$

Poiché $\langle y_\lambda\,,\, y_\lambda\rangle_\rho \neq 0$, $\lambda = \overline{\lambda}$. □

Altrettanto facile è la dimostrazione del seguente teorema.

Le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville sono ortogonali. (15.42)

Dimostrazione di (15.42). Sia $\mathfrak{L}_\rho y_1 = \lambda_1 y_1$ e $\mathfrak{L}_\rho y_2 = \lambda_2 y_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{L}_\rho y_1\,,\, y_2\rangle_\rho &= \langle y_1\,,\, \mathfrak{L}_\rho y_2\rangle_\rho \\ \lambda_1\,\langle y_1\,,\, y_2\rangle_\rho &= \lambda_2\,\langle y_1\,,\, y_2\rangle_\rho \end{aligned}$$

Quindi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\langle y_1\,,\, y_2\rangle_\rho = 0$$

Poiché $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$, $\langle y_1\,,\, y_2\rangle_\rho = 0$. □

I problemi *regolari* di Sturm-Liouville hanno caratteristiche simili al problema dell'esempio 15.1: gli autovalori sono non degeneri, limitati inferiormente e formano una successione che tende all'infinito. Inoltre, le corrispondenti autofunzioni sono una base in $L^2_\rho[a,b]$. Vediamo queste proprietà in dettaglio.

1. Gli autovalori di un problema di Sturm-Liouville regolare sono non degeneri. (15.43)

Il teorema del confronto di Sturm pemette di dimostrare il seguente teorema.

2. Gli autovalori di un problema di Sturm-Liouville regolare formano una successione $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, con $|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \ldots < |\lambda_n| < \ldots$, con $|\lambda_n| \to \infty$ per $n \to \infty$. (15.44)

Si ha infine il seguente teorema, la cui dimostrazione richiede nozioni più avanzate di quelle fornite finora.

3. Le autofunzioni di un problema di Sturm-Liouville regolare formano una base ortogonale in $L^2_\rho[a,b]$ (15.45)

Una notevole e immediata conseguenza di questo teorema è che le autofunzioni $\{y_n\}$ di un problema di Sturm-Liouville regolare permettono lo sviluppo in serie di una funzione f in $\mathcal{D}$,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{y_n}{||y_n||_\rho}, \quad c_n = \left\langle \frac{y_n}{||y_n||_\rho}, f \right\rangle . \tag{15.46}$$

Questa serie, detta *serie di Fourier generalizzata*, converge ad f in media quadratica, cioè

$$\lim_{N\to\infty} \left|\left| f - \sum_{n=0}^{N} c_n \frac{y_n}{||y_n||_\rho} \right|\right|_\rho = 0 \tag{15.47}$$

È interessante osservare che vale un teorema di convergenza puntuale analogo al teorema di Dirichlet per le serie di Fourier: se f e f' sono generalmente continue, allora nei punti di continuità di f si ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{y_n(x)}{||y_n||_\rho}$$

e nei punti di discontinuità la serie converge al valor medio dei limiti destro e sinistro di f.

Dimostrazione di (15.43). Siano y_1 e y_2 due autofunzioni corrispondenti allo stesso autovalore λ. Allora $\mathfrak{L}_\rho y_1 = \lambda y_1$ e $\mathfrak{L}_\rho y_2 = \lambda y_2$. Di conseguenza

$$y_2(x)\mathfrak{L}_\rho y_1(x) - y_1 \mathfrak{L}_\rho y_2(x) = 0$$

Usando la forma esplicita di $\mathfrak{L}_\rho$ questa equazione diventa

$$-y_2(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)y_1'\right] + -y_1(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)y_2'\right] = 0$$
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right)\right] = 0,$$

ossia $p(x)W(y_1,y_2)(x) = c = \text{costante}$, dove $W(y_1,y_2)(x)$ è il Wronskiano di queste soluzioni. Ma

$$W(y_1,y_2)(a) = y_1(a)y_2'(a) - y_1'(a)y_2(a) = 0$$

perché y_1 e y_2 soddisfano le stesse condizioni al contorno in a. Allora deve essere $W(y_1,y_2)(x) = 0$ per tutti gli $x \in [a,b]$. Quindi le due funzioni sono linearmente dipendenti, vale a dire $y_1 = \alpha y_2$, dove α è una costante. □

15.7 Problemi di Sturm-Liouville non regolari

15.8 Il sistema ortogonale delle funzioni di Hermite

L'equazione di Schrödinger (indipendente al tempo) per l'oscillatore armonico può essere scritta della forma

$$u'' + (1 - x^2)u + 2\lambda u = 0\,, x \in \mathbb{R} \tag{15.48}$$

Sotto le condizioni al contorno

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \tag{15.49}$$

l'operatore

$$\mathfrak{H} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \tag{15.50}$$

è autoaggiunto in un opportuno dominio $\mathcal{D} \subset L^2(\mathbb{R})$. Ci aspettiamo che $\mathfrak{H}$ abbia un infinità numerabile di autovalori e che le corrispondenti autofunzioni formino una base in $L^2(\mathbb{R})$. Mostriamo che in effetti è così.

AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI Mediante la trasformazione $u = e^{-x^2/2}y$ la (15.48) diventa l'equazione di Hermite per y:

$$y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$$

Di questa equazione se ne cercano soluzioni della forma $y = \sum c_k x^k$. Derivando, sostituendo in $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0$ e raccogliendo termini uguali si ottiene la relazione

$$c_{k+2} = \frac{2(2 - 2\lambda)}{k+2)(k+1)}$$

(assumendo per semplicità di calcolo $c_0 = c_1 = 1$). Ne risultano due serie infinite

$$1 - \lambda x^2 + \frac{2^2(2-\lambda)\lambda}{4!}x^4 + \frac{2^3(4-\lambda)(2-\lambda)\lambda}{6!}x^6 + \dots \quad \text{e}$$
$$x + \frac{2(1-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{2^2(3-\lambda)(1-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{2^3(5-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)}{7!}x^7 + \dots$$

Per $\lambda = 0, 2, 4, \dots$ la prima serie si riduce a dei polinomi. Lo stesso accade per la seconda per $\lambda = 1, 3, 5, \dots$. I polinomi così ottenuti si chiamano polinomi di Hermite $H_n(x)$ che sono le autofunzioni associate agli autovalori $\lambda_n = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

POLINOMI DI HERMITE I polinomi di Hermite sono definiti a meno di costanti moltiplicative. La consuetudine in fisica è di scegliere

le costanti in modo tale che i polinomi di Hermite con i polinomi definiti dalla funzione generatrice

$$g(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n \,.$$

Una loro caratterizzazione equivalente è in termini della formula:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2} \tag{15.51}$$

Ecco i primi sei, che si ottengono direttamente dalla formula sopra,

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 & H_1 &= 2x \\ H_2 &= 4x^2 - 2 & H_3 &= 8x^3 - 12x \\ H_4 &= 16x^4 - 48x^2 + 12 & H_5 &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \,. \end{aligned}$$

I polinomi di Hermite sono ortogonali rispetto al prodotto scalare

$$\langle f \,,\, g \rangle_{e^{-x^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) e^{-x^2} dx \,, \tag{15.52}$$

cioè rispetto al prodotto scalare (14.1) con $\rho = e^{-x^2}$. Si lascia come esercizio mostrare che

$$||H_n||_{e^{-x^2}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)^2 e^{-x^2} dx} = \sqrt{= 2^n n! \sqrt{\pi}} \,. \tag{15.53}$$

I polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale in $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$. Normalizzandoli, , cioè dividendoli per la loro norma, e moltiplicandoli per la radice quadrata del peso e^{-x^2}, si ottengono le *funzioni di Hermite*

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x) \tag{15.54}$$

che sono ortonormali rispetto all'usuale prodotto scalare $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle \phi_n \,,\, \phi_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \delta_{mn} \,. \tag{15.55}$$

Dimostrazione dell'ortogonalità dei polinomi di Hermite. Si assuma $m < n$. Allora dalle (15.51) e (15.52), $\langle H_m \,,\, H_n \rangle_{e^{-x^2}} = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \left[\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right] dx$. Integrando per parti n volte, e osservando che per ogni polinomio p si ha $p(x)e^{-x^2} \to 0$ per $|x| \to \infty$, si ottiene $\langle H_m \,,\, H_n \rangle_{e^{-x^2}} = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d^n}{dx^n} H_m(x) \right] e^{-x^2} dx = 0$. Perciò H_m è ortogonale a H_n per ogni $m < n$ e quindi, per la simmetria del prodotto scalare, per tutti gli $m \neq n$.

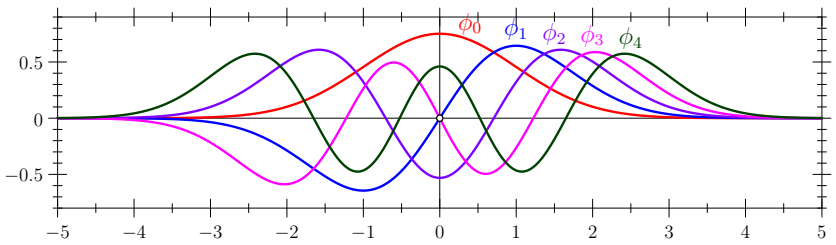


Figura 15.2: le prime quattro funzioni di Hermite.

COMPLETEZZA DELLE FUNZIONI DI HERMITE Stabilire che un insieme di vettori forma un sistema ortonormale non vuol dire stabilire che è una base. Perchè sia una base occorre che il sistema sia completo. In effetti per le funzioni di Hermite vale il teorema:

> Le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale completo in $L^2(\mathbb{R})$. (15.56)

Dimostreremo questo teorema nel prossimo capitolo.

Le funzioni di Hermite sono dunque una base per un'*analisi di Fourier generalizzata* di una funzione f in $L^2(\mathbb{R})$; i coefficienti $c_n = \langle \phi_n , f \rangle$ sono le *coordinate di Hermite* della funzione f.

Problemi

Problema 15.1. □ Trovare gli autovalori e gli autovettori del problema di Sturm-Liouville

$$y'' - y' + \lambda y = 0\,, \quad 0 < x < L$$
$$y(0) = y(L) = 0\,.$$

Problema 15.2. □ Trovare la soluzione generale dell'equazione di Eulero-Cauchy

$$Ax^2y'' + Bxy' + Cy = 0$$

mediante sostituzione $x = e^t$, $v(t) = y(e^t)$.

Problema 15.3. □ Determinare gli autovalori e le autofunzioni degli operatori differenziali

$$(a) \qquad \frac{d^2}{dx^2} : C^2(0,\infty) \to C(0,\infty)$$
$$(b) \qquad \frac{d^2}{dx^2} : L^2(0,\infty) \cap C^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$$

Problema 15.4. □ Dimostrare che l'operatore differenziale

$$-\frac{d^2}{dx^2} : L^2(0,\pi) \cap C^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$$

è autoaggiunto sotto la condizione al contorno $f(0) = f'(\pi) = 0$ e trovarne gli autovalori e gli autovettori.

Problema 15.5. □ (a) Trovare gli autovalori e (b) gli autovettori del problema di Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad 0 < x < L$$
$$y(0) = 0\,, \;\; y'(L) + \beta y(L) = 0\,,$$

dove $L > 0$ e β sono costanti assegnate. (c) Per $\beta > 0$, sviluppare una funzione $f(x)$, $0 < x < L$ in una serie di Fourier generalizzata di queste funzioni normalizzate.

Aiuto. Analizzare separatamente i tre casi $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$. Usare un metodo grafico per individuare gli autovalori.

Problema 15.6. □ Se avete svolto correttamente il problema precedente, avrete trovato che per $\beta = -1/L$, $\lambda = 0$ è autovalore con autofunzione associata $y_0 = x$ e che per $\beta < -1/L$, c'è un autovalore negativo $\lambda_\star$ con autofunzione corrispondente $y_\star = \sinh\sqrt{-\lambda_\star}x$. (1) Mostrare che se $\beta = -1/L$, le autofunzioni trovate al punto (c) del problema precedente non formano una base. (2) È possibile completare tali funzioni e formare una base? (3) Come al punto (1), per $\beta < -1/L$. (4) Come al punto (2), per $\beta < -1/L$. Per comodità di calcolo, assumere $L = 1$.

Problema 15.7. □ (a) Trovare la forma di Sturm-Liouville dell'equazione

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0\,.$$

(b) Stabilire se l'operatore di Sturm-Liouville associato all'equazione è autoaggiunto in

$$\mathcal{D} = L^2(0,L) \cap C^2(0,L) \cap \mathcal{C.C.}\,, \quad L > 0\,,$$

dove $\mathcal{C.C.}$ è l'insieme di funzioni f che soddisfano le condizioni al contorno $f(0) = f(L) = 0$.

Problema 15.8. □ Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\mathfrak{L}y(x) = \lambda y(x)\,, \quad 0 < x < 1$$

per l'operatore $\mathfrak{L} = -\dfrac{d}{dx}(1+x)^2\dfrac{d}{dx}$ con condizioni al contorno $y(0) = y(1) = 0$.

Aiuto. Dopo aver portato l'equazione in forma standard fare la sostituzione $t = 1 + x$, $v(t) = y(t-1)$ e usare i risultati del problema 15.2.

Problema 15.9. □ (a) Verificare mediante calcolo diretto che le autofunzioni del problema precedente sono ortogonali in $L^2(0,1)$. (b) Sulla base dei teoremi generali sui problemi di Sturm-Liouville, stabilire se tali autofunzioni sono una base ortogonale in $L^2(0,1)$. (c) Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier generalizzata di una funzione $f \in L^2(0,1)$ rispetto a tali autofunzioni. (d) Fare un grafico delle prime 6 autofunzioni.

Problema 15.10. □ Trovare gli autovalori e le autofunzioni del problema

$$x^2y'' + \lambda y = 0\,, \quad 0 < x < 1$$
$$y(0) = y(1) = 0\,.$$

Spiegare perché il problema non è un problema di Sturm-Liouville regolare.

PROBLEMA 15.11. □ (a) Trovare un modello matematico per descrivere come evolve la temperatura di una sbarretta sottile rivestita di materiale adiabatico sotto le seguenti condizioni.

Inizialmente la sbarretta ha una certa distribuzione di temperatura e nel corso del tempo, ad un estremo, è costantemente mantenuta ad un data temperatura, mentre all'altro estremo scambia calore con l'ambiente più freddo secondo la legge di raffreddamento di Newton

$$\text{flusso di calore uscente} = h \times \text{temperatura}$$

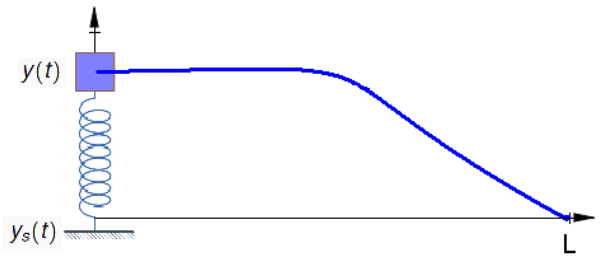
dove

$$h = \frac{\text{coefficiente di trasferimento di calore}}{\text{conducibilità termica del materiale}}$$

(b) Risolvere il problema al contorno del punto (a) per una distribuzione iniziale generica $f(x)$ a quadrato integrabile (mediante separazione delle variabili ricondursi ad un problema di Sturm-Liouville). (c) Applicare quanto trovato in (b) al caso $f(x) =$ costante.

PROBLEMA 15.12. □ (a) Trovare un modello matematico per descrivere come evolve il profilo di una corda elastica sotto le seguenti condizioni.

La corda ha lunghezza a riposo L ed è fissata ad uno dei suoi estremi. L'altro estremo è collegato ad un sistema massa-molla, come mostrato nella figura sotto.



Si facciano ipotesi semplificative adeguate (specificare quali) che permettono di modellizzare la situazione fisica descritta mediante un problema al contorno per l'equazione delle onde con condizioni iniziali miste.

(b) Risolvere il problema al contorno ottenuto per dati iniziali della corda $q(x)$, $p(x)$ generici.

Soluzioni

Problema 15.1. □ L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è

$$r^2 + r + \lambda = 0$$

e ha soluzioni

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$$

Il tipo di soluzioni che si ottiene dipende da fatto se $1 - 4\lambda$ è positivo, negativo o nullo. Discutiamo separatamente i tre casi.

$\boxed{1 - 4\lambda > 0}$ Si hanno due radici reali $(1 + \sqrt{1 - 4\lambda})/2$ e $(1 - \sqrt{1 - 4\lambda})/2$ e la soluzione generale dell'equazione è

$$y = c_1 \exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} x\right) + c_2 \exp\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} x\right)$$

Imponendo che siano soddisfatte entrambe le condizioni al contorno: da $y(0) = c_1 + c_2 = 0$, si ottiene $c_2 = -c_1$ e da $y(L) = 0$,

$$y(L) = c_1 \left[\exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} L\right) - \exp\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} L\right)\right] = 0$$

Essendo mai nullo il termine in parentesi quadrate, si ottiene $c_1 = 0$ a cui corrisponde la soluzione banale $y = 0$ che è sempre soluzione di un problema omogeneo e che quindi ignoriamo.

$\boxed{1 - 4\lambda = 0}$ Si hanno due radici coincidenti $r = 1/2$. Allora la soluzione dell'equazione differenziale è

$$y = c_1 e^{x/2} + c_2 x e^{x/2}\,.$$

Inserendo la prima condizione al contorno, si ottiene $y(0) = c_1 = 0$. Quindi $c_1 = 0$. Allora l'altra condizione al contorno fornisce

$$y(L) = c_2 L e^{L/2} = 0\,.$$

Poiché $L e^{L/2} \neq 0$, ne concludiamo che $c_2 = 0$. Perciò la sola soluzione è la soluzione nulla $y = 0$, che ignoriamo.

$\boxed{1 - 4\lambda < 0}$ Si hanno due radici complesse $1/2 \pm (i/2)\sqrt{4\lambda - 1}$ e la soluzione generale è

$$y = c_1 e^{x/2} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} x\right) + c_2 e^{x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} x\right)$$

La prima condizione fornisce$y(0) = c_2 = 0$ che, inserita nella seconda, dà

$$c_1 e^{L/2} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}L\right) = 0\,.$$

Per non avere nuovamente la soluzione banale , assumiamo $c_1 \neq 0$ e quindi otteniamo

$$\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}L\right) = 0\,, \quad \text{cioè} \quad \frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}L = n\pi \quad n = 1,2,3,\ldots$$

e i λ che soddisfano l'equazione sono dunque

$$\lambda_n = \frac{(2n\pi)^2 + L^2}{4L^2}\,, n = 1,2,3,\ldots\,,$$

che sono dunque gli autovalori cercati. Le autofunzioni corrispondenti sono

$$y_n = e^{x/2} \sin\frac{n\pi}{L}x\,, \quad n = 1,2,3,\ldots\,.$$

PROBLEMA 15.2. □ Mediante sostituzione $x = e^t$, $v(t) = y(e^t)$, cosicché $y(x) = v(\ln x)$, si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2v}{dt^2}$$

Quindi l'equazione $Ax^2y'' + Bxy' + Cy = 0$ diventa

$$0 = Ax^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2v}{dt^2}\right) + Bx\left(\frac{1}{x}\frac{dv}{dt}\right) + Cv\,.$$

Ne concludiamo che v soddisfa l'equazione

$$Av'' + (B-A)v' + Cv = 0$$

L'equazione caratteristica associata a questa equazione differenziale è

$$Ar^2 + (B-A)r + C = 0$$

e ha soluzioni

$$r = \frac{(A-B) \pm \sqrt{(B-A)^2 - 4AC}}{2}$$

Il tipo di soluzioni che si ottiene dipende da fatto se $\Delta = (B-A)^2 - 4AC$ è positivo, negativo o nullo.

$\boxed{\Delta > 0}$ Si hanno due radici reali r_1 e r_2 e la soluzione è $v(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$, da cui

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}\,.$$

$\boxed{\Delta = 0}$ Si hanno due radici coincidenti $r = (B - A)/2$. Allora la soluzione è $v(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$. Poiché $y(x) = v(\ln x)$, si ottiene

$$y(x) = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x = x^r (c_1 + c_2 \ln x)$$

$\boxed{\Delta < 0}$ $\Delta < 0$. Allora si hanno due radici complesse r_1 e r_2,

$$r_{1,2} = \frac{(A - B) \pm i\sqrt{4AC - (B - A)^2}}{2} = \sigma \pm i\omega \,,$$

la soluzione è $v(t) = c_1 e^{\sigma t} \cos \omega t + c_2 e^{\sigma t} \sin \omega t$, da cui

$$y(x) = c_1 x^\sigma \cos(\omega \ln x) + c_2 x^\sigma \sin(\omega \ln x) \,.$$

PROBLEMA **15.3.** □ (a) $e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, (b) $e^{-\sqrt{\lambda}x}$, $\mathrm{Re}\,(\lambda) > 0$.

PROBLEMA **15.4.** □ L'operatore

$$\mathfrak{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

è un operatore di Sturm Liouville con $p = 1$. Quindi la condizione di autoaggiuntezza (15.36) per $\mathfrak{L}$ è

$$\left[(\overline{f}' g - \overline{f} g')\right]_0^\pi = 0$$

Se f e g soddisfano le condizioni al contorno $f(0) = f'(\pi) = 0$ e $g(0) = g'(\pi) = 0$, si ha

$$\begin{aligned}\left[(\overline{f}' g - \overline{f} g')\right]_0^\pi &= \overline{f}'(\pi) g(\pi) - \overline{f}(\pi) g'(\pi) - \overline{f}(0) g'(0) + \overline{f}(0) g'(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Quindi $\mathfrak{L}$ è autoaggiunto.

L'equazione differenziale associata è $y'' + \lambda y = 0$ e la sua soluzione generale è

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x \quad \text{con derivata} \quad y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \,.$$

La condizione in 0 fornisce $y(0) = c_1 = 0$; la condizione in π (tenuto conto che $c_1 = 0$), fornisce $y'(\pi) = c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$, che è soddisfatta se e solo se

$$\sqrt{\lambda}\pi = \frac{n\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \lambda_n = \frac{n^2}{4} \,,$$

che sono dunque gli autovalori di $\mathfrak{L}$. Le autofunzioni associate sono

$$y_n = \sin\sqrt{\lambda_n}x = \sin\frac{nx}{2} \,.$$

PROBLEMA 15.5. □ L'equazione differenziale associata è $y'' + \lambda y = 0$.
(a) Per trovare gli autovalori, distinguiamo i tre casi.

$\boxed{\lambda > 0}$ La soluzione generale dell'equazione è

$$y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x \quad \text{con derivata} \quad y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x\,.$$

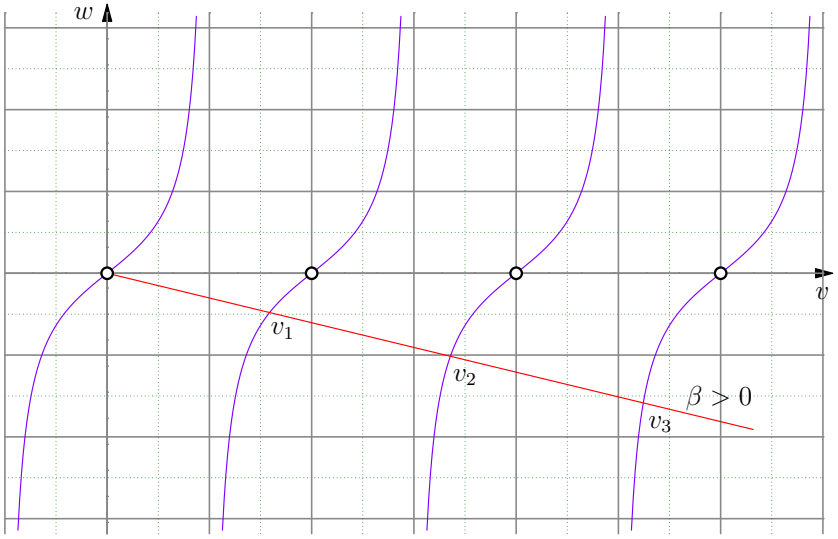
La condizione in 0 fornisce $y(0) = c_1 = 0$; la condizione in L (tenuto conto che $c_1 = 0$) fornisce

$$y'(L) + \beta y(L) = c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}L + \beta c_2 \sin\sqrt{\lambda}L = 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \tan\sqrt{\lambda}L = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\beta}$$

che è l'equazione che determina gli autovalori λ. Non si può risolvere questa equazione esattamente, si possono tuttavia ottenere graficamente valori approssimati delle soluzioni. Ponendo $v = \sqrt{\lambda}L$ l'equazione diviene

$$\tan v = -\frac{v}{\beta L}$$

Si possono ottenere i valori di v e da questi i valori di λ, dai punti di intersezione $v_1, v_2, v_3, \ldots$ dei grafici di $w = \tan v$ e di $w = -v/(\beta L)$, come indicato nella figura sotto. Nella costruzione di questi abbiamo supposto che L e β siano positivi. Si osservi che abbiamo bisogno di trovare solo le radici positive dell'equazione.



$\boxed{\lambda = 0}$ La soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

La prima condizione dà $y(0) = c_1 = 0$ e la seconda,

$$y'(L) + \beta y(L) = c_2 + \beta c_2 L = c_2(1 + \beta L) = 0\,.$$

Se β è positivo non ci sono autovalori. Se il parametro β è tale che

$$\beta = -\frac{1}{L}$$

allora $\lambda = 0$ è un autovalore con autofunzione associata $y_0 = x$. Per altri valori di β, $\lambda = 0$ non è un autovalore.

$\boxed{\lambda < 0}$ La soluzione generale dell'equazione è

$$y = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sinh\sqrt{-\lambda}x \quad \text{con derivata} \quad y'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{-\lambda}x + c_2\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}x\,.$$

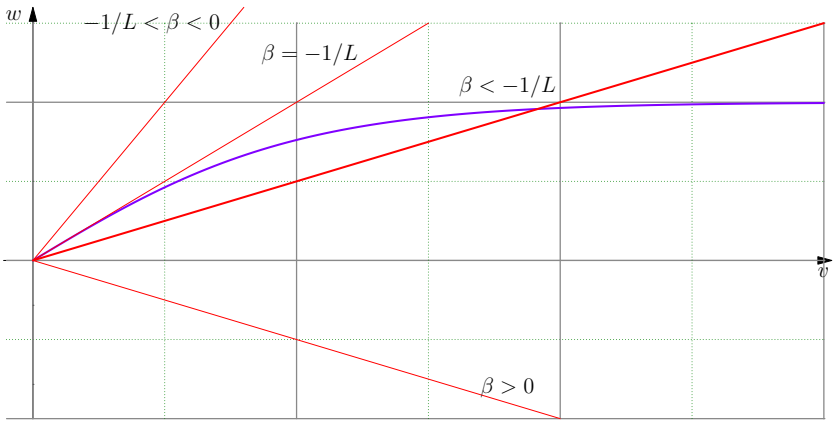
La condizione in 0 fornisce $y(0) = c_1 = 0$; la condizione in L (tenuto conto che $c_1 = 0$) fornisce

$$y'(L) + \beta y(L) = c_2\sqrt{-\lambda}\cosh\sqrt{-\lambda}L + \beta c_2 \sin\sqrt{-\lambda}L = 0\,,$$

cioè

$$\tan\sqrt{-\lambda}L = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{\beta}$$

Posto $v = \sqrt{-\lambda}L$, analizziamo graficamente l'equazione:



Poiché la tangente imperbolica non oscilla, si può avere al più un autovalore negativo $\lambda_\star$ quando $\beta < -1/L$. L'autofunzione associata è

$$y_\star(x) = \sinh\sqrt{-\lambda_\star}x\,.$$

$\boxed{\beta > 0}$ (b) Le autofunzioni sono date da

$$y_n(x) = c_n \sin\sqrt{\lambda_n}x$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ rappresentano gli autovalori del punto (a). Per normalizzarle imponiamo

$$||y_n||^2 = \int_0^L c_n^2 \sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,dx = 1$$

cioè

$$\frac{c_n^2}{2}\int_0^L \left(1-\cos^2\sqrt{\lambda_n}x\right)\,dx = 1$$

ovvero

$$c_n^2 = \frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}-\sin 2\sqrt{\lambda_n}L}\,.$$

Pertanto insieme ortonormale di autofunzioni è dato da

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}-\sin 2\sqrt{\lambda_n}L}}\sin\sqrt{\lambda_n}x\,, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

(c) Essendo il problema di Sturm-Liouville regolare, $\{y_n\}$ è una base ortonormale in $L^2[0,L]$. Se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x)$$

si ha

$$c_n = \int_0^L (f(x)y_n(x)\,dx = \sqrt{\frac{4\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}-\sin 2\sqrt{\lambda_n}L}}\int_0^L \sin\sqrt{\lambda_n}x\,f(x)\,dx$$

Sotto la sola ipotesi che che f è a quadrato integrabile, l'uguaglianza si deve intendere in norma L^2. Se f è liscia, la convergenza della serie è uniforme e quindi l'uguaglianza è puntuale.

PROBLEMA 15.6. □ (a) Per $\beta = -1/L$ c'e anche l'autofunzione $y_0 = x$ associata all'autovalore $\lambda = 0$. Questa funzione è ortogonale a tutte le funzioni $\{y_n\}$ trovate al punto (c) dell'esercizio precedente. Per stabilire questo, posto $L = 1$, si calcoli

$$\int_0^1 x\sin\sqrt{\lambda_n}x dx\,.$$

Per mostrare che questo integrale è uguale a 0, si usi l'equazione le cui soluzioni sono i λ_n.

(b) ...

(c) ...

(d) ...

PROBLEMA 15.7. □ I coefficienti dell'equazione sono $A = x^2$, $B = x$, $C = \lambda$. Allora moltiplicando l'equazione per

$$\frac{1}{A}e^{\int(B/A)dx} = \frac{1}{x^2}e^{\int(1/x)dx} = \frac{1}{x^2}e^{\ln x} = \frac{1}{x}$$

la si porta nella forma

$$\frac{d}{dx}(Py') + Ry = 0\,,$$

dove

$$P = e^{\int (B/A)dx} = x\,, \quad R = \frac{C}{A} e^{\int (B/A)dx} = \frac{\lambda}{x}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\lambda}{x} y = 0\,.$$

L'operatore di Sturm-Liouville è dunque

$$\mathfrak{L} = -\frac{d}{dx} x \frac{d}{dx}$$

Affinché l'operatore sia autoaggiunto, occorre che

$$\langle f\,,\, \mathfrak{L}g\rangle - \langle \mathfrak{L}\,,\, g\rangle = \left[x(\overline{f}' g - \overline{f} g')\right]_0^L = 0$$

per $f, g \in \mathcal{D}$. Come si può facilmente vedere, la condizione è verificata nel dominio considerato.

PROBLEMA **15.8.** □ Il problema agli autovalori di Sturm Liouville è

$$\begin{cases} \left[(1+x)^2 y'\right]' + \lambda y = 0\,, \quad 0 < x < 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione per y ha la forma standard

$$\left[(1+x^2)y'\right]' + \lambda y = (1+x^2)y'' + 2(1+x)y' + \lambda y = 0$$

Facendo la sostituzione $t = 1 + x$, $v(t) = y(t-1)$ e osservando che se $0 < x < 1$ allora $1 < t < 2$, si ottiene

$$\begin{cases} t^2 v'' + 2tv' + \lambda v = 0\,, \quad 1 < t < 2 \\ v(1) = v(2) = 0 \end{cases}$$

L'equazione per v è un'equazione di Eulero-Cauchy con $A = 1$, $B = 2$ e $C = \lambda$ la cui soluzione generale è stata trovata nel problema 15.2. Distinguiamo i tre casi a seconda che

$$\Delta = (B - A)^2 - 4AC = 1 - 4\lambda$$

sia nullo, positivo o negativo.

CASO 1 $1 - 4\lambda = 0$. Si hanno due radici coincidenti $r = (A - B)/2 = -1/2$ e la soluzione è dunque

$$v(t) = t^{-1/2}(c_1 + c_2 \ln t)$$

La prima condizione al contorno richiede che $v(1) = c_1 = 0$ e la seconda che $v(2) = (1/\sqrt{2})c_2 \ln 2 = 0$. Quindi la sola soluzione è la soluzione nulla, che ignoriamo.

CASO 2 $1-4\lambda>0$. Si hanno due radici reali r_1 e r_2 e la soluzione è

$$v(t)=c_1t^{r_1}+c_2t^{r_2}\,.$$

Dalla prima condizione al contorno si ottiene $v(1)=c_1+c_2=0$, cioè $c_2=-c_1$ che, inserita nella seconda, fornisce $v(2)=c_1(2^{r_1}-2^{r_2}=0$, la cui soluzione è $c_1=0$, essendo $2^{r_1}-2^{r_2}\neq 0$. Anche in questo caso la sola soluzione è la soluzione nulla, che ignoriamo.

CASO 3 $1-4\lambda<0$. Si hanno due radici complesse r_1 e r_2,

$$r_{1,2}=\frac{(A-B)\pm i\sqrt{4AC-(B-A)^2}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\,,$$

e la soluzione è

$$v(t)=c_1t^{-1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln t\right)+c_2t^{-1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln t\right)\,.$$

Dalla prima condizione al contorno abbiamo $v(1)=c_1=0$ e dalla seconda

$$v(2)=\frac{c_2}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln 2\right)=0$$

che è soddisfatta se e solo se

$$\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln 2=n\pi\,,\quad \text{cioè}\quad 4\lambda-1=4\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2\quad n=1,2,3,\dots\,.$$

Ne concludiamo che gli autovalori λ_n sono

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2+\frac{1}{4}\,,\quad n=1,2,3,\dots$$

e le autofunzioni corrispondenti sono

$$v_n(t)=t^{-1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln t\right)=t^{-1/2}\sin\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\ln t\right)$$

Di conseguenza, il problema di Sturm-Liouville di partenza ha i seguenti autovalori e autofunzioni

$$\begin{aligned}\lambda_n&=\left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2+\frac{1}{4}\,,\\ y_n&=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\sin\left[\frac{n\pi}{\ln 2}\ln(1+x)\right]\,,\quad n=1,2,3,\dots\,.\end{aligned}$$

PROBLEMA **15.9.** □ (a) Mediante sostituzione

$$z=\frac{\pi}{\ln 2}\ln(x+1)\,,\quad dz=\frac{\pi}{\ln 2}\frac{dx}{1+x}\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}\langle y_n\,,\,y_m\rangle &= \int_0^1 (1+x)^{-1}\sin\left[\frac{n\pi}{\ln 2}\ln(1+x)\right]\sin\left[\frac{m\pi}{\ln 2}\ln(1+x)\right]dx\\ &= \frac{\ln 2}{\pi}\int_0^\pi \sin nz\sin mz dz = \frac{\ln 2}{2}\delta_{mn}\end{aligned}$$

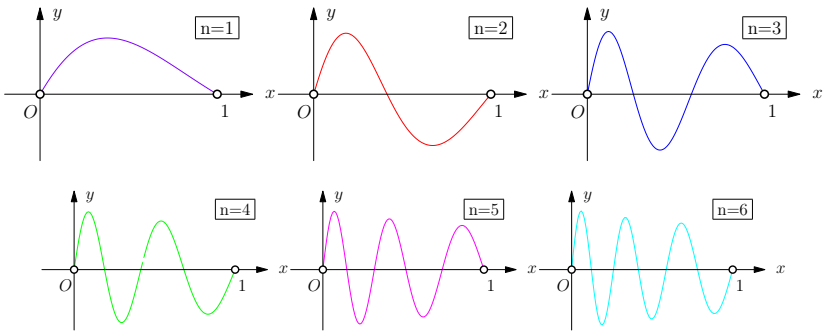
(b) Si, essendo un problema di Sturm-Liouville *regolare*. (c)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{1+x}}\sin\left[\frac{n\pi}{\ln 2}\ln(1+x)\right]$$

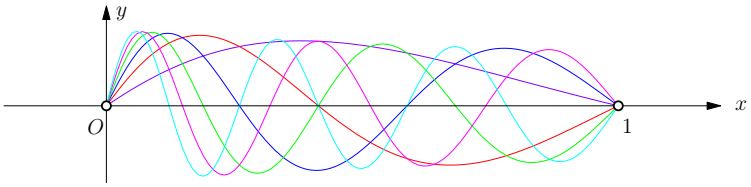
dove

$$c_n = \frac{2}{\ln 2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\sin\left[\frac{n\pi}{\ln 2}\ln(1+x)\right] f(x)\,dx$$

(d) Grafico delle prime 6 autofunzioni:



Mettendo tutte le onde insieme nello stesso grafico (e dilatando la scala) si può visualizzare il teorema del confronto di Sturm:



Problema 15.10. □ L'equazione per y è un'equazione di Eulero-Cauchy con $A = 1$, $B = 0$ e $C = \lambda$ la cui soluzione generale è stata trovata nel problema 15.2. Distinguiamo i tre casi a seconda che

$$\Delta = (B-A)^2 - 4AC = 1 - 4\lambda$$

sia nullo, positivo o negativo.

Caso 1 $1 - 4\lambda = 0$. Si hanno due radici coincidenti $r = (A-B)/2 = 1/2$ e la soluzione è dunque

$$y(x) = x^{1/2}(c_1 + c_2 \ln x)$$

La prima condizione al contorno richiede che $y(0) = 0$. Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0\,,$$

questa condizione è verificata senza dover porre alcun vincolo sulle costanti c_1 e c_2. La seconda condizione fornisce $y(1) = c_1 = 0$. Quindi $\lambda = 1/4$ è un autovalore con autofunzione associata

$$y_{1/4}(x) = \sqrt{x}\ln x$$

Caso 2 $1 - 4\lambda > 0$. Si hanno due radici reali r_1 e r_2,

$$r_{1,2} = \frac{(A-B) \pm i\sqrt{4AC - (B-A)^2}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}\,,$$

e la soluzione è

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}\,.$$

Dalla prima condizione al contorno si ottiene $y(0) = 0$, che è soddisfatta se entrambe le radici r_1 e r_2 sono positive (se fossero negative, la soluzione esploderebbe nello 0). La condizione di positività delle radici (tenuto conto della positività di Δ) è

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2} > 0\,, \quad \Rightarrow \quad 0 < 1 - 4\lambda < 1, \quad \Rightarrow \quad 0 < \lambda < \frac{1}{4}$$

La condizione al contorno in $x =$ fornisce $y(1) = c_1 + c_2 = 0$, da cui $c_2 = -c_1$. Ne concludiamo che qualunque valore di λ nell'intervallo

$$0 < \lambda < \frac{1}{4}$$

è un autovalore con corrispondente autofunzione

$$y_\lambda = \sqrt{x}\left(x^{\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}} - x^{-\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}}\right)$$

Caso 3 $1 - 4\lambda < 0$. Si hanno due radici complesse r_1 e r_2,

$$r_{1,2} = \frac{(A-B) \pm i\sqrt{4AC - (B-A)^2}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2}\,,$$

e la soluzione è

$$y(x) = c_1 x^{1/2}\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln x\right) + c_2 x^{1/2}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\ln x\right)\,.$$

La seconda condizione al contorno fornisce $y(1) = c_1 = 0$, e la prima è sempre soddisfatta.

Riassumendo, abbiamo trovato che tutti i $\lambda \in (0, \infty)$ sono autovalori. Gli autovalori dono dunque un continuo e non un'infinità numerabile. Questo è possibile perché l'equazione non corrisponde ad un

problema di Sturm-Liouville regolare. Nella forma di Sturm-Liouville l'equazione è infatti

$$-y'' = \lambda\rho(x)y\,, \quad \rho(x) = \frac{1}{x^2}$$

e $\rho(x)$ non è una funzione continua in $x \in [0,1]$ (non è limitata in 0), come richiesto per un problema di Sturm-Liouville regolare.

PROBLEMA **15.11.** □ Sia L la lunghezza della sbarretta. Posto un estremo nell'origine e l'altro nel punto L dell'asse x, l'equazione di evoluzione della sua temperatura u(x,t) è l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < L$$

con condizione iniziale $u(x,0) = f(x)$. Mediante scelta opportuna della scala di temperatura, poniamo $u(0,t) = 0$. Per l'estremo in L si ha la condizione data dalla legge di raffreddamento di Newton

$$u(L,t) + \beta\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

(avendo assorbito in β le costanti fisiche). Per come il problema è stato posto, $\beta > 0$. Riassumendo, il modello matematico della situazione fisica descritta è il seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \quad 0 < x < L\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x)\,, \ \ 0 < x < L \\ u(0,t) = 0\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) + \beta u(L,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ |u(x,t)| < M \end{cases}$$

Come già visto varie volte, per separazione delle variabili $u(x,t) = T(t)y(x)$ si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda DT(t) = 0 \quad &\Rightarrow T(t) = \text{cost.}e^{-\lambda Dt} \\ y''(x) + \lambda y(x) = 0 \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno per u portano al seguente problema di Sturm-Liuoville per y

$$\begin{aligned} &y''(x) + \lambda y(x) = 0 \\ &y(0) = 0\,, \quad y'(L) + \beta y(L) = 0\,, \end{aligned}$$

la cui soluzione è stata trovata nel problema 15.5. Usando la base di autofunzioni trovate al punto (c) di tale problema, si determina facilmente

$$u(x,t) = \ldots$$

16
Integrali di Fourier

Indice

16.1 Dai problemi al contorno agli integrali di Fourier 331

16.2 Integrali di Fourier come limiti di serie di Fourier 336

16.3 Il paradiso degli integrali di Fourier 337

16.4 La trasformata di Fourier di operatori 339

16.5 Autovettori della trasformazione di Fourier 342

16.6 La trasformazione di Fourier in L^2 344

16.7 Trasformate di Fourier di funzioni generalizzate 345

16.8 Applicazioni alle equazioni differenziali e integrali 347

16.9 Applicazioni alla probabilità 352

Tavole di trasformate di Fourier 355

Problemi 357

Soluzioni 360

16.1 Dai problemi al contorno agli integrali di Fourier

Consideriamo il problema al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} = 0, \quad t > 0 \\ |u(x,t)| < M \end{cases} \tag{16.1}$$

Come abbiamo già visto varie volte, per separazione delle variabili $u(x,t) = T(t)y(x)$, si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned} &T'(t) + \lambda D T(t) = 0 \quad \Rightarrow T(t) = \text{cost.} e^{-\lambda^2 D t} \\ &y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0 \end{aligned}$$

Affinché la soluzione sia limitata deve essere $\lambda^2 > 0$. Le due soluzioni linearmente indipendenti della seconda equazione sono $y_1 = \exp(i|\lambda|t)$ e $y_2 = \exp(-i|\lambda|t)$. Adesso, a differenza dei problemi di Sturm-Liouville del capitolo precedente, le condizioni al contorno non pongono vincoli sugli autovalori: qualunque $\lambda \in \mathbb{R}$ va bene. La soluzione a variabili separate è dunque

$$u_\lambda(x,t) = T_\lambda(t) y_\lambda(x) e^{-\lambda^2 D t}(c_1(\lambda) e^{i|\lambda|x} + c_2(\lambda) e^{-i|\lambda|t})$$

Si osservi che queste soluzioni non soddisfano la condizione $\lim_{|x|\to\infty} = 0$. Possiamo però ottenere una soluzione di (16.1) che la soddisfi, mediante la seguente sovrapposizione continua di $u_\lambda(x,t)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 D t} e^{i\lambda t} g(\lambda)\, d\lambda$$

Per tenere conto dei due esponenziali di segno opposto, abbiamo integrato da $-\infty$ a ∞, la funzione $g(\lambda)$ ingloba quindi i due coefficienti $c_1(\lambda)$ e $c_2(\lambda)$. Il fattore $1/\sqrt{2\pi}$ di fronte all'integrale è stato inserito per ragioni di comodità che risulteranno chiare nel seguito.

Al tempo $t = 0$ deve essere soddisfatta la condizione iniziale, deve dunque valere la condizione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} g(\lambda)\, d\lambda \tag{16.2}$$

Questa è un'equazione per l'incognita g, data la funzione f. Fourier risolse questa equazione e trovò che la soluzione è

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\, dx \tag{16.3}$$

La (16.2) e la (16.3) sono dette rispettivamente *sviluppo in integrale di Fourier* e *trasformata di Fourier della funzione* f. La (16.2) è anche detta *teorema di inversione di Fourier*.

Per incominciare a chiarire il significato matematico preciso dei risultati di Fourier, osserviamo, in primo luogo, che gli integrali (16.2) e (16.3) devono intendersi come integrali impropri di Riemann. Inoltre, una condizione sufficiente per l'esistenza della trasformata di Fourier è che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Infatti, se la funzione f è assolutamente integrabile, allora l'integrale (16.3) è convergente. Chiaramente, se si impongono condizioni sulla f, le proprietà di g sono determinate e il

problema matematico è stabilire un insieme minimo di condizioni su f di modo che valga la (16.2).

Si osservi che se $g \in L^1(\mathbb{R})$, allora la formula di inversione si riconduce al calcolo di una trasformata di Fourier. Dalle (16.2) e (16.3) segue infatti che se g è la trasformata di Fourier di f, allora f è la trasformata di Fourier di g calcolata in $-x$. Questa proprietà della coppia f, g è detta *relazione di reciprocità*.

ESEMPIO 16.1. $f(x) = e^{-ax^2}$. Il calcolo è già stato fatto nella sezione 5.9. Usando il metodo della derivazione sotto il segno di integrale, abbiamo ottenuto

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}$$

Verifichiamo che vale il teorema di inversione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} g(y)\, dy &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4a}} e^{iyx} g(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{x^2}{4A}}, \quad A = \frac{1}{4a} \\ &= e^{-ax^2} \end{aligned}$$

ESEMPIO 16.2. $f(x) = e^{-|x|}$.

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-iy)} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+iy)} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Se *assumiamo* che si possa applicare il teorema di inversione, otteniamo

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{1+y^2} dy = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2} dy\,.$$

ESEMPIO 16.3. $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$, che è la funzione che vale 1 se $-a < x < a$ e vale 0 altrimenti. Equivalentemente

$$f(x) = \mathrm{u}(x+a) - \mathrm{u}(x-a)$$

dove u è la funzione scalino unitario.

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-a,a]}(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixy} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin ay}{y} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ay}{y} \end{aligned}$$

L'ultimo esempio mostra che se $f \in L^1(\mathbb{R})$, non è detto che $g \in L^1(\mathbb{R})$. La dimostrazione del teorema di inversione di Fourier richiede molta cura. Senza entrare troppo nel dettaglio, cerchiamo di farci un'idea di quali condizioni su f siano richieste.

Incominciamo col riscrivere l'integrale improprio a secondo membro della (16.2) come limite per $M \to \infty$ di

$$I_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} e^{i\lambda x} g(\lambda)\, d\lambda\,.$$

per (questo significa definirlo come parte principale di Cuchy). Sostituendo g data dalla (16.3) nell'integrale, otteniamo

$$I_M = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-M}^{M} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-y)} f(y)\, dy \right] d\lambda$$

Scambiando l'ordine di integrazione (tenuto conto dell'ultimo esempio sopra), I_M diventa

$$I_M = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} e^{i\lambda(x-y)} d\lambda \right] f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin M(x-y)}{\pi(x-y)} \right] f(y)\, dy$$

Per determinare il limite $\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{M \sin(x-y)}{\pi(x-y)} \right] f(y)\, dy$, si osservi che $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Mu}{\pi u}\, du = 1$ e che la situazione è analoga a quella incontrata studiando la convergenza delle serie di Fourier. Vale a dire, si può applicare il lemma di Riemann-Lebesque a patto di assumere che la funzione $f(x)$ sia sufficientemente regolare. Ad esempio, se essa soddisfa condizioni analoghe a quelle del teorema di Dirichlet per le serie di Fourier, cioè che essa, oltre a essere assolutamente integrabile, sia generalmente liscia, allora ci aspettiamo che

$$\lim_{M\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin M(x-y)}{\pi(x-y)} \right] f(y)\, dy = f(x)$$

Questo è proprio il *teorema di inversione di Dirichlet* per gli integrali di Fourier.

Se denotiamo con $C^1_g(\mathbb{R})$ lo spazio lineare delle funzioni su tutta la retta reale generalmente continue con derivata prima generalmente continua in ogni intervallo finito, il teorema può essere formulato nel modo seguente.

Teorema di inversione di Dirichlet. Sia $f \in C^1_g(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, allora esiste

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

e nei punti di continuità di f si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy \tag{16.4}$$

Se x è un punto di discontinuità di f, allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{2} \left[f(x^+) + f(x^-) \right]\,.$$

ESEMPIO 16.4. Il teorema si applica alla funzione $f(x) = e^{-|x|}$ dell'esempio 16.2, poiché essa è assolutamente integrabile, continua e con derivata generalmente continua. Quindi l'inversione che là era stata assunta è in effetti giustificata. Il teorema si applica inoltre alla funzione $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$ dell'esempio 16.1, essendo essa generalmente liscia. Si ha quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ay}{y} e^{ixy} dy = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ay}{y} e^{ixy} dy = \chi_{[-a,a]}(x)$$

per $x \neq \pm a$. Nei punti $\pm a$, che sono i punti di discontinuità di f, lo sviluppo in integrale di f converge al valore $1/2$, che è la media dei limiti destro e sinistro della funzione in questi punti.

NOTAZIONI E CONVENZIONI PER LA TRASFORMATA DI FOURIER Ci sono varie convenzioni per la trasformata di Fourier. Le convenzioni più usate sono le seguenti.

$$\text{①} \quad \mathfrak{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi xy} dx \qquad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}(y) e^{i2\pi xy} dy$$

$$\text{②} \quad F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{ixy} dy$$

$$\text{③} \quad g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy$$

Per i valori del dominio della funzione e della sua trasformata si usano spesso le notazioni fisiche standard. Per esempio, se la variabile indipendente rappresenta uno spazio, usando la convenzione ②, si scrive

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk\,, \quad F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx\,,$$

dove k è il numero d'onda. L'analogo per per una funzione dipendente dal tempo un tempo è

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega\,, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

dove ω è una frequenza. Si osservi che nel caso di funzioni dipendenti dal tempo è abbastanza comune usare una convenzione opposta per il segno negli esponenziali e scrivere

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega\,, \quad g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt\,.$$

La ragione di questa convenzione è che quando si analizza secondo Fourier una funzione nello spazio e nel tempo, si vuole avere la seguente forma per sviluppo in integrale doppio

$$f(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k,\omega) e^{i(kx-\omega t)}\, d\omega dk\,, \tag{16.5}$$

che può essere interpretata come una somma continua di treni d'onda. Se si fa questa scelta, allora

$$F(k,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i(kx-\omega t)}dxdt \tag{16.6}$$

In questo capitolo useremo quasi sempre la ③. Osserviamo infine che per la trasformata di Fourier di una funzione $f(x)$ si usano anche le notazioni $\widehat{f}(y)$ e $(\mathscr{F}f)(y)$. Per mettere in evidenza le variabili indipendenti in gioco, si usa anche scrivere $\mathscr{F}\{f(x)\}(y)$.

16.2 *Integrali di Fourier come limiti di serie di Fourier*

Lo sviluppo in integrale di Fourier è il limite dello sviluppo in serie di Fourier quando il periodo $[-L, L]$ della funzione aumenta a dismisura fino a ricoprire l'intera retta reale $\mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x)$ cessa dunque di essere periodica. Mostriamo questo fatto in modo euristico.

Consideriamo le formule dell'analisi di Fourier per funzioni periodiche

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{\pi}{L}nx} \tag{16.7}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{\pi}{L}nx}dx \tag{16.8}$$

Se la funzione f decade in maniera sufficientemente rapida quando L aumenta, l'integrale a secondo membro della (16.8) convergerà nel limite di grandi L, ma il fattore $1/L$ davanti farà tendere a zero le coordinate di Fourier. Quindi nel limite $L \to \infty$ la quantità che resta finita è Lc_n. Allora moltiplichiamo e dividiamo per $2L$ a secondo membro della (16.7),

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} [2Lc_n]\, e^{i\frac{\pi}{L}nx}\frac{1}{2L} \tag{16.9}$$

Poniamo $\Delta y = \pi/L$, $y_n = n\Delta y = n\pi/L$ e

$$\Delta y = \frac{\pi}{L} \quad y_n = n\Delta y = \frac{\pi}{L}n \quad C(y_n) = 2Lc_n$$

Allora la (16.8) e (16.7) diventano

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} C(y_n)e^{iy_n x}\Delta y \tag{16.10}$$

$$C(y_n) = \int_{-L}^{L} f(x)e^{-iy_n x}dx \tag{16.11}$$

Se adesso passiamo al limite $L \to \infty$, riconoscendo a secondo membro della (16.10) la somma di Riemann di un integrale improprio, otteniamo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(y) e^{iyx} dy \tag{16.12}$$

$$C(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx \tag{16.13}$$

Se definiamo $g(y) = C(y)/\sqrt{2\pi}$, queste equazioni sono proprio le (16.2) e (16.3).

Si osservi che come per le serie di Fourier, possiamo esprimere lo sviluppo in integrale di Fourier in termini di funzioni reali: usando la formula di Eulero per l'esponenziale, si ottiene

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} C(y) + i \operatorname{Im} C(y)] \, [\cos xy + i \sin xy] \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} C(y) \cos xy - \operatorname{Im} C(y) \sin xy] \, dy \quad \text{(assumendo } f \text{ reale)} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \operatorname{Re} C(y) \cos xy \, dy + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \operatorname{Im} C(y) \sin xy \, dy \, . \end{aligned}$$

Allora, introducendo le funzioni

$$A(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} C(y) = \frac{1}{2\pi} \left(C(y) + \overline{C(y)} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy \, dx \tag{16.14}$$

$$B(y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} C(y) = \frac{1}{2\pi} \left(C(y) - \overline{C(y)} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy \, dx \, , \tag{16.15}$$

lo sviluppo di f in integrale di Fourier diventa

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left[A(y) \cos xy \, dy + B(y) \sin xy \right] \, dy \, . \tag{16.16}$$

Le funzioni A e B sono dette rispettivamente *trasformata coseno* e *trasformata seno* della funzione f. Si osservi che la (16.16) è l'analogo continuo dello sviluppo in serie di Fourier in termini di coordinate di Fourier a_n e b_n reali.

16.3 *Il paradiso degli integrali di Fourier*

In questa sezione introduciamo uno spazio di funzioni in cui lo sviluppo in integrale di Fourier e la trasformata sono ben definite e ne studieremo alcune proprietà.

Diremo *buona* una funzione $f(x)$ se è infinitamente differenziabile e se è tale che essa e le sue derivate vanno a zero all'infinito più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|x|$. Ne è un esempio paradigmatico la funzione e^{-x^2}. Diremo che una funzione $\phi(x)$

è *abbastanza buona* se $\phi(x)$ e le sue derivate crescono all'infinito (negativo o positivo) al più come una qualche potenza positiva di $|x|$. Si dimostra facilmente che la derivata di una funzione buona è buona la somma di due funzioni buone è ancora una funzione buona. È altrettanto semplice che il prodotto di una funzione buona e di una funzione abbastanza buona è ancora una funzione buona. L'insieme delle funzioni buone forma dunque uno spazio lineare, che denoteremo con $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, in cui è ben definito l'usuale prodotto scalare L^2 in quanto $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Consideriamo adesso l'operatore

$$\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \mathscr{F}f(y) = \widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Questo operatore è detto *trasformazione di Fourier* e come vedremo nel seguito può essere esteso a tutto $L^2(\mathbb{R})$.

Sorprendentemente, le proprietà di $\mathscr{F}$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, incluse quelle che continuano a valere quando $\mathscr{F}$ è esteso a $L^2(\mathbb{R})$, sono molto facili da dimostrare. In questo senso, $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ è il "paradiso" dell'integrale di Fourier. Elenchiamo le proprietà più importanti.

(I) La trasformata di Fourier di una funzione buona è ancora buona, ovvero:

$$\text{Se } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}), \text{ allora anche } \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}). \tag{16.17}$$

(II) $\mathscr{F}$ è un operatore *lineare*, cioè

$$\mathscr{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{F} f + \beta \mathscr{F} g\,,$$

per α e β scalari e f e g funzioni in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(III) Poiché le funzioni in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ soddisfano le condizioni del teorema di inversione di Dirichlet, per f in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si ha

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy\,. \tag{16.18}$$

Essendo $\widehat{f}$ in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, ne segue in particolare che

$$f = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \widehat{f} = 0 \tag{16.19}$$

In altri termini, $\mathscr{F}$ è un operatore *invertibile* in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, con inverso $\mathscr{F}^{-1}$ dato da

$$\mathscr{F}^{-1} : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad \mathscr{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy} dy$$

Dimostrazione di (16.17). Dimostriamo che se $f(x)$ è una funzione buona, allora anche $\widehat{f}(y)$ lo è. Deriviamo $\widehat{f}(y)$ p volte. Poiché f è buona, possiamo scambiare derivata e integrale

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\widehat{f}^{(p)}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^p}{dy^p}\left[f(x)e^{-ixy}\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^p f(x) e^{-ixy} dx\end{aligned}$$

Integriamo per parti n volte il secondo membro (tenendo conto che f si annulla all'infinito) secondo lo schema

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{(-ix)^p f(x)}_{\text{deriviamo}} \underbrace{e^{-ixy}}_{\text{integriamo}} dx\,.$$

Otteniamo

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{2\pi}\widehat{f}^{(p)}(y)\right| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n}\left[(-ix)^p f(x)\right] \frac{1}{(-iy)^n} e^{-ixy} dx\right| \\ &\le \frac{1}{|y|^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d^n}{dx^n}\left[x^p f(x)\right]\right| dx\end{aligned}$$

Quindi $\widehat{f}^{(p)}$ è di ordine $|y|^{-n}$ per ogni n, cioè decresce più rapidamente di qualunque potenza negativa di $|y|$ e quindi è una funzione buona. □

(IV) $\mathscr{F}$ è un operatore unitario in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, cioè

$$\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^{-1} \tag{16.20}$$

Essendo unitario, $\mathscr{F}$ conserva la norma, per cui si ha $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(y)|^2 dy \tag{16.21}$$

questa relazione è nota come *dentità di Parseval-Plancherel*.

(V) Sia $\mathfrak{I}$ l'operatore di inversione, $\mathfrak{I}f(x) = f(-x)$. Allora

$$\mathscr{F}^{-1} = \mathfrak{I}\mathscr{F} \tag{16.22}$$

Questa è la relazione di reciprocità che abbiamo già menzionato: se g è la trasformata di Fourier di f, allora f è la trasformata di Fourier di g calcolata in $-x$.

Vale il teorema di convoluzione:

$$\mathscr{F}(f \star h)(y) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}f(y)\mathscr{F}h(y) \tag{16.23}$$

(Si osservi che se f e h sono buone, anche $f \star h$ e le sue derivate hanno decrescenza rapida, e quindi $f \star h$ è una funzione buona.) Si osservi che, essendo la trasformata di Fourier inversa di $\widehat{f}(y)$ la trasformata di Fourier di $\widehat{f}(-y)$, si avrà

$$\sqrt{2\pi}\mathscr{F}(fh)(y) = \mathscr{F}f \star \mathscr{F}h(y)$$

(VII) $\mathscr{F}^4 = \mathbb{1}$, dove $\mathbb{1}$ è l'operatore identità. Questo fatto è espresso efficacemente dal seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathscr{F}} & \widehat{f}(y) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathscr{F}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}} \\ \widehat{f}(-y) & \xleftarrow{\mathscr{F}} & f(-x) \end{array}$$

16.4 *La trasformata di Fourier di operatori*

In questa sezione studiamo come la trasformazione di Fourier agisce su alcuni operatori lineari di interesse nelle applicazioni. Assumeremo per semplicità di esposizione che il dominio di questi operatori sia lo spazio $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni buone, ma, in molti casi, questa restrizione può essere indebolita e richiedere che siano soddisfatte le condizioni minime affinché gli operatori siano ben definiti in $L^2(\mathbb{R})$. Chiariremo meglio questo punto sotto.

Elenchiamo gli operatori lineari che intendiamo considerare e le loro proprietà.

Dimostrazione di (16.20). L'aggiunto di $\mathscr{F}$ è definito dalla relazione

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{F}^* g\,,\, f\rangle &= \langle g\,,\, \mathscr{F} f\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(y)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(y) dy} \right] f(x) dx \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^* g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(y) dy \\ &= \mathscr{F}^{-1} g(x) \end{aligned}$$

□

(VI) *Dimostrazione di* (16.23). Dalla definizione di trasformata di Fourier,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuy} du \\ \widehat{h}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(v) e^{-ivy} dv\,. \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} &(2\pi)\widehat{f}(y)\widehat{h}(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u+v)y} f(u) h(v) du dv\,. \end{aligned}$$

Mediante cambiamento di variabili $(u = u, x = u + v)$ nell'integrale doppio,

$$du dv = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,x)} du dx\,,$$

dove

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &(2\pi)\widehat{f}(y)\widehat{h}(y) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(u+v)y} f(u) h(v) du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(u) h(v) du dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) h(x-u) du \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f \star h(x) dx \\ &= \sqrt{2\pi}\widehat{f \star h}(y)\,, \end{aligned}$$

ossia

$$\widehat{f \star h}(y) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(y)\widehat{h}(y)$$

che è quanto si voleva dimostrare. □

(I) Operatore $\mathcal{Q}$ che moltiplica una funzione $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ per il suo argomento,

$$\mathcal{Q}f(x) = xf(x)\,.$$

Per esempio, se $f(x) = e^{-x^2}$, allora $\mathcal{Q}f = xe^{-x^2}$ o se $g(k) = e^{-k^4}$, allora $\mathcal{Q}g(k) = ke^{-k^4}$. Chiaramente, $\mathcal{Q}$ è un operatore lineare. Poiché le funzioni buone sono a decrescenza rapida , se f è buona, anche $\mathcal{Q}f$ lo è. Chiaramente, affinchè $\mathcal{Q}$ sia ben definito in $L^2(\mathbb{R})$ basta richiedere meno, basta infatti che il suo dominio siano le funzioni f in $L^2(\mathbb{R})$ tali che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|^2 dx < \infty\,.$$

Questo è un esemplificazione di che cosa intendevamo sopra con indebolire la restrizione che le funzioni siano in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

$\mathcal{Q}$ è auto-aggiunto. Si ha infatti

$$\langle f\,,\,\mathcal{Q}g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}xg(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{xf(x)}g(x)dx = \langle \mathcal{Q}f\,,\,g\rangle\ .$$

(II) Operatore derivata $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dx}$ che deriva una funzione $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{D}f(x) = f'(x)\,.$$

Poichè le funzioni in in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ sono infinitamente differenziabili con derivate a decrescenza rapida, se f è in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, anche $\mathcal{D}f$ lo è. Come per $\mathcal{Q}$, osserviamo che affinchè $\mathcal{D}$ sia ben definito in L^2, basterebbe richiedere che il suo dominio siano le funzioni f derivabili e tali che

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx < \infty\,.$$

$\mathcal{D}$ è anti-hermitiano: infatti, mediante integrazione per parti e tenendo conto dell'annullamento all'infinito delle funzioni in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si ottiene

$$\begin{aligned}\langle f\,,\,\mathcal{D}g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g'(x)dx = f(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f'(x)}g(x)dx \\ &= -\langle \mathcal{D}f\,,\,g\rangle\ .\end{aligned}$$

Lo si trasforma in un operatore autoaggiunto moltiplicandolo per $-i$ (oppure i). In questo modo si ottiene l'operatore auto-aggiunto

$$\mathcal{P} = -i\frac{d}{dx}$$

(III) Operatore di traslazione $\mathcal{T}_b$ che trasla di un tratto b (positivo o negativo) la funzione su cui agisce:

$$\mathcal{T}_b f(x) = f(x-b)\,.$$

(Per esempio, la gaussiana e^{-x^2} centrata nell'origine diventa la gaussiana $e^{-(x-b)^2}$ spostata di un tratto b a destra, se $b > 0$.) Vale l'uguaglianza $\mathcal{T}_b = e^{-ib\mathcal{P}} = e^{-b\mathcal{D}}$, che può essere dimostrata mediante sviluppo in serie di Taylor

$$e^{-b\mathcal{D}} f = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-b\mathcal{D})^n}{n!}\right] f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(-b)^n = f(x-b)$$

Consideriamo adesso come la trasformazione di Fourier agisce su questi operatori calcolando $(\mathscr{F}Af)(y)$, dove A è uno di tali operatori.

(I) $\mathcal{Q}$

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\mathcal{Q}f)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ixy}dx = i\frac{d}{dy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx \\ &= -\mathcal{P}\mathscr{F}f\end{aligned}$$

Quindi $\mathscr{F}\mathcal{Q} = -\mathcal{P}\mathscr{F}$, ossia

$$\mathscr{F}\mathcal{Q}\mathscr{F}^{-1} = -\mathcal{P} \qquad (16.24)$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & xf(x) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathscr{F}^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}} \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{-\mathcal{P}} & i\widehat{f}'(y) \end{array}$$

(II) $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\mathcal{D}f)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ixy}dx \quad \text{(integriamo per parti)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-iy)e^{-ixy}dx = iy\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixy}dx \\ &= i\mathcal{Q}\mathscr{F}f\end{aligned}$$

Quindi $\mathscr{F}\mathcal{D} = i\mathcal{Q}\mathscr{F}$, cioè $\mathscr{F}\mathcal{D}\mathscr{F}^{-1} = i\mathcal{Q}$. In termini fisici, questo significa che la derivazione $\frac{d}{dx}$ nel dominio spaziale diventa la moltiplicazione per ik nel dominio dei numeri d'onda. Se passiamo all'operatore $\mathcal{P} = -i\mathcal{D}$, la relazione precedente diventa

$$\mathscr{F}\mathcal{P}\mathscr{F}^{-1} = \mathcal{Q} \qquad (16.25)$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{D}} & f'(x) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathscr{F}^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}} \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{i\mathcal{Q}} & iy\widehat{f}(y) \end{array}$$

(III) $\mathcal{T}_b$

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\mathcal{T}_b f)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-b)e^{-ixy}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iy(u+b)}du \\ &= e^{-iyb}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}dx = e^{-iyb}\widehat{f}(y) = e^{-i\mathcal{Q}b}\mathscr{F}f\end{aligned}$$

Quindi $\mathscr{F}\mathcal{T}_b = e^{-i\mathcal{Q}b}\mathscr{F}$, cioè $\mathscr{F}\mathcal{T}_b\mathscr{F}^{-1} = e^{-i\mathcal{Q}b}$. Ricordando che $\mathcal{T}_b = e^{-ib\mathcal{P}}$, riscriviamo questa formula come

$$\mathscr{F}e^{-ib\mathcal{P}}\mathscr{F}^{-1} = e^{-ib\mathcal{Q}}\,, \qquad (16.26)$$

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\mathcal{P}} & -if'(x) \\ \uparrow{\scriptstyle \mathscr{F}^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}} \\ \widehat{f}(y) & \xrightarrow{\mathcal{Q}} & y\widehat{f}(y) \end{array}$$

così risulta chiaro che questa formula è in effetti una conseguenza della (16.25).

Analogamente, si dimostra che per l'operatore di modulazione $\mathcal{M}_b f(x) = e^{ixb} f(x) = e^{ib\mathcal{Q}} f(x)$ si ha

$$\mathscr{F} e^{ib\mathcal{Q}} \mathscr{F}^{-1} = e^{-ib\mathcal{P}} = \mathcal{T}_b \,.$$

Questa relazione può essere ottenuta anche direttamente dalla (16.24).

Passiamo ora brevemente in rassegna come si trasformano altri operatori che si incontrano nelle applicazioni. Sia $\Lambda_\alpha f(x) = f(\alpha x)$ un *cambiamento di scala* (che induce, per $\alpha > 1$, una "compressione" della funzione, per non fare confusione si tenga a mente l'esempio della gaussiana e^{-ax^2}, dove aumentare a significa diminuirne lo scarto quadratico medio, cioè restringere la gaussiana). Allora

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda_\alpha f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-ixy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iuy/\alpha} d\frac{u}{\alpha} \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \widehat{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Quindi, ad una "compressione" della funzione nel dominio spaziale corrisponde una dilatazione nel dominio delle frequenze e viceversa (si pensi al passaggio della luce attraverso una fenditura sottile e allo sparpagliamento delle frequenze spaziali, cioè dei numeri d'onda, che ne consegue). Il cambiamento di scala $\alpha = -1$ porta alla proprietà di inversione temporale (interpretando x come un tempo) o di parità (interpretando x come uno spazio): se $h(x) = f(-x)$ allora $\widehat{h}(y) = \widehat{f}(-y)$. Consideriamo infine la coniugazione complessa. Se $h(x) = \overline{f(x)}$, allora

$$\begin{aligned} \widehat{h}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ixy} dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix(-y)} dx} = \overline{\widehat{f}(-y)} \,. \end{aligned}$$

In particolare, se $f(x)$ è reale si ha $\widehat{f}(-y) = \overline{\widehat{f}(y)}$, mentre se $f(x)$ è puramente immaginaria si ha $\widehat{f}(-y) = -\overline{\widehat{f}(y)}$.

16.5 *Autovettori della trasformazione di Fourier*

Scopo di questo capitolo è mostrare che le funzioni di Hermite ϕ_n sono autovettori della trasformazione di Fourier. Per stabilire questo,

introduciamo preliminarmente gli operatori

$$\mathsf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{Q} + i\mathcal{P}\right], \qquad \mathsf{a}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{Q} - i\mathcal{P}\right]$$

Dalle (16.24) e (16.25) segue che che la trasformata di Fourier agisce moltiplicamente su di essi:

$$\mathscr{F}\mathsf{a}\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathscr{F}\mathcal{Q}\mathscr{F}^{-1} + i\mathscr{F}\mathcal{P}\mathscr{F}^{-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\mathcal{P} + i\mathcal{Q}\right] = i\mathsf{a}$$
$$\mathscr{F}\mathsf{a}^*\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathscr{F}\mathcal{Q}\mathscr{F}^{-1} - i\mathscr{F}\mathcal{P}\mathscr{F}^{-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\mathcal{P} - i\mathcal{Q}\right] = -i\mathsf{a}^*$$

Consideriamo adesso le funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{(\mathsf{a}^*)^n}{\sqrt{n!}}\phi_0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}. \tag{16.27}$$

Si lascia come esercizio mostrare che queste sono proprio le funzioni di Hermite introdotte nel capitolo precedente. Essendo lisce, ed avendo un decadimento esponenziale all'infinito, le ϕ_n sono funzioni buone; essendo buone, la loro trasformata di Fourier è ben definita.

Calcoliamo $\mathscr{F}\phi_0$. Trascurando la costante moltiplicativa, otteniamo

$$\mathscr{F}\left[e^{-x^2/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}e^{-ixy}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{1/2}}e^{-x^2/(4(1/2))} = e^{-x^2/2}$$

Ne concludiamo che ϕ_0 è un autovettore di $\mathscr{F}$ con autovalore 1.

Adesso calcoliamo $\mathscr{F}\phi_n$:

$$\mathscr{F}\frac{(\mathsf{a}^*)^n}{\sqrt{n!}}\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}}\mathscr{F}\mathsf{a}^{*n}\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}}\mathscr{F}\mathsf{a}^{*n}\mathscr{F}^{-1}\phi_0$$

Nel primo passaggio abbiamo inserito l'identità $\mathbb{1} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}$ e nel secondo abbiamo usato il fatto che $\mathscr{F}\phi_0 = \phi_0$. Essendo

$$\mathscr{F}\mathsf{a}^{*n}\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}\mathsf{a}^*\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\mathsf{a}^*\mathscr{F}^{-1}\ldots = \left(\mathscr{F}\mathsf{a}^*\mathscr{F}^{-1}\right)^n$$

e $\mathscr{F}\mathsf{a}^*\mathscr{F}^{-1} = (-i)\mathsf{a}^*$, ne concludiamo che

$$\mathscr{F}\mathsf{a}^{*n}\mathscr{F}^{-1}\phi_0 = (-i)^n\mathsf{a}^{*n}\phi_0\,,$$

da cui

$$\mathscr{F}\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(-i)^n\mathsf{a}^{*n}\phi_0 = (-i)^n\phi_n \tag{16.28}$$

Abbiamo così dimostrato che le funzioni ϕ_n sono autovettori di $\mathscr{F}$ con autovalori $(-i)^n = e^{-in\pi/2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Che questi siano gli autovalori non deve sorprendere: poiché $\mathscr{F}^4 = \mathbb{1}$, gli autovalori di $\mathscr{F}$ sono radici quarte dell'unità, che sono proprio 1, $i = e^{i\pi/2}$, $-1 = e^{i2\pi/2}$ e $-i = e^{i3\pi/2}$.

16.6 La trasformazione di Fourier in L^2

Incominciamo col dimostrare il teorema (15.56) del capitolo precedente che afferma che le funzioni di Hermite formano una base in $L^2(\mathbb{R})$.

Dalla sezione 14.2 ricordiamo che un sistema ortogonale è completo se e solo se è chiuso. E un sistema ortogonale è chiuso se non esiste alcun vettore non nullo nello spazio di Hilbert che sia ortogonale a tutti gli elementi del sistema. Allora, essendo le funzioni di Hermite della forma (15.54), è sufficiente mostrare che se

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

allora $f(x)$ deve essere la funzione nulla. Consideriamo la funzione

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} f(x) e^{-izx} dx$$

come funzione della variabile complessa z. L'integrale converge assolutamente e uniformemente in ogni regione finita del piano complesso. Quindi $F(z)$ non ha singolarità e deve essere una funzione intera. In altre parole, possiamo rappresentare $F(z)$ in serie di potenze,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

e il raggio di convergenza della serie deve essere infinito. Allora

$$c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0) = \frac{(-i)^n}{n!\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^n f(x) dx = 0$$

per ipotesi. Ne segue che

$$F(z) = 0$$

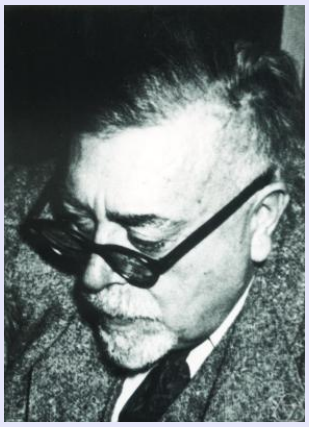
Poiché in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier inversa della funzione nulla è nulla si ha

$$e^{-x^2/2} x^n f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 0\,,$$

che è proprio quel che occorreva dimostrare per dimostrare che le funzioni di Hermite formano un sistema ortogonale chiuso.

Le funzioni di Hermite formano dunque una *base ortonormale* in $L^2(\mathbb{R})$. Risulta così stabilita l'equivalenza unitaria di $L^2(\mathbb{R})$ e ℓ^2 nello stesso senso in cui il sistema trigonometrico permette di stabilire l'equivalenza unitaria tra $L^2(\mathbb{T})$ e ℓ^2.

Sfruttando questo risultato, siamo in grado di stabilire che l'operatore $\mathscr{F}$ *si estende da* $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *ad un operatore unitario in* $L^2(\mathbb{R})$. Questo è un risultato che che Norbert Wiener ottenne negli anni 30 del secolo scorso (finalmente un po' di matematica del 900!). Ecco le tappe della dimostrazione:



Norbert Wiener (1894–1964) è stato un matematico americano. Bambino prodigio, divenne poi un matematico che contribuì significativamente allo sviluppo della matematica applicata nel XX secolo (dalla teoria dei processi stocastici all'ingegneria elettronica e delle telecomunicazioni). È il padre della cibernetica e della teoria del controllo; è sua la formalizzazione della nozione di feed-back. In fisica teorica è noto per la misura di Wiener, che si applica alla teoria del moto browniano e alla integrazione lungo cammini di Feynman.

(a) Il sistema delle funzioni di Hermite $\{\phi_n\} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ è una base ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Quindi qualunque funzione in $L^2(\mathbb{R})$ può essere decomposta nella base $\{\phi_n\}$:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \langle \phi_n , f \rangle$$

(c) La (16.28) fornisce l'azione di $\mathscr{F}$ sui vettori della base $\{\phi_n\}$:

$$\mathscr{F}\phi_n = (-i)^n \phi_n = e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n$$

(d) Quindi $\mathscr{F}$ può essere estesa per linearità a tutto lo spazio $L^2(\mathbb{R})$:

$$\mathscr{F} f = \mathscr{F} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n \langle \phi_n , f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathscr{F}\phi_n) \langle \phi_n , f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ni\frac{\pi}{2}} \phi_n \langle \phi_n , f \rangle$$

Fine. (La dimostrazione appare molto semplice perché tutti i passi sono già stati fatti nelle sezioni precedenti).

Risulta così stabilità l'identità di Parseval-Plancherel per tutte le funzioni in $L^2(\mathbb{R})$. E risulta così anche stabilito il seguente sviluppo in serie dell'integrale di Fourier:

$$\mathscr{F} f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(k) e^{-ni\frac{\pi}{2}} \quad \text{dove} \quad c_n = \langle \phi_n , f \rangle$$

16.7 *Trasformate di Fourier di funzioni generalizzate*

La trasformata di Fourier $\widehat{f}(y)$ della funzione generalizzata $f(x)$ è definita dalla successione $\widehat{f_n}(y)$, dove $\widehat{f_n}(y)$ è la trasformata di Fourier di $f_n(y)$, e $f_n(y)$ è una successione (regolare) che definisce $f(x)$.

L'esempio paradigmatico di funzione generalizzata è la delta di Dirac che è definita, ad esempio, dalla successione (regolare)

$$\delta_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{10.7}$$

La trasformata di Fourier di $\delta_n(x)$ è

$$\widehat{\delta_n}(y) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-y^2/(4n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/(4n)}$$

che è una successione (regolare) che converge alla la funzione $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Quindi,

$$\mathscr{F}(\delta) = \widehat{\delta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{16.29}$$

Naturalmente, occorre mostrare che questa definizione è consistente, ma questo è presto fatto: dall'identità di Parseval-Plancherel si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{f_n}(y)} \widehat{F}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_n(x)} F(x) dx$$

per ogni funzione F buona con trasformata di Fourier $\widehat{F}$ (che sarà anch'essa buona). Quindi se f_n è regolare anche $\widehat{f_n}$ lo è. Inoltre, a successioni equivalenti che definiscono f, corrisponderanno successioni equivalenti che definiscono la stessa $\widehat{f}$.

Viceversa,

$$\mathscr{F}(1) = \widehat{1}(y) = \sqrt{2\pi}\delta(y) \tag{16.30}$$

Le proprietà della trasformata di Fourier di funzioni buone si estendono alle funzioni generalizzate. Vediamone alcuni esempi di rappresentazioni di Fourier di funzioni generalizzate che sono utili nelle applicazioni.

Esempio 16.5. Per quanto visto sopra

$$\widehat{\delta}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

dunque

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk \tag{16.31}$$

Esempio 16.6. Dalla (16.31), per $x \to ax$:

$$\delta(ax) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikax} dk = \frac{1}{2\pi|a|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{16.32}$$

Esempio 16.7. Dalla (16.31), per $x \to x - b$:

$$\delta(x-b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-b)} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-ibk} dk \tag{16.33}$$

Ne segue che

$$\mathscr{F}\{\delta(x-b)\}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ibk}$$

Esempio 16.8.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(ak) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2} e^{ikx} dk = \frac{1}{2} \left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$$

Esempio 16.9. Sia $\delta_T^{\#}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ il pettine di Dirac (10.25) di periodo T. Allora la sua trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_T^{\#}}(\omega) &= \mathscr{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathscr{F}\{\delta(t-nT)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta}, \quad \text{dove } \theta = T\omega \end{aligned}$$

Ma

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} = 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(k\theta) = D_N(\theta)$$

è il nucleo di Dirichlet introdotto nella sezione 10.6. Nel limite $N \to \infty$, esso converge a $\delta^{\#}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\theta - 2\pi n)$. Allora

$$\begin{aligned}\widehat{\delta^{\#}_T}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-inT\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\pi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(T\omega - 2\pi n) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T})\end{aligned}$$

Morale: la trasformata di Fourier di un pettine di Dirac è ancora un pettine di Dirac.

16.8 *Applicazioni alle equazioni differenziali e integrali*

Si possono usare le trasformate e gli sviluppi in integrali di Fourier per risolvere vari problemi di matematica applicata e di fisica.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI Illustriamo il *metodo della trasformata di Fourier* per risolvere equazioni alle derivate parziali facendo riferimento all'equazione del calore. Lo schema di soluzione è il seguente:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk \\ \Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ \dfrac{d\widehat{u}(k,t)}{dt} = -Dk^2 \widehat{u}(k,t) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k) e^{-Dk^2 t} \end{array}$$

Essendo $\widehat{u}(k,t)$ della forma $\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\widehat{h_t}(k)$, possiamo applicare il teorema di convoluzione (16.23) e concludere che

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} h_t \star f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_t(x-y) f(y) dy \qquad (16.34)$$

Poiché

$$\mathscr{F}^{-1}\{e^{-Dk^2 t}\}(x) = \frac{1}{2Dt} e^{-x^2/(4Dt)},$$

otteniamo

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(4Dt)} f(y) dy$$

che è proprio la soluzione (11.7) che avevamo anticipato nel capitolo 11.

La caratteristica principale di questo schema è che una equazione alle derivate parziali lineare viene trasformata in una equazione alle

derivate ordinarie lineare:

$$\begin{array}{ccc} \text{Eq. der. parz.} & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_t(x-y) f(y) dy \\ \Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ \text{Eq. der. ord.} & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)\widehat{h_t}(k) \end{array}$$

Lo schema di soluzione mediante trasformata di Fourier è dunque del tipo

$$\begin{array}{ccc} \text{Equazione per } y & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & y \\ \Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ \text{Equazione per } \widehat{y} & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{y} \end{array} \tag{16.35}$$

e si applica ad altre equazioni alle derivate parziali lineari e a certe equazioni integrali e equazioni alle derivate ordinarie lineari.

EQUAZIONI INTEGRALI Un'equazione integrale è un'equazione in cui la funzione incognita appare sotto il segno di integrale, come, per esempio nell'equazione

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x,u) y(u)\, du\,, \tag{16.36}$$

dove $f(x)$ e $k(x,u)$ sono funzione assegnate e $y(x)$ è l'incognita. La (16.36) è un esempio di equazione integrale *lineare* non omogenea, l'equazione essendo omogenea quando $f(x) = 0$. La funzione $k(x,u)$ è solitamente chiamato *nucleo*.

Lo schema di soluzione (16.43) è appropriato quando il nucleo è della forma $K(x,u) = g(x-u)$, dove g è una data funzione di una variabile. Essendo in questo caso l'integrale un prodotto di convoluzione, per trasformazione di Fourier diventa un prodotto ordinario e l'equazione integrale un'equazione algebrica che può essere facilmente risolta. Più precisamente, si consideri un'equazione integrale della forma

$$y(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u) y(u)\, du\,,\,, \tag{16.37}$$

e si supponga che le trasformate di Fourier $\widehat{f}(k)$, $\widehat{g}(k)$ e $\widetilde{y}(k)$ esistano. Prendendo allora la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'equazione, per il teorema di convoluzione, si ottiene

$$\widetilde{y}(k) = \widehat{f}(k) + \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)\widetilde{y}(k) \qquad \Rightarrow \qquad \widetilde{y}(k) = \frac{\widehat{f}(k)}{1 - \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}\,,$$

da cui segue la soluzione, espressa come integrale di Fourier,

$$y(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{ \frac{\widehat{f}(k)}{1 - \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\widehat{f}(k)}{1 - \sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)} \right] e^{ikx} dk\,,$$

assumendo che l'integrale esista. In alcuni casi si riesce a calcolare l'integrale e ad esprimerlo mediante funzioni elementari.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE ORDINARIE OMOGENEE Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) = xy(x)\,. \tag{16.38}$$

La soluzione si ottiene facilmente seguendo le frecce nello schema sotto, partendo da $y''(x) = xy(x)$ e muovendosi in senso antiorario.

$$\begin{array}{ccc} y''(x) = xy(x) & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & y(x) = C\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik^3/3}e^{ikx}dk \\ \Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ -k^2\widehat{y}(k) = iy'(k) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & Ce^{ik^3/3} \end{array} \tag{16.39}$$

Le soluzioni dell'equazione (16.38) sono dette *funzioni di Airy*, dal nome dell'astronomo inglese George Airy (1801–92). Questa equazione compare in vari problemi di problemi di astronomia, ottica e meccanica quantistica. Qualche commento sembra dunque opportuno.

In primo luogo, notiamo che si può esprimere la soluzione

$$C\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik^3/3}e^{ikx}dk$$

in termini di quantità reali usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso e scegliere la costante moltiplicativa a nostro piacimento (fatta una scelta, si ottengono per moltiplicazione per una costante tutte soluzioni linearmente indipendenti. Dopo aver osservato che l'integrale con il seno si annulla, si arriva a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik^3/3}e^{ikx}dk = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\left(kx - \frac{k^3}{3}\right)dk \equiv \mathrm{Ai}(x)\,.$$

L'integrale che definisce la funzione $\mathrm{Ai}(x)$ è detto *integrale di Airy*.

È facile vedere che le soluzioni delle equazioni

$$y'' = \omega^2 xy \quad \text{e} \quad y'' = xy - Ey$$

sono pure funzioni di Airy che argomenti riscalati o traslati e quindi i limiti di grandi $|x|$, grandi ω o grandi $|E|$ sono essenzialmente la stessa cosa. La funzione $\mathrm{Ai}(x)$ decade rapidamente per $x \to \infty$, ma tutte le soluzioni linearmente indipendenti da $\mathrm{Ai}(x)$ crescono rapidamente in tale limite, e una di loro è convenzionalmente denominata $\mathrm{Bi}(x)$. Per $x \to \infty$ sia $\mathrm{Ai}(x)$ sia $\mathrm{Bi}(x)$ hanno un andamento oscillatorio con un decadimento lento, come le funzioni di Bessel.

Essendo l'equazione differenziale $y''(x) = xy(x)$ è del secondo ordine, la soluzione deve dipendere da due costanti arbitrarie, ma noi ne abbiamo trovato una sola. Come mai? La ragione è la seguente. Poiché $\mathrm{Bi}(x)$ cresce rapidamente all'infinito, la sua trasformata di Fourier è mal definita e dunque non la si può vedere con il metodo della trasformata di Fourier.

Un'altra cosa inizialmente sconcertante dell'integrale di Airy è che può sembrare che esso diverga all'infinito. Ricordiamo che una serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\theta_n}$, con θ_n reale, deve divergere, in quanto i termini non tendono a zero (se non nel senso esteso in cui tale serie può convergere a una funzione delta di Dirac, per esempio). Tuttavia, un integrale improprio può convergere anche se l'integrando mantiene modulo 1, proprio perché la velocità di oscillazione aumenta quando $k \to \pm\infty$ (per maggiori dettagli, si rileggano i commenti fatti a pag. 117). Nel caso in esame, questo può essere controllato mediante integrazione per parti per ridurre la formula ad un integrale con un termine k^3 nel denominatore più altri termini manifestamente finiti.

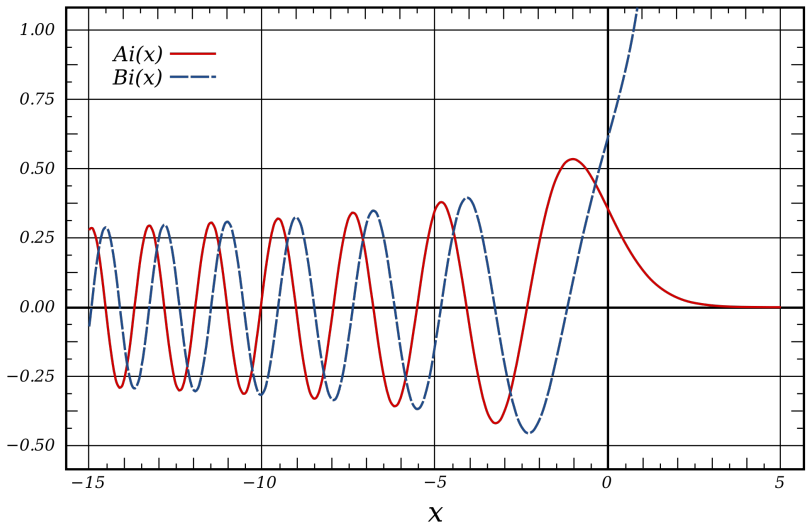


Figura 16.1: Funzioni di Airy.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE ORDINARIE NON OMOGENEE Consideriamo l'equazione non omogenea $-y''(t) + y(t) = f(t)$. Ricordiamo che data una soluzione particolare dell'equazione, è possibile ottenere un'altra soluzione aggiungendo una soluzione dell'equazione omogenea. Quindi la soluzione più generale dell'equazione non omogenea può essere scritta come una somma di una soluzione omogenea e una soluzione particolare. Si può trovare una soluzione particolare di $-y'' + y = f(t)$ mediante metodi ben noti noti quando f è un polinomio o una funzione esponenziale, ma tali metodi

non funzionano per classi più generali di funzioni. Il metodo della trasformata di Fourier (16.43) invece permette di trovare una soluzione particolare sotto la sola ipotesi che la trasformata di Fourier di f esista. La trasformata dell'equazione è $\omega^2\hat{y} + \hat{y} = \widehat{f}$, per cui $\hat{y} = \widehat{f}/(1+\omega^2)$. Dunque,

$$y(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\widehat{f}(k)}{1+\omega^2}\right\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\omega^2}\right\}(x-u)f(u)du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t-u|}f(u)du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t-u|}f(u)du$$

Allora, essendo la soluzione dell'omogenea $y_o = c_1e^t + c_2e^{-t}$m la soluzione generale di $-y''(t) + y(t) = f(t)$ è

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|t-u|}f(u)du\,.$$

Le costanti arbitrarie c_1 e c_2 risultano fissate dai dati iniziali o dalle condizioni al contorno. Se, per esempio, si ha un problema di Sturm-Liouville con condizioni all'infinito $\lim_{|x|\to\infty} y(t) = 0$, allora $c_1 = c_2 = 0$.

Esempio 16.10. Si consideri l'equazione lineare, non omogenea e a coefficienti costanti dell'oscillatore armonico smorzato con costante di smorzamento $\beta > 0$, frequenza naturale ω_0 e forza esterna $f(t)$:

$$y''(t) + 2\beta y(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t)\,. \tag{16.40}$$

N. B. Per risolvere questo esercizio usiamo la convenzione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{-i\omega t}d\omega\,,$$
$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\,.$$

Troviamone una soluzione particolare, applicando lo schema (16.43). Allora

$$y''(t) + 2\beta y'(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad -\omega^2\widehat{y}(\omega) - i2\beta\omega\widehat{y} + \omega_0^2\widehat{y} = \widehat{f}(\omega)\,.$$

L'equazione algebrica per $\widehat{y}$ si risolve immediatamente,

$$-(\omega)^2\widehat{y} - i2\beta\omega\widehat{y} + \omega_0^2\widehat{y} = \widehat{f}(\omega) \quad \xrightarrow{\text{soluzione}} \quad \widehat{y} = \frac{-\widehat{f}(\omega)}{-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega}$$

e a questo punto si risale:

$$\widehat{y}(\omega) = \frac{-\widehat{f}(\omega)}{-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega} \quad \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \quad y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{-\widehat{f}(\omega)}{-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega}\right]e^{i\omega t}d\omega$$

La funzione $-1/(-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega)$ è nota come *funzione di risposta complessa* del sistema. Si osservi che se sappiamo calcolare

$$K(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-e^{-i\omega t}}{-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega}d\omega\,, \tag{16.41}$$

allora

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}K(t-u)f(u)du. \tag{16.42}$$

Si tratta adesso di capire che soluzione abbiamo trovato. È noto che la soluzione dell'omogenea associata della (16.40) decade rapidamente nel tempo, ma (come si può dimostrare) non è così per la soluzione che abbiamo trovato. Essa rappresenta dunque una soluzione particolare che descrive il comportamento a regime del sistema. Per maggiori dettagli si veda l'esempio 19.7 più avanti.

16.9 Applicazioni alla probabilità

Supponete di lanciare due dadi. La probabilità che la somma sia 7 è

$$p(7) = p(1)p(7-1) + p(2)p(7-2) + \ldots + p(6)p(7-6)$$

Questa regola di calcolo è del tutto generale: la distribuzione di probabilità della somma di due variabili casuali indipendenti X e Y, con distribuzioni di probabilità $f(x)$ e $g(y)$ rispettivamente, è il prodotto di convoluzione

$$f \star g(x) = \int f(x)g(x-y)dy\,.$$

Quel che vale per due, vale per N: Se N variabili casuali *indipendenti* $\mathsf{X}_1, \ldots \mathsf{X}_N$ hanno distribuzioni di probabilità $f_1(x_1), \ldots, f_N(x_N)$, la distribuzione della somma $\mathsf{S}_N = \mathsf{X}_1 + \mathsf{X}_2 + \ldots + \mathsf{X}_N$ è

$$f_1 \star \ldots \star f_N(x)$$

Per semplicità, assumeremo che le variabili $\mathsf{X}_1, \ldots \mathsf{X}_N$ siano *identicamente distribuite*, cioè che abbiano tutte la stessa distribuzione di probabilità $f(x)$, e che $f(x)$ sia a media zero, cioè $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = m = 0$. Allora la distribuzione di S_N è

$$\underbrace{f \star \ldots \star f}_{\text{N volte}}(x) = f^{\star N}(x)$$

Se si moltiplica per il numero α una variabile casuale X con distribuzione $f(x)$, e ottenendo così la variabile casuale $\mathsf{Y} = \alpha\mathsf{X}$, allora la distribuzione di Y è $(1/\alpha)f(x/\alpha)$. Consideriamo la variabile casuale

$$Z_N = \frac{X_1 + \ldots + X_N}{\sqrt{N}}\,.$$

Allora la sua distribuzione di probabilità è

$$g_N(z) = \sqrt{N} f^{\star N}(\sqrt{N}z)$$

Per determinare l'andamento asintotico per N grande di $g_N(z)$, consideriamo la sua trasformata di Fourier, usando per comodità la

convenzione ②,

$$\begin{aligned}\widehat{g}_N(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_N(z)e^{ikz}dz \;= \int_{-\infty}^{\infty}[\sqrt{N}f^{\star N}(\sqrt{N}z)]e^{ikz}dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{\star N}(x)e^{ikx/\sqrt{N}}dx = \widehat{f}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)^N\end{aligned}$$

Poiché siamo interessati al limite di N grande di $\widehat{g}_N(k)$, studiamo l'asintotica del suo logaritmo

$$\ln \widehat{g}_N(k) = N \ln \widehat{f}\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) .$$

Sviluppiamo in serie l'argomento del logaritmo:

$$\ln \widehat{g}_N(k) = N \ln \left[\widehat{f}(0) + \widehat{f}'(0)\frac{k}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2}\widehat{f}''(0)\frac{k^2}{N} + \dots\right]$$

e notiamo che

$$\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\Big|_{k=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \text{(perché è una distribuzione di probabilità)}$$

$$\widehat{f}'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-ikx}dx\Big|_{k=0} = -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = -im = 0 \quad \text{(media zero per ipotesi)}$$

$$\widehat{f}''(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-x^2)e^{-ikx}dx\Big|_{k=0} = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = -\sigma^2 \quad \text{(varianza)} .$$

Allora

$$\ln \widehat{g}_N(k) = N \ln \left[1 - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{k^2}{N} + \dots\right] \approx N\left[-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{k^2}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right] .$$

Quindi, nel limite $N \to \infty$,

$$\widehat{g}_N(k) \to \widehat{g}(k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2}$$

che è la trasformata di Fourier di

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} .$$

la distribuzione normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ con media $m = 0$ e varianza σ^2.
Facciamo il punto con il seguente schema.

$$\begin{array}{ccc} \lim_{N\to\infty} g_N(z) & \xleftarrow[=]{} & \mathcal{N}(0,\sigma^2) \\ \Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ \lim_{N\to\infty} \widehat{g}_N(z) & \xrightarrow{=} & e^{-\frac{1}{2}\sigma^2k^2} \end{array} \tag{16.43}$$

Risulta così dimostrato il *teorema del limite centrale* per variabili casuali indipendenti e identicamente distribuite. Il teorema resta

valido (e sempre di facile dimostrazione) quando quest'ultima condizione (ma non la condizione di indipedenza) viene abbandonata. Una conseguenza immediata di questo teorema è *la legge dei grandi numeri*, che stabilisce che la distribuzione di S_N tende a concentrarsi nel valor medio della distribuzione di probabilità delle singole variabili. Si osservi che il teorema del limite centrale è più informativo della legge dei grandi numeri: ci dice che le fluttuazione statistiche attorno allo zero sono di ordine $1/\sqrt{N}$ e la loro statistica è data dalla distribuzione normale.

Tavole di Trasformate di Fourier

Tavola per la ②. Nella tavola $a > 0$ dovunque appare e $\mathfrak{u}$ è la funzione scalino unitario.

	$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$	$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$
(F_21)	$e^{-ax}\mathfrak{u}(x)$	$\frac{1}{a+ik}$
(F_22)	$e^{ax}\mathfrak{u}(-x) + e^{-ax}\mathfrak{u}(x)$	$\frac{2a}{a^2+k^2}$
(F_23)	$-e^{ax}\mathfrak{u}(-x) + e^{-ax}\mathfrak{u}(x)$	$\frac{-2ik}{a^2+k^2}$
(F_24)	$\begin{cases} a & \text{se } -L < x < 0 \\ b & \text{se } 0 < x < M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\frac{1}{ik}\left\{(b-a) + ae^{ikL} - be^{-ikM}\right\}$
(F_25)	$\mathfrak{u}(x+a) - \mathfrak{u}(x-a)$	$\frac{2}{k}\sin(ak)$
(F_26)	$f(x-x_0)$	$e^{-ikx_0}F(k)$
(F_27)	$e^{ik_0x}f(x)$	$F(k-k_0)$
(F_28)	$f(\alpha x)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}F(\frac{k}{\alpha})$
(F_29)	$f(-x)$	$F(-k)$
(F_210)	$F(x)$	$2\pi f(-k)$
(F_211)	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+k^2}$
(F_212)	e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$
(F_213)	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-a\lvert k\rvert}$
(F_214)	$f^{(n)}(x)\ (n = 0,1,2,3,...)$	$(ik)^nF(k)$
(F_215)	$x^nf(x)\ (n = 0,1,2,3,...)$	$i^nF^{(n)}(k)$
(F_216)	$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du$	$F(k)G(k)$
(F_217)	$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)G(k-v)dv$
(F_218)	$\delta(x)$	1

Tavola per la ③.

	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$	$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$
(F_31)	$e^{-ax}\mathrm{u}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+ik}$
(F_32)	$e^{ax}\mathrm{u}(-x) + e^{-ax}\mathrm{u}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$
(F_33)	$-e^{ax}\mathrm{u}(-x) + e^{-ax}\mathrm{u}(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{-ik}{a^2+k^2}$
(F_34)	$\begin{cases} a & \text{se } -L < x < 0 \\ b & \text{se } 0 < x < M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} \left\{ (b-a) + ae^{ikL} - be^{-ikM} \right\}$
(F_35)	$\mathrm{u}(x+a) - \mathrm{u}(x-a)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k}$
(F_36)	$f(x - x_0)$	$e^{-ikx_0} \widehat{f}(k)$
(F_37)	$e^{ik_0 x} f(x)$	$\widehat{f}(k - k_0)$
(F_38)	$f(\alpha x)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} \widehat{f}(\frac{k}{\alpha})$
(F_39)	$f(-x)$	$\widehat{f}(-k)$
(F_310)	$\widehat{f}(x)$	$f(-k)$
(F_311)	$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$
(F_312)	e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$
(F_313)	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-a\lvert k\rvert}$
(F_314)	$f^{(n)}(x)\ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$	$(ik)^n \widehat{f}(k)$
(F_315)	$x^n f(x)\ (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$	$i^n \widehat{f}^{(n)}(k)$
(F_316)	$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$	$\sqrt{2\pi} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k)$
(F_317)	$f(x) g(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(v) G(k-v) dv$
(F_318)	$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Problemi

Problema 16.1. □ Dimostrare che

$$\mathscr{F}^2 = \mathfrak{I}$$

dove $\mathfrak{I}f(x) = f(-x)$.

Problema 16.2. □ Dimostrare che :

(a) f è pari se e solo se $\mathscr{F}^2 f = f$

(b) f è dispari se e solo se $\mathscr{F}^2 f = -f$

(c) $\mathscr{F}^4 f = f$ per ogni funzione f (su cui $\mathscr{F}$ è definita).

(d) La trasformata di Fourier di una funzione reale pari è reale.

(e) La trasformata di Fourier di una funzione reale dispari è immaginaria.

(f) La trasformata di Fourier di una funzione pari è pari e di una funzione dispari è dispari.

Problema 16.3. □ Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Problema 16.4. □ Usare la relazione di reciprocità e il problema precedente per calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$$

Problema 16.5. □ Usare il problema precedente per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$$

Problema 16.6. □ Usare i due problemi precedenti per mostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

Problema 16.7. □ Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = e^{-a|x|}$ dove $a > 0$.

Problema 16.8. □ Per a e x positivi, ottenere la formula

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk\,.$$

Problema 16.9. □ Si consideri la funzione (generalizzata) segno

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

e si stabilisca l'uguaglianza

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt = \operatorname{sgn}(x)$$

Problema 16.10. □ Calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

(I)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(II)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & \text{se} \quad |x| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Problema 16.11. □ Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(a) Calcolare la trasformata di Fourier di $g = f \star f$.

(b) Calcolare $f \star f$.

Problema 16.12. □ Usare il principio di reciprocità e le proprietà della trasformata di Fourier (che cosa diventano nel dominio delle frequenze operazioni come derivate, traslazione, cambiamento di scala etc.) per ricondursi ad trasformate note e calcolare le trasformate di Fourier delle seguenti funzioni:

(I)

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

(II)

$$\frac{a - ix}{a^2 + x^2}$$

(III)
$$\frac{x}{1+x^2}$$

(IV)
$$e^{-2x^2+2x}$$

(V)
$$e^{-\frac{1}{2}x^2+2}$$

(VI)
$$xe^{-x^2}$$

(VII)
$$x^2e^{-|x|}$$

(VIII)
$$xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

PROBLEMA 16.13. □ Si supponga che f sia una funzione pari assolutamente integrabile e sia $h(x) = \sin(ax)$. Dimostrare che per tutti i numeri reali a si ha

$$f \star h(x) = \sqrt{2\pi}\sin(ax)\widehat{f}(a)\,.$$

PROBLEMA 16.14. □ Trovare la soluzione generale di

$$y''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

PROBLEMA 16.15. □ Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a^2+t^2}$$

PROBLEMA 16.16. □ Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = e^{-t^2}$$

PROBLEMA 16.17. □ Risolvere l'equazione integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)f(u)du + 2f(x) = \frac{4x^2+10}{\pi(x^4+5x^2+4)}$$

PROBLEMA 16.18. □ Risolvere l'equazione integrale

$$\rho(x) + \int_0^{\infty} \rho(x-y)e^{-y}dy = \frac{1}{1+x^2}$$

PROBLEMA 16.19. □ Risolvere l'equazione mista (differenziale a alle differenze finite)

$$f'(x) + f(x) + f(x+1) = \frac{1}{1+x^2}$$

PROBLEMA 16.20. □ Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ u(x,0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|} \end{cases}$$

PROBLEMA 16.21. □ Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 16.22. □ Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

PROBLEMA 16.23. □ Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ u(x,0) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin x}{x} \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 16.24. □ Si assuma che $f(x)$ abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona). Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K\dfrac{\partial u}{\partial x} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Questo problema fornisce un modello del trasferimento di calore in una sbarra lunga e sottile che scambia calore con l'ambiente esterno. Questo fenomeno è chiamato *convezione* e K è una costante postiva chiamata *coefficiente di convezione*.

PROBLEMA 16.25. □ Si assuma che $f(x)$ abbia trasformata di Fourier (per esempio, sia buona). Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Questa equazione è nota come *equazione di Korteweg—de Vries linearizzata*.

PROBLEMA 16.26. □ *Equazione del calore con diffusività termica non costante.* Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = at\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Esprimere la soluzione come una convoluzione.

PROBLEMA 16.27. □ Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = e^{-t}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty\,, t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

PROBLEMA 16.28. □ Si risolva l'equazione del calore per una sbarra sottile infinitamente lunga di diffusività termica costante D e con distribuzione iniziale di temperatura $f(x) = T_0$ per $x > 0$ e o altrimenti. Si mostri che la temperatura u è data da

$$u(x,t) = \frac{T_0}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]$$

dove

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y^2}\,dy$$

PROBLEMA 16.29. □ *Equazione del calore per una sbarra semi-infinita.* Risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \infty\,, t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x) & x > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 16.30. □ Usare il metodo della trasformata di Fourier per dimostrare che la soluzione del problema al contorno (11.1),

$$\begin{cases} \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,, & -\infty < x < \infty\,,\ t > 0 \\ u(x,0) = q(x)\,, \qquad \partial_t u(x,0) = p(x)\,, \end{cases}$$

è

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[q(x-vt) + q(x+vt)\right] + \frac{1}{2v}\left[\int_{x-vt}^{x+vt} p(x)\,dx\right].$$

PROBLEMA 16.31. □ L'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + e\mathcal{E}z\psi(z) = E\psi(z)$$

per una particella in un campo elettrico costante $\mathcal{E}$ nella direzione z (e quindi con energia potenziale $U = e\mathcal{E}z$) è di interesse in molti campi:

- nello studio del tunneling in transistor MOS;
- è usata per studiare modulatori a semi-conduttore ottici;
- sostanzialmente, compare in qualunque situazione in cui si vuole comprendere come un elettrone risponde ad un campo esterno.

Mostrare che mediante cambiamento di variabili

$$x = \left(\frac{2me}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(z - \frac{E}{e\mathcal{E}}\right), \quad y(x) = \psi(z)\,,$$

l'equazione di Schrödinger diventa l'equazione di Airy $y'' = xy$ e che, se si scartano le soluzioni che divergono all'infinito, la sua soluzione è

$$\psi_E(z) = \operatorname{Ai}\left[\left(\frac{2me}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(z - \frac{E}{e\mathcal{E}}\right)\right]$$

per ogni autovalore E reale (il che signfica che lo spettro dell'Hamiltoniana non è discreto, ma continuo). Analizzare qualitativamente le autofunzioni per $E > U$ e $E < U$.

Soluzioni

Problema 16.1. □ Usiamo la convenzione ③

$$\mathscr{F}f(k) = \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\,, \qquad \mathscr{F}^{-1}\widehat{f}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}dk$$

Allora

$$\mathscr{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)e^{-iyx}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)e^{iy(-x)}dy = \mathscr{F}^{-1}f(-x)$$

Quindi

$$\mathscr{F}^2 f = \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}f(-x) = f(-x)$$

Problema 16.2. □

(a) f pari significa $f(-x) = f(x)$. Se f è pari allora $\mathscr{F}^2 f = f(-x) = f(x)$. Se $\mathscr{F}^2 f(x) = f(x)$ allora $f(x) = f(-x)$.

(b) f dispari significa $f(-x) = -f(x)$. Come prima, $\mathscr{F}^2 f(x) = -f(x)$.

(c) $f = f_P + f_D$ (qualunque funzione è decomponibile nella somma di una funzione pari e una dispari). Allora

$$\mathscr{F}^4 f = \mathscr{F}^4(f_P + f_D) = \mathscr{F}^2(\mathscr{F}^2 f_P + \mathscr{F}^2 f_D) = \mathscr{F}^2(f_P - f_D) = f_P + f_D = f$$

(d)

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}e^{ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

(e)

$$\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}e^{ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

(f)

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx = \widehat{f}(-k)$$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-ikx}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx = -\widehat{f}(-k)$$

Problema 16.3. □

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-ikx}dx = \left.\frac{e^{-ix}}{-ik}\right|_{-1}^{1} = \frac{e^{ik} - e^{-ik}}{ik} = 2\frac{\sin k}{k}$$

da cui ③

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}2\frac{\sin k}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin k}{k}$$

PROBLEMA 16.4. □

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \stackrel{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} \qquad \widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ak}{k}$$

allora, per la relazione di reciprocità,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x} \qquad \stackrel{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} \qquad \widehat{f}(k) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |k| < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

PROBLEMA 16.5. □ $k = 1$ è una discontinuità. Regola del valor medio della somma di limite destro e sinistro:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x} (\cos kx + i \sin kx) dx \Big|_{k=1} = \frac{1+0}{2}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$$

PROBLEMA 16.6. □ Si usi integrazione per parti e problema precedente:

$$\int_0^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\omega^2}}_{\text{int}} \underbrace{\sin^2 \omega}_{\text{der}} d\omega = \underbrace{- \frac{\sin^2 \omega}{\omega} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 16.7. □ Usando il teorema di inversione, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

PROBLEMA 16.8. □ Dall'esercizio precedente segue che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + k^2} e^{ikx} dk = e^{-a|x|} \qquad \Rightarrow \qquad e^{-ax} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kx}{a^2 + k^2} dk \,, \quad x > 0 \,.$$

PROBLEMA 16.9. □ In primo luogo si osservi che $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} dk = \frac{\pi}{2}$. Abbiamo calcolato questo integrale nell'esercizio 5.9 a pag. 119, ma segue anche da

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k}{k} e^{ikx} dk = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ponendo $x = 0$ si ottiene

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} dk = \frac{\pi}{2} \,.$$

Adesso si effettui nell'integrale il cambiamento di variabili $xt = u$. Allora

$$\boxed{\text{per } x > 0\text{:}} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1 \,, \qquad \boxed{\text{per } x < 0\text{:}} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{t} dt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = -1$$

che è quanto si voleva dimostrare.

PROBLEMA **16.10.** □

(I) ③ $\qquad \widehat{f}(k) = \dfrac{1-ik}{\sqrt{2\pi}(1+k^2)}$

(II) ③ $\qquad \widehat{f}(k) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2 k}{k^2}$

PROBLEMA **16.11.** □

(a) ③ $\qquad \widehat{f}(k) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2 k}{k^2}$

(b) Vedere esercizio precedente.

PROBLEMA **16.12.** □

(I) $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-ikx}}{1+x^2} = \pi e^{-|k|}$. Dunque, con la convenzione ③

$$\widehat{f}(k) = \mathscr{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ikx}}{1+x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}$$

(II)

$$g(x) = \frac{a-ix}{a^2+x^2} = \frac{a-ix}{(a+ix)(a-ix)} = \frac{1}{a+ix} = \frac{-i}{x-ia}$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{a+ix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-ie^{-ikx}}{x-ia}dx$$

N.B. Il resto del calcolo richiede il metodo dei residui che verrà svolto in uno dei capitoli successivi. Si ritorni a questo esercizio dopo avere appreso tale metodo.

Metodo dei residui: polo semplice in $x = ia$. Per $k > 0$, chiusura nel semipiano inferiore,

$$\mathscr{F}\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

Per $k < 0$, chiusura nel semipiano superiore,

$$\widehat{g}(k) = \mathscr{F}\left(\frac{-i}{x-ia}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2\pi i)(-i)e^{ak} = \sqrt{2\pi}e^{ak}$$

Quindi

$$\frac{a-ix}{a^2+x^2} \quad \overset{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} \quad \begin{cases} \sqrt{2\pi}e^{ak} & \text{se} \quad k<0 \\ 0 & \text{se} \quad k>0 \end{cases}$$

Per $k = 0$, regola dell'1/2:

$$\widehat{g}(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(III) ...

(IV) Integrale di Fourier della gaussiana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

Completare i quadrati

$$e^{-2x^2+2x} = e^{-2\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}} = e^{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

e usare la proprietà di traslazione della trasformata di Fourier.

(V) Simile.

(VI) Derivando membro a membro rispetto a k, $\frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{d}{dk} \sqrt{\frac{1}{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$, si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2k}{4}\right) e^{-\frac{k^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} e^{-ikx} dx = \frac{-i}{2\sqrt{2}} k e^{-\frac{k^2}{4}}$$

(VII) Come nell'esercizio precedente, usando $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} = \frac{2a}{a^2+k^2}$.

(VIII) $(1-ik)e^{-\left(\frac{k^2}{2}+ik\right)}$.

PROBLEMA **16.13.** □

$$\begin{aligned} f \star g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(ax-au) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i(ax-au)} - e^{-i(ax-au)}}{2i} du \\ &= \frac{1}{2i} \left[e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{iau} du \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[e^{iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du - e^{-iax} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du \right] \qquad (f \text{ è pari}) \\ &= \sin ax \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iau} du = \sqrt{2\pi} \sin ax \widehat{f}(a) \end{aligned}$$

PROBLEMA **16.14.** □ Richiamiamo il dizionario di traduzione:

$$\begin{aligned} y(x) &\overset{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} \hat{y}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y(x) e^{-ikx} dx \\ \frac{d}{dx} y(x) &\overset{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} ik\hat{y}(k) \\ \frac{d^2}{dx^2} y(x) &\overset{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} -k^2 \hat{y}(k) \\ xy(x) &\overset{\mathscr{F}}{\Longrightarrow} i \frac{d}{dk} \hat{y}(k) \\ \hat{y}(k) &\overset{\mathscr{F}^{-1}}{\Longrightarrow} y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{y}(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

Dunque,

$$y''(x)+y'(x)+xy(x)=0 \qquad \xRightarrow{\mathscr{F}} \qquad -k^2\hat{y}(k)+ik\hat{y}+i\hat{y}'(k)=0$$

L'equazione $\hat{y}'(k)=-(ik^2+k)\hat{y}$ è del primo ordine e le variabili sono separabili, per cui

$$\int\frac{d\hat{y}}{\hat{y}}=-\int(ik^2+k)dk \qquad \Rightarrow \qquad \log\hat{y}=-i\frac{k^3}{3}-\frac{k^2}{2}+\log C \qquad \Rightarrow \qquad \hat{y}(k)=Ce^{-i(k^3/3)-(k^2/2)}$$

Quindi,

$$y(x)=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}e^{-i(k^3/3)-(k^2/2)}dk$$

Possiamo esprimere questa soluzione in termini di quantità reali usando la formula di Eulero per l'esponenziale complesso e ponendo per brevità $A=2C/\sqrt{2\pi}$. Dopo aver osservato che l'integrale con il seno si annulla, si arriva a

$$y(x)=A\int_0^{\infty}\cos\left(kx-\frac{k^3}{3}\right)e^{-k^2/2}dk\,.$$

Schematizziamo il metodo di soluzione usato.

$$\begin{array}{ccc} y''(x)+y'(x)+xy(x)=0 & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & y(x)=A\int_0^{\infty}\cos\left(kx-\frac{k^3}{3}\right)e^{-k^2/2}dk \\ \Big\downarrow\mathscr{F} & & \Big\uparrow\mathscr{F}^{-1} \\ -k^2\hat{y}(k)+ik\hat{y}+i\hat{y}'(k)=0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \hat{y}(k)=Ce^{-i(k^3/3)-(k^2/2)} \end{array}$$

Era stata chiesta la soluzione generale dell'equazione. Poiché l'equazione differenziale è del secondo ordine, la soluzione deve dipendere da due costanti arbitrarie, ma noi ne abbiamo trovato una sola. Evidentemente, il metodo della trasformata di Fourier non permette di vedere una soluzione. In effetti, è proprio così: esiste un'altra soluzione, linearmente indipendente da quella trovata, che non ha trasformata di Fourier. Passando alle trasformate di Fourier, abbiamo perso questa soluzione. Dopo aver studiato la trasformata di Laplace si ritorni a questo problema, lo si risolva usando il metodo della trasformata di Laplace e si stabilisca se si trova la soluzione mancante.

PROBLEMA **16.15.** □ Passando alla trasformata di Fourier,

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t-u)f(u)du=\frac{1}{a^2+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|k|} \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{f}(k)=\pm\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2}$$

Poiché

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-A|k|}\right\}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{A}{A^2+x^2}$$

si ottiene

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2}\right\}=\pm\frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a/2}{(a/2)^2+x^2}=\frac{\pm1}{\sqrt{\pi}}\frac{2a}{a^2+4x^2}$$

Schematizziamo il metodo di soluzione usato.

$$\begin{array}{ccc} \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)f(u)du = \frac{1}{a^2+x^2} & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & \frac{\pm 1}{\sqrt{\pi}}\frac{2a}{a^2+4x^2} \\ \downarrow \mathscr{F} & & \uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ \sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-a|k|} & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{f}(k) = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-a|k|/2} \end{array}$$

PROBLEMA **16.16.** □ Analogo al precedente.

PROBLEMA **16.17.** □ Analogamente agli esercizi precedenti, si perviene ad un'equazione algebrica nello spazio delle trasformate di Fourier:

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$$

dove $\widehat{g}(k)$ è la trasformata di Fourier di

$$g(x) = \frac{4x^2+10}{\pi(x^4+5x^2+4)}$$

Risolviamo l'equazione algebrica

$$\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0\,.$$

Si ha

$$\widehat{f}(k) = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}}{2\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}\right]$$

Per procedere occorre conoscere la trasformata di Fourier di $g(x)$. Mediante metodo dei residui si ottiene (ritornare a questo esercizio dopo avere studiato tale metodo)

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4x^2+10}{\pi(x^4+5x^2+4)}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2e^{-|k|}+e^{-2|k|}\right)$$

Sostituiamo in $\widehat{f}(k)$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-1 \pm \sqrt{1+\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-1 \pm \sqrt{1+\left(2e^{-|k|}+e^{-2|k|}\right)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-1 \pm \sqrt{(1+e^{-|k|})^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-1 \pm (1+e^{-|k|})\right]\end{aligned}$$

Otteniamo così due soluzioni dell'equazione:

$$\widehat{f}_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-|k|}\,, \qquad \widehat{f}_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-2-e^{-|k|})$$

La soluzione 2 tuttavia non è accettabile perché *non* tende a zero quando $k \to \infty$ e quindi l'anti-trasformata di $\widehat{f}_2(k)$ non è definita come una funzione ordinaria (lo sarebbe, eventualmente, nel senso

delle funzioni generalizzate). Dunque, la sola soluzione accettabile dell'equazione integrale corrisponde a $\widehat{f}_1(k)$. Poiché

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-|k|}\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2}\,,$$

la soluzione cercata è

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

Riassumendo,

$$\begin{array}{ccc} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)f(u)du + 2f(x) = \frac{4x^2+10}{\pi(x^4+5x^2+4)} \equiv g(x) & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+x^2} \\ \Big\downarrow \mathscr{F} & & \Big\uparrow \mathscr{F}^{-1} \\ \sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k)^2 + 2\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-|k|} \end{array}$$

Calcolo mediante metodo dei residui della trasformata di Fourier di

$$g(x) = \frac{4x^2+10}{\pi(x^4+5x^2+4)}\,.$$

L'integrale

$$I = \frac{1}{\pi}\oint \frac{4z^2+10}{(z^4+5z^2+4)}e^{-ikz}dz$$

soddisfa le condizioni del lemma di Jordan. Chiudiamo nel semipiano inferiore Π^-, per $k > 0$, e nel semipiano superiore Π^+, per $k < 0$. La funzione integranda ha 4 poli semplici in $a = \pm i$ e $a = \pm 2i$, infatti

$$\frac{4z^2+10}{(z^4+5z^2+4)} = \frac{4z^2+10}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{4z^2+10}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$$

Si ha

$$\mathrm{Res}(a) = \left.\frac{f(z)}{h'(z)}\right|_{z=a} = \left.\frac{(4z^2+10)e^{-ikz}}{4z^3+10z}\right|_{z=a} = \left.\frac{e^{-ikz}}{z}\right|_{z=a} = \frac{e^{-ika}}{a}$$

Allora, per $k > 0$ (ricordarsi che la chiusura di sotto cambia il verso antiorario in orario) si ha

$$I = -\frac{1}{\pi}(2\pi i)\left[\frac{e^{-ik(-i)}}{-i} + \frac{e^{-ik(-2i)}}{-2i}\right] = 2e^{-k} + e^{-2k}$$

e per $k < 0$,

$$I = \frac{1}{\pi}(2\pi i)\left[\frac{e^{-ik(i)}}{i} + \frac{e^{-ik(2i)}}{2i}\right] = 2e^{k} + e^{2k}$$

Ne segue che

$$I = 2e^{-|k|} + e^{-2|k|}$$

da cui

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(2e^{-|k|} + e^{-2|k|}\right)$$

PROBLEMA 16.18. □

L'integrale in

$$\rho(x) + \int_0^\infty \rho(x-y)e^{-y}dy = \frac{1}{1+x^2}$$

non appare come una convoluzione perché è solo da 0 a $+\infty$ invece di essere da $-\infty$ a $+\infty$. Tuttavia possiamo sostituire il limite inferiore di integrazione con $-\infty$ se sostituiamo e^{-y} con una funzione $g(t)$ che è uguale a e^{-y} quando y è positiva e è zero quando y è negativa. Con questa sostituzione

$$\rho(x) + \int_{-\infty}^\infty \rho(x-y)g(y)dy = \frac{1}{1+x^2}$$

Passando alla trasformata di Fourier

$$\widehat{\rho}(k) + \sqrt{2\pi}\widehat{\rho}(k)\widehat{g}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}$$

Calcoliamo $\widehat{g}$:

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty g(y)e^{-iky}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y}e^{-iky}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-y(1+ik)}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+ik}$$

Quindi

$$\left[1 + \frac{1}{1+ik}\right]\widehat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|} \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{\rho}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+ik}{2+ik}\right)e^{-|k|}$$

Trasformando indietro,

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1+ik}{2+ik}\right)e^{-|k|}e^{ikx}dk \\ &= \int_0^\infty \frac{\cos xk + \cos(xk-k) + k\sin xk}{2+2\cos k + 2k\sin k + k^2}dk\end{aligned}$$

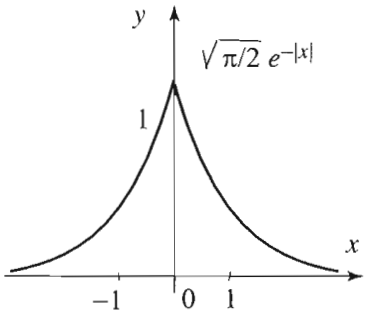
PROBLEMA 16.19. □ Trasformiamo l'equazione secondo Fourier:

$$f'(x) + f(x) + f(x+1) = \frac{1}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad \left[ik + 1 + e^{-ik}\right]\widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|} \quad \Rightarrow \quad \widehat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|k|}}{(ik+1+e^{-ik})}$$

e quindi $f(x)$ ...

PROBLEMA 16.20. □ La funzione

$$u(x,0) = f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x|}$$



è mostrata in figura a lato. Trasformiamo secondo Fourier l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Otteniamo

$$ik\frac{d\widehat{u}(k,t)}{dt} = -k^2\widehat{u}(k,t) \quad \Rightarrow \frac{d\widehat{u}(k,t)}{dt} = ik\widehat{u}(k,t)$$

che ha soluzione

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{u}(k,0)e^{ikt} = \widehat{f}(k)e^{ikt}$$

Per la proprietà che una modulazione diventa una traslazione (attenzione al segno), la soluzione è

$$u(x,t) = f(x+t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|x+t|}$$

PROBLEMA **16.21.** □

METODO 1. Ci si ricorda la soluzione generale dell'equazione delle onde in una dimensione, per cui senza fare un calcolo si scrive

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[a(x+t) + a(x-t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}\right] \end{aligned}$$

METODO 2. Si usa il metodo della trasformata di Fourier e si ottiene l'equazione

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -k^2\widehat{u}\,, \quad \text{che ha soluzione} \quad \widehat{u}(k,t) = A(|k|)\cos(|k|t) + B(|k|)\sin|k|t$$

Il dato iniziale implica $B = 0$, per cui

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{u}(k,0)\cos(kt)\,, \quad \text{dove} \quad \widehat{u}(k,0) = \mathscr{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|k|}\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos(kt)e^{ikx}dk = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|}\cos(kt)e^{ikx}dk \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|}\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}e^{ikx}dk = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|}e^{ik(x+t)}dk + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|k|}e^{ik(x-t)}dk \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(x+t)^2} + \frac{1}{1+(x-t)^2}\right] \end{aligned}$$

PROBLEMA **16.22.** □

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\frac{1}{4}k^2\widehat{u} \quad \Rightarrow \quad \widehat{u}(k,t) = \widehat{u}(k,0)e^{-k^2t/4}$$

$$\widehat{u}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\pi}e^{-k^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}$$
$$\widehat{u}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2/4}e^{-k^2t/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-k^2(1+t)/4}$$

Dunque,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2(1+t)/4}e^{ikx}dk \qquad (a=(1+t)/4)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{\pi}{(1+t)/4}}e^{-x^2/[4(1+t)/4]} = \sqrt{\frac{1}{1+t}}e^{-\frac{x^2}{1+t}}$$

Problema 16.23. □ Stesso procedimento del penultimo problema. Risultato:

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(ctk)e^{ikx}dk = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(x+ct)}{x+ct} + \frac{\sin(x-ct)}{x-ct}\right]$$

Problema 16.24. □ Stesso procedimento degli esercizi precedenti. Risultato:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Dk^2t}e^{ik(x+Kt)}\widehat{f}(k)dk$$

Problema 16.25. □ Idem. Risultato:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iak^3t}e^{ikx}\widehat{f}(k)dk$$

Problema 16.26. □

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -atk^2\widehat{u} \qquad \widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k) \quad \Rightarrow \quad \widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)e^{-at^2k^2/2}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-at^2k^2/2}\right\}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2k^2/2}e^{ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{at^2}}e^{-x^2/(2at^2)}$$

Quindi

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f \star \frac{1}{\sqrt{at^2}}e^{-x^2/(2at^2)} = \frac{1}{t\sqrt{2a\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/(2at^2)}f(y)dy\,.$$

Problema 16.27. □ Stesso procedimento dell'esercizio precedente. Risultato:

$$u(x,t) = f \star g_t(x) \quad \Rightarrow \quad \text{dove} \quad g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1-e^{-t})}}e^{-\frac{x^2}{4(1-e^{-t})}}$$

Problema 16.28. □ Discende dalla soluzione come convoluzione del nucleo del calore con la condizione iniziale.

Problema 16.29. □

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\widehat{f}_s(k)e^{-Dk^2t}\sin(kx)dk \quad \Rightarrow \quad \text{dove} \quad \widehat{f}_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(kx)dx \quad k>0$$

17
La trasformata di Laplace

Indice

17.1 ***La trasformata di Laplace*** 371
17.2 ***Proprietà e applicazioni di base*** 373
17.3 ***Altre proprietà della trasformata di Laplace*** 376
17.4 ***Funzioni a scalino e impulso*** 379
17.5 ***Funzione di trasferimento*** 381
17.6 ***Antitrasformata di funzioni razionali*** 382
17.7 ***Funzioni particolari*** 385
17.8 ***Applicazioni ai problemi al contorno*** 388
Tavola di trasformate di Laplace 390
Problemi 391
Soluzioni 392

17.1 La trasformata di Laplace

La *trasformata di Laplace* è una trasformazione integrale ampiamente utilizzata con molte applicazioni in fisica e ingegneria. Indicata $\mathcal{L}\{f(t)\}$, è un operatore lineare $\mathcal{L}$ che agisce su una funzione $f(t)$ con un argomento t reale ($t \geq 0$) e la trasforma in una funzione $F(s)$ con un argomento (in generale, complesso) s. Questa trasformazione è essenzialmente biunivoca per la maggior parte delle applicazioni pratiche, e le rispettive coppie di $f(t)$ e $F(s)$ d'uso comune sono abbinate in tavole, come quella a pag. 390. La trasformata di Laplace è utile perché ha la proprietà che molte relazioni e e operazioni sulla funzione $f(t)$ corrispondono a semplici rapporti e operazioni sulle immagini $F(s)$. Essa prende il nome da Pierre-Simon Laplace , che ha introdotto tale trasformazione nel suo lavoro sulla teoria della probabilità.

Come la trasformata di Fourier, la trasformata di Laplace viene utilizzata per risolvere le equazioni differenziali ed integrali. In fisica e ingegneria è utilizzata per l'analisi di sistemi lineari, come circuiti elettrici, oscillatori armonici , dispositivi ottici e sistemi meccanici. In queste analisi, la trasformata di Laplace è spesso interpretata come una trasformazione dal dominio del tempo, in cui gli ingressi e le uscite sono funzioni del tempo, al dominio della frequenza, in cui gli stessi ingressi e le uscite sono funzioni della frequenza angolare complessa , in radianti per unità di tempo. Data una semplice descrizione matematica o funzionale di un ingresso o uscita di un sistema, la trasformata di Laplace fornisce una descrizione alternativa che spesso semplifica il processo di analisi del comportamento del sistema.

Notazioni. La trasformata di Laplace di $f(t)$ è denotata anche $\tilde{f}(s)$. Qui useremo per lo più la notazione della "lettera maiuscola": $\mathscr{L}\{f\} = F(s)$. Per rendere esplicita la variabile della funzione che si trasforma, si scrive $\mathscr{L}\{f(t)\}$. Quando si vuole rendere esplicito l'argomento della trasformata, si scrive $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$.

La trasformata di Laplace di una funzione $f(t)$, definita per tutti i numeri reali $t \geq 0$ è la funzione $F(s)$, definita da:

N.B. Funzioni che differiscono su un insieme di misura nulla hanno la stessa trasformata di Laplace.

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{17.1}$$

Il parametro s sarà trattato preliminarmente come un numero reale, in seguito si studierà la sua estensione complessa. Il significato dell'integrale dipende dal tipo di funzioni che si considera. Una condizione necessaria per l'esistenza dell'integrale è che f deve essere localmente integrabile su $[0, \infty)$. Se f è *generalmente continua*, in ogni intervallo limitato, questa condizione è garantita (si veda la definizione a pag. 111). Per le funzioni localmente integrabili che decadono all'infinito o sono di ordine esponenziale, cioè non crescono in valore assoluto più rapidamente di $Me^{\gamma t}$, dove M e γ sono costanti opportune, l'integrale può essere inteso come un integrale improprio convergente e quindi definito dal limite

$$F(s) = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)\, dt\,. \tag{17.2}$$

Riassumendo:

Criterio sufficiente di esistenza della trasformata di Laplace.
Se una funzione è generalmente continua in ogni intervallo limitato ed è di ordine esponenziale, allora la sua trasformata di Laplace esiste. (17.3)

La relazione tra trasformata di Laplace e trasformata di Fourier è il seguente. Sia $f(t)$ una funzione nulla per $t < 0$ e si consideri la sua trasformata di Fourier ② (con convezione del segno opposta negli espondenziali),

$$g(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} f(t) dt\,, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} g(\omega) d\omega$$

e la si prolunghi al piano complesso $z = \omega + i\sigma$ ottenendo così la funzione di variabile complessa $g(z) = \int_0^\infty e^{zt} f(t)dt$. Allora, per s reale,

$$g(is) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = F(s).$$

In altre parole, la trasformata di Laplace è la trasformata di Fourier nel piano delle frequenze complesse $z = \omega + i\sigma$ ruotato di $\pi/2$, cioè ponendo $s = iz$.

Esercizio 17.1. Mostrare che $\mathscr{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

Esercizio 17.2. Mostrare che $\mathscr{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$

Esercizio 17.3. Mostrare che $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$.

Esercizio 17.4. Mostrare che

$$\mathscr{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

Soluzione di 17.1. $\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} 1\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st}\, dt = \lim_{M\to\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} \frac{1-e^{-sM}}{s} = \frac{1}{s}, \quad \text{se } s > 0.$ □

Soluzione di 17.2. $\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M te^{-st}\, dt = \lim_{M\to\infty} (t)\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^M - (1)\frac{e^{-st}}{s^2}\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sM}}{s^2} - \frac{Me^{-sM}}{s}\right) = \frac{1}{s^2}, \quad \text{se } s > 0.$ □

Soluzione di 17.3. $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{M\to\infty} \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\Big|_0^M = \lim_{M\to\infty} \frac{1-e^{-(s-a)M}}{s-a} = \frac{1}{s-a}, \quad \text{se } s > a.$ □

Soluzione di 17.4. Assumendo che il risultato dell'esercizio 17.3 valga anche per numeri complessi (il che può essere dimostrato) e in particolare per $a = ik$, si ha

$$\mathscr{L}\left\{e^{ikt}\right\} = \frac{1}{s-ik} = \frac{s+ik}{s^2+k^2}.$$

Usando la formula di Eulero, e sfruttando la linearità dell'integrale si ha $\mathscr{L}\{e^{ikt}\} = \mathscr{L}\{\cos kt\} + i\mathscr{L}\{\sin kt\}$. Uguagliando parti reali e immaginarie dei due membri della precedente equazione, si ottiene

$$\mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$
$$\mathscr{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

□

17.2 *Proprietà e applicazioni di base*

La proprietà più importante della trasformata di Laplace, che segue direttamente dalla sua definizione, è che la trasformata di Laplace è un *operatore lineare*:

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \beta\mathscr{L}\{g(t)\} \tag{17.4}$$

dove α e β sono numeri (reali o complessi).

La seconda proprietà in ordine di importanza, specialmente in vista delle applicazioni allo studio dei sistemi lineari in fisica e ingegneria, è che la trasformata di Laplace trasforma le derivate di una funzione $f(t)$ in espressioni algebriche contenenti potenze di s, $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ e le condizioni iniziali, cioè i valori della funzione e delle sue derivate calcolati per $t = 0$. Se si considera

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \lim_{M\to\infty} \int_0^M f'(t)e^{-st}dt\,,$$

l'integrazione per parti fornisce

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \int_0^M f'(t)e^{-st}dt &= \lim_{M\to\infty} \left[f(t)e^{-st}\Big|_0^M + s\int_0^M f(t)e^{-st}dt\right] \\ &= -f(0) + sF(s)\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathscr{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0) \tag{17.5}$$

Applichiamo la (17.5) allo studio di un sistema del primo ordine governato dall'equazione differenziale lineare

$$x'(t) + \gamma x(t) = y(t)\,. \tag{17.6}$$

Prendiamo la trasformata di Laplace di ambo i membri e chiamiamo $X(s)$ e $Y(s)$ le trasformate di Laplace rispettivamente di $x(t)$ e $y(t)$. Dalla (17.5), si ottiene l'equazione algebrica

$$sX(s) - x(0) + \gamma X(s) = Y(s)$$

di immediata soluzione

$$X(s) = \frac{x(0) + Y(s)}{s+\gamma}\,, \tag{17.7}$$

dove $x(0)$ è la condizione iniziale al tempo $t = 0$. A questo punto, il "tornare indietro" è garantito da un teorema (che non dimostreremo) il quale stabilisce che *sotto le stesse ipotesi di esistenza della trasformata* $\mathscr{L}$, *esiste ed è unico* (a meno di differenze su un insieme di misura nulla) *il suo inverso* $\mathscr{L}^{-1}$, detto *antitrasformata di Laplace*. Naturalmente anche $\mathscr{L}^{-1}$ è lineare:

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}\,. \tag{17.8}$$

Allora, applicando $\mathscr{L}^{-1}$ ad ambo i membri della (17.7), si ottiene

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x(0)+Y(s)}{s+\gamma}\right\} = x(0)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\gamma}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{s+\gamma}\right\}$$

Il primo termine è dato dall'esercizio 17.3 per $a = -\gamma$. Si ritrova così la nota soluzione dell'omonenea associata a (17.6),

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t}\,.$$

Per quel che riguarda il secondo termine, si usa un metodo generale che permette di esprimere $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s))\}$ in termini delle funzioni $f(t)$ e $g(t)$. Tale metodo è dato dal seguente teorema, detto di *teorema di convoluzione per la trasformata di Laplace*:

Se $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ allora
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f \star g(t) \tag{17.9}$$

Applicando il teorema di convoluzione al secondo termine della (17.7), si ottiene

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{s+\gamma}\right\} = \int_0^t e^{-\gamma(t-u)}y(u)du\,,$$

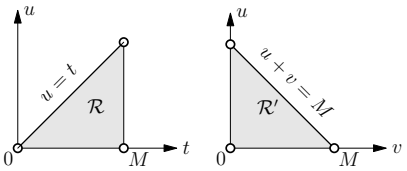
Dimostrazione della (17.9). la formula è dimostrata se si è in grado di provare che

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)G(s)$$

Ma

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cdot\} &= \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left\{\int_{u=0}^{t} f(u)g(t-u)du\right\}dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st}f(u)g(t-u)\,dudt \\ &= \lim_{M\to\infty} s_M\,, \quad \text{dove} \\ s_M &\equiv \int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st}f(u)g(t-u)dudt.\end{aligned}$$

La regione di integrazione $\mathcal{R}$ nel piano tu per l'integrale s_M è mostrata nella figura sotto.



Posto $t - u = v$ o $t = u + v$, la regione $\mathcal{R}$ è trasformata nella regione $\mathcal{R}'$ del piano vu. Dalla regola (5.46) per il cambiamento di variabili

$$\begin{aligned}s_M &= \iint_{\mathcal{R}} e^{-st}f(u)g(t-u)dudt \\ &= \iint_{\mathcal{R}'} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)\left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right|dudv\end{aligned}$$

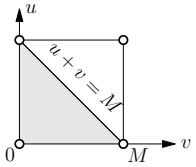
Ma

$$\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v}\\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1$$

Allora

$$s_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)\,dudv$$

Si definisca adesso la funzione $K(u,v)$ che è uguale a $e^{-s(u+v)}f(u)g(v)$ per $u + v \le M$, cioè nel triangolo grigio della figura sotto, e che vale 0 per $u + v > M$, cioè nel triangolo bianco.



Allora $s_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)\,dudv$. Se adesso si passa al limite $M \to \infty$, si ottiene

$$\begin{aligned}&\lim_{s_M\to\infty} s_M = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K(u,v))\,dudv \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(u+v)}f(u)g(v)\,dudv \\ &= \left\{\int_0^{\infty} e^{-su}f(u)du\right\}\left\{\int_0^{\infty} e^{-sv}g(v)dv\right\} \\ &= F(s)G(s)\,.\end{aligned}$$

□

da cui segue la soluzione completa della (17.6),

$$x(t) = x(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} y(u)du\,. \tag{17.10}$$

Il metodo della trasformata di Laplace è quindi analogo al metodo della trasformata di Fourier, ma, a differenza di quest'ultima, permette di inglobare i dati iniziali (o al contorno) nella soluzione. Si tratta dunque di un metodo più efficiente. I passi che ci hanno portato alla soluzione (17.10) si possono schematizzare con il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} x'(t)+\gamma x(t) = y(t) & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & x(t) = x(0)e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} y(u)du \\ \Big\downarrow \mathscr{L} & & \Big\uparrow \mathscr{L}^{-1} \\ sX(s) - x(0) + \gamma X(s) = Y(s) & \xrightarrow{\text{soluzione}} & X(s) = \frac{x(0)+Y(s)}{s+\gamma} \end{array}$$

Per sistemi del secondo ordine,

$$x''(t) + bx'(t) + cx = y(t)\,, \tag{17.11}$$

la trasformata di Laplace della derivata seconda si ottiene iterando la (17.5):

$$\mathscr{L}\{x''(t)\} = s\mathscr{L}\{x'(t)\}(s) - x'(0) = s\,(sX(s) - x(0)) - x'(0)\,.$$

Quindi,

$$\mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\,. \tag{17.12}$$

che, applicata ad ambo i lati della (17.11), fornisce

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + bsX(s) - bx(0) + cX(s) = Y(s)\,,$$

la cui soluzione è

$$X(s) = \frac{x(0)(s+b) + x'(0)}{s^2+bs+c} + \frac{Y(s)}{s^2+bs+c}\,. \tag{17.13}$$

Quindi la soluzione $x(t)$ di (17.11) è

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{x(0)(s+b)+x'(0)}{s^2+bs+c}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{s^2+bs+c}\right\} \tag{17.14}$$

Per sistemi di ordine superiore, si usa la formula per la derivata n-esima:

$$\mathscr{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \tag{17.15}$$

che si dimostra facilmente per induzione.

Osserviamo infine che se la funzione $f(t)$ non è continua per $t = 0$, ma esiste il limite $\lim_{t\downarrow 0} = f(0+)$, allora la (17.5) va sostituita con

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+)\,,$$

che segue immediatamente dalla dimostrazione della in alto a pagina 373, quando la funzione f non è continua nello zero. Inoltre, se f è discontinua in un punto a, occorre un altro aggiustamento. In questo caso la (17.5) va sostituita con

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+) - e^{-as}\left[f(a+) - f(a-)\right],$$

dove $f(a+) - f(a-)$ è detto *salto* nel punto di discontinuità $t = a$. Se i punti di discontinuità sono più di uno, si fanno gli ovvi adattamenti.

Esempio 17.1. Sia $f(t) = \sin 3t$, la cui trasformata di Laplace è $3/(s^2+9)$. Allora

$$\mathscr{L}\{(\sin 3t)'\} = s\frac{3}{s^2+9} - 0 = \frac{3s}{s^2+9},$$

in accordo con la regola della trasformata del coseno, essendo $(\sin 3t)' = 3\cos 3t$. Inoltre,

$$\mathscr{L}\{(\sin 3t)''\} = s^2\frac{3}{s^2+9} - 0 - 3 = \frac{3s^2 - 3s^2 - 27}{s^2+9} = -9\frac{3}{s^2+3},$$

in accordo con la trasformata di Laplace di $(\sin 3t)'' = -9\sin 3t$.

Esercizio 17.5. Calcolare $\cos t \star \sin t$.

Esercizio 17.6. Calcolare $\sin t \star t^2$.

Esercizio 17.7. Calcolare le seguenti trasformate di Laplace inverse:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$$

Esercizio 17.8. Usare il metodo della trasformata di Laplace per trovare la soluzione dell'equazione $x' + 3x = \cos 3t$ con condizione iniziale $x(0) = 0$.

Esercizio 17.9. Usare il metodo della trasformata di Laplace per trovare la soluzione dell'equazione $x'' + x = 0$ con condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

Esercizio 17.10. Usare il metodo della trasformata di Laplace per trovare la soluzione dell'equazione $x'' + x = t$ con condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

17.3 *Altre proprietà della trasformata di Laplace*

Trattiamo adesso caratteristiche notevoli della trasformata di Laplace, usando la convenzione usuale $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

Prima proprietà della traslazione

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \tag{17.16}$$

Dimostrazione di (17.16).

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} &= \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = F(s-a)\end{aligned}$$

□

ESEMPIO 17.2. Dato che $\mathscr{L}\{\cos 2t\} = s/(s^2+4)$, si ha

$$\mathscr{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

SECONDA PROPRIETÀ DELLA TRASLAZIONE Sia

$$g(t) = f(t-a)\mathrm{u}(t-a) = \begin{cases} f(t-a) & \text{se } t > a \\ 0 & \text{se } t < a \end{cases}.$$

Allora

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s) \tag{17.17}$$

ESEMPIO 17.3. Dato che $\mathscr{L}\{t^3\} = 3!/s^4 = 6/s^4$, la trasformata di Laplace della funzione

$$g(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

è $(6/s^4)e^{-2s}$. Un altro esempio è il calcolo di $\mathscr{L}\{\mathrm{u}(t-a)\}$. Poiché $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$, la trasformata di Laplace di $\mathrm{u}(t-a)$ è $\mathscr{L}\{\mathrm{u}(t-a)\} = e^{-as}/s$.

PROPRIETÀ DEL CAMBIO DI SCALA

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \tag{17.18}$$

ESEMPIO 17.4. Dato che $\mathscr{L}\{\sin t\} = 1/(s^2+1)$, si ritrova la trasformata di Laplace di $\sin 3t$:

$$\mathscr{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\mathscr{L}\{\sin t\}\left(\frac{s}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

PRODOTTO PER t^n

$$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \tag{17.19}$$

ESEMPIO 17.5. Dato che $\mathscr{L}\{e^{2t}\} = 1/(s-2)$, si ha

$$\mathscr{L}\left\{te^{2t}\right\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2e^{2t}\right\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE DEGLI INTEGRALI

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s} \tag{17.20}$$

Dimostrazione di (17.17).

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^a g(t)e^{-st}dt + \int_a^\infty g(t)e^{-st}dt \\ &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{-s(u+a)}du \\ &= e^{-sa}\int_0^\infty f(t)e^{-su}du \\ &= e^{-sa}F(s)\end{aligned}$$

□

Dimostrazione di (17.18).

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(at)\} &= \int_0^\infty f(at)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty f(u)e^{-su/a}du/a \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-(s/a)u}du \\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

□

Dimostrazione di (17.19). Sia

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Allora, per la regola di Leibniz (5.55) per la derivazione sotto il segno di integrale

$$\begin{aligned}\frac{dF}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)\frac{\partial}{\partial s}e^{-st} \\ &= -\int_0^\infty [tf(t)]\,e^{-st}ds = -\mathscr{L}\{tf(t)\}\end{aligned}$$

che è la formula per $n = 1$. Iterando la procedura si ottiene la formula per n arbitrario. □

Dimostrazione di (17.20). Sia $g(t) = \int_0^t f(u)du$. Allora $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$. Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i lati, si ha

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{g'(t)\} &= s\mathscr{L}\{g(t)\} - g(0) = s\mathscr{L}\{g(t)\} \\ &= \mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)\end{aligned}$$

Quindi

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

cioè

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

□

ESEMPIO 17.6. Dato che $\mathscr{L}\{\sin 2t\} = 2/(s^2+4)$, si ha

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \sin 2u\, du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)},$$

come si può verificare direttamente.

DIVISIONE PER t

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du\,. \tag{17.21}$$

ESEMPIO 17.7. Dato che $\mathscr{L}\{\sin t\} = 1/(s^2+1)$ e $\lim_{t\to 0} \sin t/t = 1$, si ha

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

ESEMPIO 17.8. La funzione $\mathrm{Si}(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$ è detta *Seno integrale* ed è usata in ottica. La sua trasformata di Laplace segue immediatamente dalla (17.20) e dall'esempio precedente:

$$\mathscr{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right\} = \frac{1}{s}\arctan\left(\frac{1}{s}\right).$$

ESERCIZIO 17.11. Dimostrare che

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}\,.$$

FUNZIONI PERIODICHE

Se $f(t)$ è una funzione periodica di periodo T allora

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)dt}{1-e^{-sT}} \tag{17.22}$$

ESERCIZIO 17.12. Un'onda sinusoidale rettificata è definita da

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ -\sin t & \pi < 0 < 2\pi \end{cases}$$

ed estesa per periodicità $f(t) = f(t+2\pi)$ a tutta la retta reale. Determinare $\mathscr{L}\{f(t)\}$ per calcolo diretto senza usare la (17.22). Si confronti quindi il risultato ottenuto con quello dato dalla (17.22).

COMPORTAMENTO ASINTOTICO Quando si usa il metodo della trasformata di Laplace pe trovare la soluzione di un'equazione differenziale lineare, ma non sempre è possibile determinare l'antitrasformata e si deve ricorrere a metodi numerici. Informazioni utili sul comportamento delle soluzione possono essere ottenute analiticamente senza risolvere l'equazione, ma esaminando il comportamento

Dimostrazione di (17.21). Sia $g(t) = f(t)/t$, cosicchè $f(t) = tg(t)$. Prendendo la trasformata di entrambi i lati e usando la (17.19) si ottiene

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}G(s) \quad \text{o} \quad F(s) = -\frac{d}{ds}G(s)\,.$$

Integrando,

$$G(s) = -\int_\infty^s f(u)du = \int_s^\infty F(u)du$$

(nell'integrazione, si è scelta la costante di integrazione in modo tale che $\lim_{s\infty} g(s) = 0$. Quindi

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du\,.$$

□

Dimostrazione di (17.22). Sia $f(t)$ periodica di periodo T. Allora

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} = &\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \\ &+ \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\,dt \\ &+ \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\,dt + \ldots\end{aligned}$$

Si facciano i cambiamenti di variabile $t = u+T$ nel secondo integrale, $t = u+2T$, nel terzo integrale, e così via:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\} = &\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \\ &+ \int_0^T e^{-s(t+T)} f(t+T)\,dt \\ &+ \int_0^T e^{-s(t+2T)} f(t+2T)\,dt + \ldots\end{aligned}$$

Tenuto conto della periodicità di f, la somma degli integrali è pari a

$$\left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots\right] \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

dove nelle parentesi quadrate riconosciamo la serie geometrica di ragione $r = e^{-sT}$. Poiché la somma della serie geometrica è $1/(1-r)$, $|r| < 1$, si ottiene

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

che è proprio la formula che si voleva dimostrare. □

asintotico di $F(s)$ per valori piccoli o grandi di s. In effetti, è sovente molto utile detereminare questo comportamento asintotico anche quando sono disponibili soluzioni esatte, ma sono complesse e difficili da interpretare. In questa sezione presentiamo alcuni teoremi che aiutano a trovare questo comportamento asintotico.

Preliminarmente, si osservi che essendo

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,,$$

per f generalmente continua e di ordine esponenziale, allora

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0\,. \tag{17.23}$$

Ecco i due teoremi:

Teorema del valore finale. Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)\,. \tag{17.24}$$

Teorema del valore iniziale. Se i limiti indicati esistono, allora

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)\,. \tag{17.25}$$

Ci sono altri due teoremi utili riguardanti il comportamento asintotico. Per formularli ci serve la nozione uguaglianza asintotica di funzioni. Se $\lim_{t\to 0} f(t)/g(t) = 1$, si dice che per valori di t prossimi a zero, $f(t)$ è asintoticamente uguale a $g(t)$ e si scrive $f(t) \sim g(t)$ per $t \to 0$. Analogamente, se $\lim_{s\to\infty} F(s)/G(s) = 1$ si dice che per valori elevati di s , $F(s)$ è asintoticamente uguale a $G(s)$ e si scrive $F(s) \sim G(s)$ per $s \to \infty$. Seguono i seguenti due teoremi:

Se $f(t) \sim g(t)$ per $t \to 0$, allora $F(s) \sim G(s)$ per $s \to \infty$. (17.26)

Se $f(t) \sim g(t)$ per $t \to \infty$, allora $F(s) \sim G(s)$ per $s \to 0$. (17.27)

17.4 Funzioni a scalino e impulso

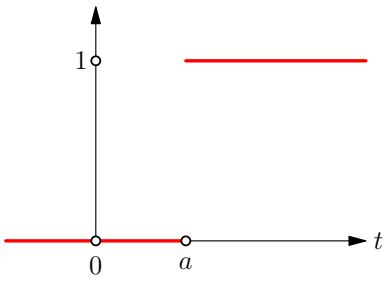
Nelle applicazioni ai sistemi lineari la funzione $f(t)$ a secondo membro della (17.6) rappresenta il segnale di ingresso. Un ingresso abbastanza comune è la *funzione di Heaviside* o funzione a scalino unitario

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ 0 & \text{se} \quad t < 0 \end{cases} \tag{17.28}$$

Dimostrazione di (17.24) *e* (17.25) . Sappiamo che $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+)$. Se $f'(t)$ è generalmente continua e di ordine esponenziale, $\mathscr{L}\{f'(t)\}(s)$ tende a zero per $s \to \infty$. Allora $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$, che è proprio la (17.24), essendo $f(0+) = \lim_{t\to 0} f(t)$.
Per quel che riguarda la (17.25), come prima, partiamo dall'uguaglianza $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+)$ e calcoliamo esplicitamente il limite del primo membro per $s \to 0$:

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{s\to 0}\lim_{M\to\infty}\int_0^M f'(t)e^{-st}dt$$
$$= \lim_{M\to\infty}\int_0^M f'(t)dt = \lim_{M\to\infty}(f(M) - f(0+))$$
$$= \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0+)]$$

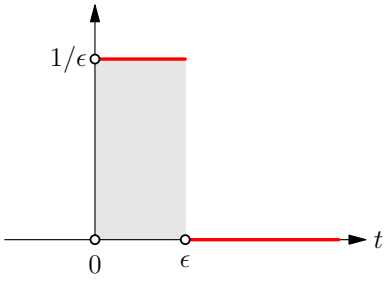
Allora $\lim_{s\to 0} sF(s) - f(0+) = \lim_{t\to\infty}[f(t) - f(0+)]$, da cui segue la (17.25) eliminando $f(0+)$ da ambo i membri. □



Specificare il suo valore nello 0 non è essenziale (a volte si assegna il valore 1/2). Lo scalino può essere traslato in un qualunque punto a, ottenendo così lo scalino $u(t-a)$. Il calcolo della trasformata di Laplace di $u(t-a)$ è immediato:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u(t-a)\} &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M e^{-st}u(t-a)\,dt = \lim_{M\to\infty}\int_a^M e^{-st}\,dt \\ &= \lim_{M\to\infty}\frac{e^{-as}-e^{-aM}}{s} = \frac{e^{-as}}{s}\end{aligned}$$

Per $a=0$, si ritrova $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$.



Un altro ingresso d'uso comune è la funzione (si veda la figura a lato)

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & \text{se} \quad 0 \le t \le \epsilon \\ 0 & \text{se} \quad t > \epsilon \end{cases} \tag{17.29}$$

È geometricamente evidente dalla figura che per valori molto piccoli di ϵ l'altezza della regione in grigio cresce enormemente mentre la larghezza diminuisce in modo tale che l'area della regione è sempre uguale a 1, vale a dire

$$\int_0^\infty \delta_\epsilon(t)dt = 1\,. \tag{17.30}$$

Anche in questo caso il calcolo della trasformata di Laplace è immediato:

$$\mathscr{L}\{\delta_\epsilon(t)\} = \int_0^\epsilon e^{-st}(1/\epsilon)\,dt = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{-st}\,dt = \frac{1-e^{\epsilon s}}{\epsilon s}\,.$$

Si osservi che per ϵ arbitrariamente piccolo $1-e^{\epsilon s} \approx \epsilon s$ e quindi la trasformata diventa $(1-e^{\epsilon s})/(\epsilon s) \approx 1$. Questo porta alla delta di Dirac $\delta(t)$, ottenuta come limite $\epsilon \to 0$ di $\delta_\epsilon(t)$ detta anche *impulso unitario*. La sua trasformata è $\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Sebbene nei calcoli risulti utile trattare la delta come se fosse davvero una funzione, quando si è in dubbio se una regola formale delle funzioni si applichi alla delta, conviene ritornare alla sua caratterizzazione come limite (**??**). Come esempio di manipolazione formale consideriamo il calcolo della trasformata di Laplace di $\delta(t-a)$:

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-sa}\,, \tag{17.31}$$

che coincide con quanto si ottiene calcolando prima $\mathscr{L}\{\delta_\epsilon(t-a)\}$ e poi passando al limite $\epsilon \to 0$. (Si osservi i che $\mathscr{L}\{u'(t-a\} = e^{-as}$. L'impulso unitario $\delta(t-a)$ può dunque essere interpretato come la derivata (nel senso delle funzioni generalizzate) dello scalino unitario.

ESERCIZIO 17.13. Risolvere l'equazione lineare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + x = y(t)$$

per $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ e per (a) $g(t) = u(t)$, (b) $g(t) = \delta(t)$; γ è un parametro positivo.

17.5 *Funzione di trasferimento*

Consideriamo la trasformata di Laplace del sistema del secondo ordine (17.11), per $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$. Dalla (17.13) si ottiene

$$X(s) = \frac{Y(s)}{s^2 + bs + c}\,.$$

Il rapporto $H(s)$ tra l'*uscita* $X(s)$ e l'*ingresso* $Y(s)$ per condizioni iniziali nulle è detto *funzione di trasferimento*,

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} \tag{17.32}$$

Quindi, per il sistema (17.11), si ha $H(s) = 1/(s^2 + bs + c)$. Sia $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s\}$, allora

$$x(t) = \int_0^t h(t-u)y(u)du \tag{17.33}$$

per il teorema di convoluzione. Chiaramente, la stessa caratterizzazione (17.32) vale per sistemi lineari (a coefficienti costanti) di qualunque ordine. Equivalentemente, $H(s)$ può essere definita come la risposta del sistema ad un impulso unitario ($Y(s) = 1$), per condizioni iniziali nulle.

In generale, un sistema può avere più di un ingresso. In questo caso, la funzione di trasferimento da un ingresso particolare ad un'uscita particolare è definita come la trasformata di Laplace di quella uscita particolare quando un impulso unitario è applicato al dato ingresso, essendo nulli tutti gli altri ingressi e tutte le condizioni iniziali. La soluzione completa del sistema è dunque

$$X(s) = H(s)Y(s) + \text{ altri termini indipendenti da } Y\,,$$

dove gli "altri termini" possono essere il risultato di condizioni iniziali non nulle o di altri ingressi non nulli (per esempio, disturbi dovuti a rumore).

La funzione di trasferimento può essere anche vista come una rappresentazione simbolica dei coefficienti dell'equazione differenziale, nel senso dell'esempio seguente.

ESEMPIO 17.9. Un sistema lineare ha un ingresso y e un'uscita x che soddisfano l'equazione lineare

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \beta x = a\frac{dy}{dt} + by\,.$$

Allora la sua funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{as+b}{s^2+\alpha s+\beta} \tag{17.34}$$

Si osservi che il denominatore è il polinomio caratteristico dell'omogenea associata.

NOTA Sebbene la funzione di trasferimento sia definita in termini di risposta ad impulsi unitari, la si calcola facilmente in modo diretto dalle equazioni differenziali del sistema, come nell'esempio sopra.

17.6 *Antitrasformata di funzioni razionali*

Nelle applicazioni ai sistemi lineari, ci si trova di fronte al problema di trovare l'antitrasformata di Laplace di funzioni come la (17.34), cioè *funzioni razionali* $P(s)/Q(s)$ dove $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi.

Se il grado di $P(s)$ è minore di quello di $Q(s)$, ogni funzione razionale può essere espressa come somma di *fratti semplici*. Nel campo reale essi hanno la forma $\dfrac{A}{(as+b)^r}$, $\dfrac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$, dove $r = 1, 2, \ldots$. Determinando l'antitrasformata di ognuno dei fratti semplici, per linearità, si arriva a determinare $\mathscr{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$.

ESERCIZIO 17.14. Mostrare che

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = 4e^{3t} - e^{-t}\,.$$

ESERCIZIO 17.15. Mostrare che

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1} + \frac{-7}{(s-2)^3} + \frac{4}{(s-2)^2} + \frac{1/2}{s-2}\,.$$

ESERCIZIO 17.16. Mostrare che

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

dove $A = 0$, $B = 1/3$, $C = 0$, $D = 2/3$.

ESERCIZIO 17.17. Mostrare che l'antitrasformata della funzione dell'esercizio 17.16 è

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{1}{3}\left(\sin t + \sin 2t\right)\,.$$

Soluzione di 17.14. Le radici del denominatore sono 3 e -1. Allora si pone

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

Si possono determinare A e B con il metodo algebrico usuale o con il seguente metodo meno noioso. Si moltiplichino ambo i membri dell'equazione sopra per $(s-3)$ e si passi al limite $s \to 3$:

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 3}(s-3)\frac{P(s)}{Q(s)} &= A + \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{B}{s+1}\\ &= A + 0 = A\,.\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}A &= \lim_{s\to 3}(s-3)\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\\ &= \lim_{s\to 3}\frac{3s+7}{s+1} = 4\,.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}B &= \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\\ &= \lim_{s\to -1}\frac{3s+7}{s-3} = -1\,.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} &= 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}\\ &\quad - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\\ &= 4e^{3t} - e^{-t}\,.\end{aligned}$$

□

L'esercizio 17.15 mostra che il calcolo di antitrasformate di funzioni razionali richiede una formula per determinare $\mathscr{L}^{-1}\{1/(s-a)^n\}$. La formula è

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\} = e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \tag{17.35}$$

ed è conseguenza delle equazioni (17.16) e (17.19), ma può anche essere ottenuta direttamente dalla definizione di trasformata di Laplace (esercizio). È una formula molto utile, da tenere a mente.

L'esercizio 17.17 mostra che i fratti quadratici nello sviluppo in fratti semplici, dopo qualche massaggio, possono essere ricondotti a funzioni trigonometriche. Questa complicazione può essere evitata se consideriamo sviluppi in fratti semplici a coefficienti complessi. Per il teorema fondamentale dell'algebra, numeratore e denominatore di una funzione razionale sono sempre fattorizzabili nei complessi:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = k\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}\,. \tag{17.36}$$

Le costanti complesse $z_1, z_2, \ldots, z_m$ e $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sono dette, rispettivamente, *zeri* e *poli* della funzione $F(s)$; k è una costante. Se il grado di $P(s)$ è minore di quello di $Q(s)$ e i poli sono tutti distinti, allora $F(s)$ ha la decomposizione in fratti semplici

$$F(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-p_n}\,. \tag{17.37}$$

Le costanti A_k si determinano sfruttando il metodo utilizzato nella risoluzione dell'esercizio 17.14 e applicando la regola dell'Hospital:

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s\to p_k}(s-p_k)F(s) = \lim_{s\to p_k}(s-p_k)\frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to p_k}P(s)\left[\frac{s-p_k}{Q(s)}\right] \\ &= \lim_{s\to p_k}P(s)\lim_{s\to p_k}\left[\frac{s-p_k}{Q(s)}\right] = P(p_k)\lim_{s\to p_k}\frac{1}{Q'(p_k)} = \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\,, \end{aligned}$$

dove $Q'(p_k)$ è la derivata di $Q(s)$ calcolata per $s = p_k$. Quindi la (17.37) può essere riscritta nella forma

$$F(s) = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\frac{1}{s-p_k}\,. \tag{17.38}$$

Usando la (17.35) per $n = 1$, si ottiene

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}e^{p_k t} \tag{17.39}$$

Questa formula molto utile è detta *teorema* o *formula di sviluppo di Heaveside*.

Soluzione di 17.17.

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+2s+2} + \frac{2/3}{s^2+2s+5}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+2}\right\} + \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\} \\ &= \frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} + \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\ &= \frac{1}{3}e^{-t}\sin t + \frac{2}{3}\frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \\ &= \frac{1}{3}(\sin t + \sin 2t) \end{aligned}$$

Notare che nel penultimo passaggio è stata usata la formula (17.35). □

ESEMPIO 17.10. Deterrminiamo $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$. Si ha $P(s) = 3s+1$, $Q(s) = (s-1)(s^2+1)$ I poli della funzione razionale da invertire sono gli zeri di $Q(s)$, cioè, 1, i, $-i$. La derivata di $Q(s)$ è $Q'(s) = 3s^2 - 2s + 1$. Allora per la (17.39), l'antitrasformata è

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} &= \frac{P(1)}{Q'(1)}e^t + \frac{P(i)}{Q'(i)}e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)}e^{-it} \\
&= \frac{4}{2}e^t + \frac{3i+1}{-2-2i}e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i}e^{-it} \\
&= 2e^t - 2\mathrm{Re}\left\{\frac{3i+1}{2+2i}e^{it}\right\} \\
&= 2e^t - 2\mathrm{Re}\left\{\frac{(3i+1)(2-2i)}{8}e^{it}\right\} \\
&= 2e^t - \frac{1}{4}\mathrm{Re}\{(8+4i)(\cos t + i\sin t)\} \\
&= 2e^t - 2\cos t + \sin t
\end{aligned}$$

Supponiamo adesso che non tutti poli siano distinti, ma ce ne sia uno solo, p, di molteplicità n. Come prima, si assuma che grado di $P(s)$ sia minore di quello di $Q(s) = (s-p)^n$. Allora

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p)^n} = \frac{A_1}{(s-p)} + \frac{A_2}{(s-p)^2} + \dots \frac{A_n}{(s-p)^n} \tag{17.40}$$

La regola per determinare i coefficienti A_k si indovina facilmente considerando

$$\begin{aligned}
(s-p)^n F(s) &= (s-p)^n \left[\frac{A_1(s-p)^{n-1} + \dots A_{n-1}(s-p) + A_n}{(s-p)^n}\right] \\
&= A_1(s-p)^{n-1} + A_2(s-p)^{n-2} + \dots + A_{n-1}(s-p) + A_n\,.
\end{aligned}$$

Allora A_n è semplicemente $(s-p)^n F(s)$ calcolato per $s = p$ o, più precisamente il suo limite per s che tende a p. Per trovare A_{n-1} occorrerà derivare $(s-p)^n F(s)$ una volta e poi calcolare in $s = p$. Si ha infatti Analogamente, per trovare A_{n-2} occorrerà derivare due volte e poi calcolare in $s = p$, tenuto conto del fattore 2, dovuto alla derivazione. Risalendo al termine $n-k$-esimo, si ottiene la formula

$$A_{n-k} = \lim_{s\to p} \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{(s-p)^n F(s)\right\}\,,$$

che può essere riscritta nella variabile $j = n-k$:

$$A_j = \lim_{s\to p} \frac{1}{(n-j)!}\frac{d^{n-j}}{ds^{n-j}}\left\{(s-p)^n F(s)\right\} \qquad j = 1,\dots,n \tag{17.41}$$

Il termine A_1 è chiamato *residuo* di $F(s)$ in $s = p$ ed è denotato $\mathsf{Res}\{F(s), p\}$. Una volta che sono stati calcolati gli A_j mediante la

(17.41), si può usare la (17.35) per invertire la (17.40), ottenedendo

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{pt}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j t^{j-1}}{(j-1)!} \tag{17.42}$$

Se la funzione razionale $F(s) = Q(s)/P(s)$ contiene poli di diversa molteplicità e poli semplici, si combinano le decomposizioni (17.37) e (17.40) per linearità. Il problema dell'inversione di una qualunque funzione razionale $F(s) = Q(s)/P(s)$, con il grado di $P(s)$ minore del grado di $Q(s)$ è dunque completamente risolto. Se il grado di $P(s)$ è maggiore del grado di $Q(s)$ occorre dividere[1] $P(s)$ per $Q(s)$, che dà $P(s) = E(s) + R(s)$, dover $R(s)$, il resto della divisione, è un polinomio di grado inferiore a quello di $P(s)$. Quindi

[1] Algoritmo euclideo di divisione di polinomi, che si assume noto dalle scuole superiori.

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = E(s) + \frac{R(s)}{Q(s}\,.$$

Poiché il grado di $R(s)$ è minore del grado di $Q(s)$, per $R(s)/Q(s)$ si usano le formule ottenute sopra. Per quel che riguarda il polinomio $E(s)$, esso non corrisponde a trasformate di Laplace di funzioni vere e proprie perché queste devono tendere a zero per s che tende all'infinito (vedere sotto). Le antitrasformate di s^n sono associate a funzioni intese in senso generalizzato, ad esempio, $n = 0$ corrisponde all'impulso unitario e $n = 1$ alla sua derivata.

17.7 *Funzioni particolari*

La funzione gamma Per $x > 0$, la funzione gamma è definita da

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\,. \tag{17.43}$$

Vale la formula di ricorrenza

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{dove} \quad \Gamma(1) = 1\,. \tag{17.44}$$

Se x è un intero, dalla (17.44) segue che

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

per cui la funzione gamma è una generalizzazione del fattoriale. Per questo motivo la funzione gamma è anche detta *funzione fattoriale*. Per x reale negativo si può definire $\Gamma(x)$ come

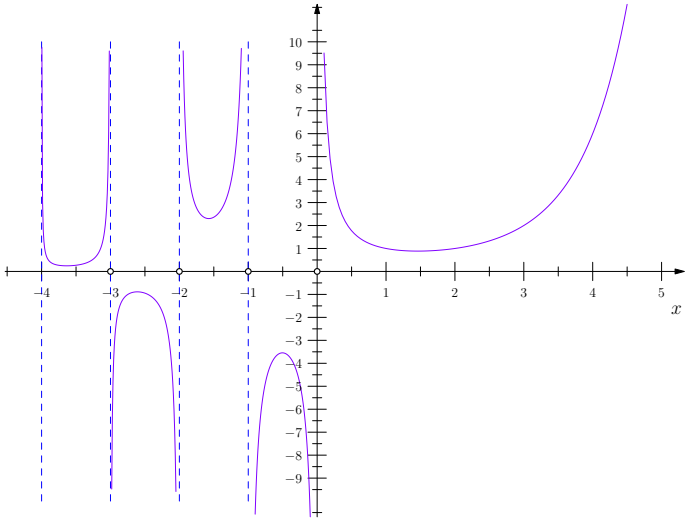
$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

Dimostrazione della (17.44).

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}dt \\ &= \left[t^x(-e^{-t})\right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (xt^{x-1})(-e^{-t})dt \\ &= x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x)\,.\end{aligned}$$

□

Ecco il grafico di $\Gamma(x)$:



ESERCIZIO 17.18. Dimostrare che $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

ESERCIZIO 17.19. Dimostrare che $\mathscr{L}\{t^x\} = \dfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$, per $x > -1$, $s > 0$.

ESERCIZIO 17.20. Dimostrare che $\mathscr{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$, per $s > 0$.

Commento all'esercizio 17.20 Si osservi che per quanto $f(t) = 1/\sqrt{t}$ non soddisfi le condizioni sufficienti del criterio (17.3), la sua trasformata di Laplace esiste comunque. In effetti, le condizioni di esistenza possono essere indebolite richiedendo che la funzione $f(t)$ sia generalmente continua in qualunque intervallo limitato in $[a, \infty]$, $a > 0$ e permettendo che essa possa divergere in 0, a patto che che la sua trasformata di Laplace converga come integrale improprio, il che è garantito se per t che tende ad 0, $f(t)$ è di ordine x^p, per $p < 1$, cioè se vale la (5.48).

LA FUNZIONE DEGLI ERRORI La *funzione degli errori* è definita come

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t e^{-u^2}du$$

ed è collegata all'area della curva normale in probabilità. Il fattore $2/\pi$ in fronte serve a garantire che l'area totale valga 1. La funzione degli errori complementare, denotata erfc è definita come

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi}\int_t^\infty e^{-u^2}du$$

Soluzione di 17.18.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt \quad (\text{posto } t = u^2)\\ &= \int_0^\infty u^{-1}e^{-u^2}2udu\\ &= 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi},\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è usato la (5.56). □

Soluzione di 17.19 e 17.20.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{t^x\} &= \int_0^\infty t^x e^{-st}dt \quad (\text{posto } st = u,\ s > 0)\\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^x e^{-u}d\left(\frac{u}{s}\right)\\ &= \frac{1}{s^{x+1}}\int_0^\infty u^x e^{-u}du = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}.\end{aligned}$$

Per $x = -1/2$ si ottiene

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}},$$

avendo usato il valore di $\Gamma(1/2)$ ottenuto nell'esercizio predente. □

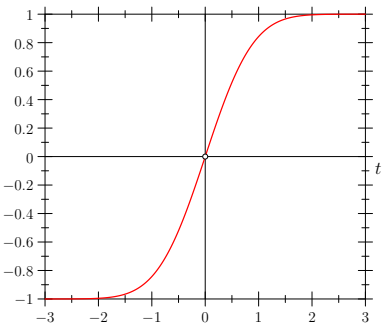


Figura 17.1: Funzione degli errori

ESERCIZIO 17.21. Dimostrare che $\mathscr{L}\left\{\operatorname{erf}(\sqrt{t})\right\} = \dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}$.

Soluzione. In primo luogo osserviamo che per cambiamento di variabili $v = u^2$, si ha

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du = \int_0^t \frac{e^{-v}}{\sqrt{\pi v}}dv$$

Dall'esercizio 17.20 sappiamo che

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}}\,.$$

Allora, per la prima proprietà della traslazione, si ottiene

$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{s+1}}$$

e la trasformata di Laplace degli integrali fornisce

$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}du\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

Ma, per quanto visto all'inizio,

$$\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}}du = \operatorname{erf}(\sqrt{t})\,.$$

Quindi $1/(s\sqrt{s+1})$ è la trasformata di Laplace di $\operatorname{erf}(\sqrt{t})$. □

ESERCIZIO 17.22. Dimostrare che $\mathscr{L}\left\{\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \dfrac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$.

Soluzione. Possiamo applicare la regola della trasformata di Laplace di integrali per invertire la trasformata di Laplace, se sappiamo calcolare l'antitrasformata di $e^{-a\sqrt{s}}$. La calcoliamo, ponendo per semplicità $a = 1$.

Sia $Y = e^{-\sqrt{s}}$, allora $Y' = -\dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{2s^{1/2}}$, $Y'' = -\dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{4s} + \dfrac{e^{-\sqrt{s}}}{4s^{3/2}}$. Allora

$$4sY'' + 2Y' - Y = 0$$

Ora, $Y'' = \mathscr{L}\{t^2y\}$, per cui $sY'' = \mathscr{L}\left\{\dfrac{d}{dt}[t^2y]\right\} = \mathscr{L}\left\{t^2y' + 2ty\right\}$. Si ha inoltre $Y' = \mathscr{L}\{-ty\}$. Quindi l'equazione differenziale per Y può essere riscritta nella forma

$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$

$$4\mathscr{L}\left\{t^2y' + 2ty\right\} - 2\mathscr{L}\{ty\} - \mathscr{L}\{Y\} = 0 \quad \text{ovvero} \quad 4t^2y' + (6t-1)y = 0$$

che a sua volta può essere riscritta nella forma

$$\frac{dy}{y} + \frac{6t-1}{4t^2}dt = 0 \quad \text{ovvero} \quad \ln y + \frac{3}{2}\ln t + \frac{1}{4t} = c_1$$

da cui

$$y = \frac{c}{t^{3/2}} e^{-1/(4t)}$$

Occorre determinare la costante c. Ora $ty = \frac{c}{t^{1/2}} e^{-1/(4t)}$ e

$$\mathscr{L}\{ty\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\}$$

Quindi

$$\mathscr{L}\{ty\} = -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\{y\} = -\frac{d}{ds}e^{-\sqrt{s}} = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

Per valori elevati di t

$$ty \sim \frac{c}{t^{1/2}} \quad \text{e} \quad \mathscr{L}\{ty\} \sim \frac{c\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Per valori piccoli di s

$$\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \sim \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

per il teorema del valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c\sqrt{\pi}}{t^{1/2}} = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{2\sqrt{s}} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Ne segue che

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-1/(4t)}$$

da cui

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{e^{-a\sqrt{s}}\right\} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}} e^{-a^2/(4t)}$$

$$\mathscr{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Consideriamo adesso $\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$. Per la regola della trasformata di Laplace di integrali

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}\right\} &= \int_0^t \frac{a}{2\sqrt{\pi}u^{3/2}} e^{-a^2/(4u)} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-v^2} dv \quad \text{posto } u = \frac{1}{2av^2} \\
&= \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

□

17.8 *Applicazioni ai problemi al contorno*

ESEMPIO 17.11. Consideriamo il problema al contorno di conduzione del calore sulla semiretta $\mathbb{R}^+$ con condizioni al contorno non

omogenee nell'origine e dato iniziale la funzione nulla.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ \\ |u(x,t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x,0) = 0 & \text{CI} \\ u(0,t) = \theta_0 & \text{CC} \end{cases} \tag{17.45}$$

La procedura di soluzione è riassunta dal seguente schema:

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & \textcircled{4} & u(x,t) = \theta_0 \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \\ & \downarrow \mathscr{L} & & & \uparrow \mathscr{L}^{-1} \\ \textcircled{2} & \dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{s}{D}U = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{3} & U(x,s) = \dfrac{\theta_0}{s} e^{-\sqrt{s/D}x} \end{array}$$

$$\mathscr{L}\{u''(t)\} = s^2U(s) - su(0) - u'(0)$$

Nel passaggio da ① a ②, abbiamo usato la proprietà della derivata della trasformata di Laplace e la condizione iniziale $f(x) = 0$. Nel passaggio da ② a ③, abbiamo usato la condizione di limitatezza e scartato la soluzione che esplode, imposto la CC, tenuto conto che la trasformata di Laplace della funzione costante θ_0 è θ_0/s. Nel passaggio da ③ a ④ abbiamo usato il riusultato dell'esercizio 17.22. L'andamento della soluzione trovata è mostrato nella figura a lato.

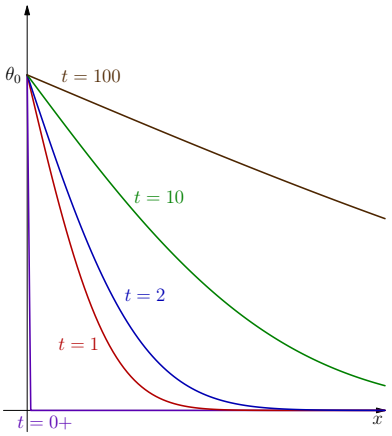


Figura 17.2: Andamento nel corso del tempo di $\theta_0 \operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{Dt}))$.

ESEMPIO 17.12. Consideriamo il problema al contorno non omogeneo per l'equazione delle onde:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}^+, \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ \\ |u(x,t)| < M & \text{limitatezza della soluzione} \\ u(x,0) = 0\,, & \partial_t u(x,0) = 0 \qquad \text{CI} \\ u(0,t) = h(t) & t \in \mathbb{R}^+ \qquad \text{CC} \end{cases} \tag{17.46}$$

Sia $\mathscr{L}\{u(x,t)\} = U(x,s)$ e $\mathscr{L}\{h(t)\} = H(s)$ Allora:

$$\begin{array}{ccccc} \textcircled{1} & \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & \xleftarrow[\text{soluzione}]{} & \textcircled{4} & u(x,t) = h\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \mathrm{u}\left(t - \dfrac{x}{c}\right) \\ & \downarrow \mathscr{L} & & & \uparrow \mathscr{L}^{-1} \\ \textcircled{2} & \dfrac{d^2U}{dx^2} - \dfrac{s^2}{c^2}U = 0 & \xrightarrow{\text{soluzione}} & \textcircled{3} & U(x,s) = H(s)e^{-(s/c)x} \end{array}$$

Nel passaggio da ① a ②, abbiamo usato la proprietà della derivata della trasformata di Laplace per derivazione e le condizioni iniziali. Nel passaggio da ② a ③, abbiamo usato la condizione di limitatezza e scartato la soluzione che esplode, imposto la CC (che in trasformata di Laplace diventa la "condizione iniziale per $x = 0$"). Il passaggio da ③ a ④, usa la seconda proprietà della traslazione.

Seconda proprietà della traslazione. Se $g(t) = f(t-a)\mathrm{u}(t-a)$, allora

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$$

Tavola di trasformate di Laplace

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	(TL1)
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	(TL2)
$\mathrm{u}(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	(TL3)
$f(t-a)\mathrm{u}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	(TL4)
$\delta(t)$	1	(TL5)
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}	(TL6)
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	(TL7)
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	(TL8)
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) -$ $\cdots - f^{(n-1)}(0)$	(TL9)
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$	(TL10)
t^n $(n \in \mathbb{Z})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	(TL11)
t^x $(x \geq -1 \in \mathbb{R})$	$\frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}$	(TL12)
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	(TL13)
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	(TL14)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	(TL15)
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	(TL16)
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	(TL17)
$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	(TL18)
$\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	(TL19)
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	(TL20)
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	(TL21)
$e^{at}\sin kt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$	(TL22)
$e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	(TL23)
$e^{at}\sinh kt$	$\frac{k}{(s-a)^2-k^2}$	(TL24)
$e^{at}\cosh kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2}$	(TL25)
$t\sin kt$	$\frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}$	(TL26)
$t\cos kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$	(TL27)
$t\sinh kt$	$\frac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$	(TL28)
$t\cosh kt$	$\frac{s^2-k^2}{(s^2-k^2)^2}$	(TL29)
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\frac{a}{s}$	(TL30)
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	(TL31)
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	(TL32)
$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	(TL33)

Problemi

Problema 17.1. □ Determinare la trasformata di Laplace $F(s)$ di ciascuna delle seguenti funzioni $f(t)$ definite su $(0, \infty)$.

1. $(at + b)^2$
2. $\cosh t$
3. $\sin^2 t$
4. $\sin t \cos t$
5. $t \sinh t$
6. $1/\sqrt{t}$

Problema 17.2. □ Determinare l'antitrasformata di Laplace $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ delle seguenti funzioni

1. $\dfrac{a}{s+b}$
2. $\dfrac{2s-5}{s^2-9}$
3. $\dfrac{1}{s^2+2s}$
4. $\dfrac{1}{s^{3/2}}$
5. $\dfrac{e^{-3s}+e^{-s}}{s}$
6. $\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$
7. $\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}$
8. $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$
9. $\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$

Problema 17.3. □ Usare la trasformata di Laplace per risolvere l'equazione integrale

$$\int_0^t (t-u)^3 g(u)du = f(t)$$

nell'incognita g. Stabilire quali condizioni deve soddisfare f affinché il metodo sia attendibile.

Problema 17.4. □ Usare la trasformata di Laplace per ottenere la soluzione dell'equazione delle onde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad x > 0\,, \quad t > 0\,,$$

soggetta alla condizione al contorno

$$f(0,t) = \cos^2 t \quad t \geq 0$$

e alle condizioni iniziali

$$f(x,0) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0$$

Parte III

Metodi di analisi complessa

Indice

18 *Funzioni analitiche* 399

18.1 Trasformazioni analitiche del piano 399

18.2 Conforme = analitico 402

18.3 Differenziabilità complessa e funzioni analitiche 403

18.4 Integrazione complessa 404

18.5 Circuitazione e Flusso 405

18.6 Significato fisico delle funzioni analitiche 407

18.7 Teorema e formula di Cauchy 410

18.8 Sfera di Riemann e andamento dei campi all'infinito 411

18.9 Conseguenze del teorema di Cauchy 415

Problemi 419

Soluzioni 421

19 *Teorema dei residui e calcolo di integrali* 427

19.1 Antiderivata di una funzione analitica 427

19.2 Il teorema dei residui 430

19.3 Residui e singolarità di una funzione 432

19.4 Calcolo di integrali con il metodo dei residui I 434

19.5 Calcolo di integrali con il metodo dei residui II 440

19.6 Estensione del teorema e della formula di Cauchy 445

Tavola riassuntiva delle singolarità di una funzione 450

Problemi 451

SOLUZIONI 453

20 *Il cuore della teoria delle funzioni analitiche* **459**

20.1 Multifunzioni, punti di diramazione e rami 459
20.2 Rilevanza per le serie di potenze 466
20.3 Integrale di una funzione con punti di diramazione 468
20.4 Sviluppo in serie di Taylor 469
20.5 Sviluppo in serie di Laurent 471
20.6 Prolungamento analitico 474
*20.7 La funzione zeta di Riemann** 477
20.8 Il teorema di rappresentazione di Riemann 480
PROBLEMI 483
SOLUZIONI 485

21 *Miscellanea di applicazioni* **497**

21.1 Serie di Fourier, Taylor e Laurent 497
21.2 Trasformate di Fourier 502
21.3 Trasformate di Laplace 504
21.4 Segnali a banda limitata e teorema di Whittaker-Shannon 507
21.5 Formule di Poisson e relazioni di Kramers–Kronig 510
21.6 Il problema di Dirichlet per funzioni armoniche nel piano 513
21.7 Soluzione di Sommerfeld del problema di Keplero 516
21.8 Equazione delle onde 518
21.9 Flussi irrotazionali di fluidi perfetti nel piano 521
PROBLEMI 522
SOLUZIONI 523

18
Funzioni analitiche

Indice

18.1 Trasformazioni analitiche del piano 399

18.2 Conforme = analitico 402

18.3 Differenziabilità complessa e funzioni analitiche 403

18.4 Integrazione complessa 404

18.5 Circuitazione e Flusso 405

18.6 Significato fisico delle funzioni analitiche 407

18.7 Teorema e formula di Cauchy 410

18.8 Sfera di Riemann e andamento dei campi all'infinito 411

18.9 Conseguenze del teorema di Cauchy 415

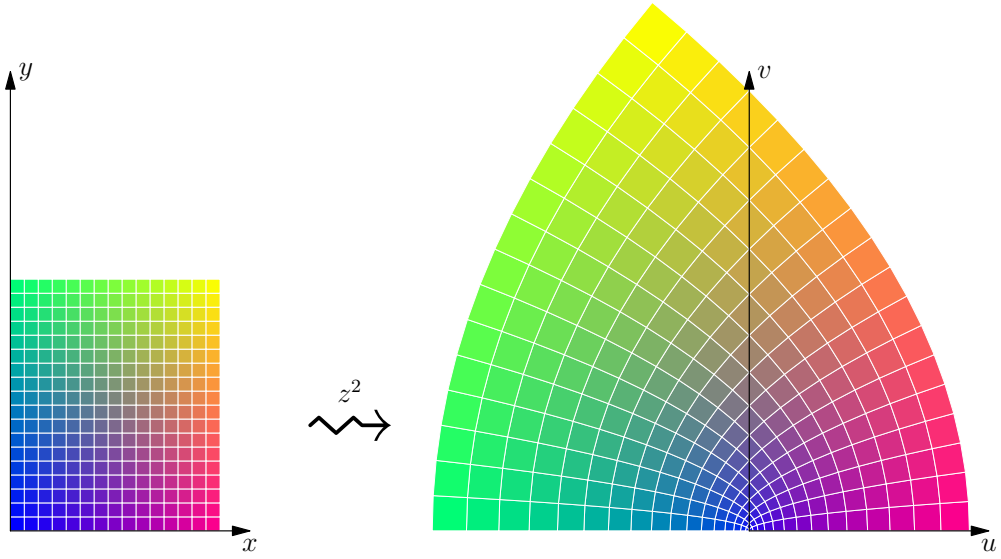
Problemi 419

Soluzioni 421

18.1 Trasformazioni analitiche del piano

Le funzioni di variabile complessa a valori complessi sono trasformazioni del piano complesso in sé stesso. In quanto tali, sono in corrispondenza uno a uno con trasformazioni $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to$ del piano reale in se stesso. Vale a dire, alla funzione $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, w = F(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy$ si può associare il campo vettoriale $\mathbf{F} = (u,v)$ oppure il campo vettoriale $\overline{\mathbf{F}} = (u,-v)$. Viceversa, al campo $\mathbf{F} = (u,v)$ si può associare la funzione complessa $F = u + iv$ oppure la funzione complessa $\overline{F} = u - iv$. Fatta una di queste scelte, la corrispondenza tra funzioni complesse e campi vettoriale sul piano

è biunivoca. Consideriamo ad esempio, $F(z) = z^2$.



Allora le componenti reali sono determinate dalla relazione

$$u + iv = w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy\,,$$

cioè $u = x^2 - y^2\,, \quad v = xy\,.$

Rtorniamo adesso alle trasformazioni lisce del piano in sé stesso del capitolo 5, in particolare agli esempi 5.1 e 5.2. Per comodità, riportiamo le figure 5.3 e 5.4 che ne illustrano la struttura locale.

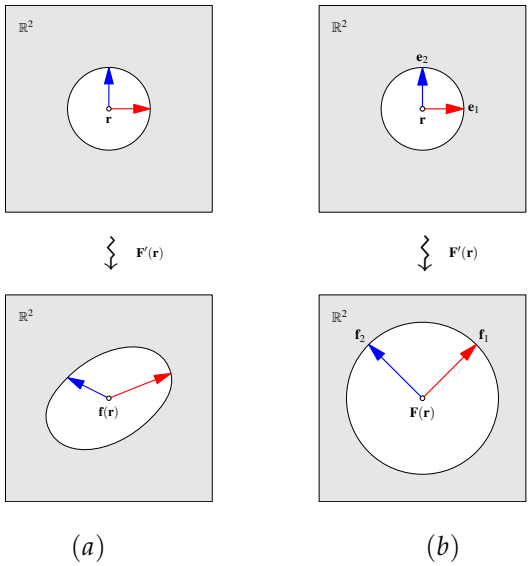


Figura 18.1: La (a) illustra il caso generico: i due vettori ortogonali $\mathbf{e}_1$ (in rosso) e $\mathbf{e}_2$ (in blu) sono trasformati dalla derivata $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ nei vettori $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ di diversa lunghezza e con angoli di rotazione differenti, vale a dire, l'amplificazione e la rotazione sono diverse per diversi vettori infinitesimi nel punto z La (b) illustra il caso in cui l'effetto locale della trasformazione è una dilatazione combinata con una rotazione ortogonale, per cui un cerchio è trasformato in un cerchio (in generale di raggio differente).

L'effetto locale delle trasformazione, cioè l'effetto sui vettori infinitesimi nel punto z è quello illustrato in figura 18.2: una rotazione

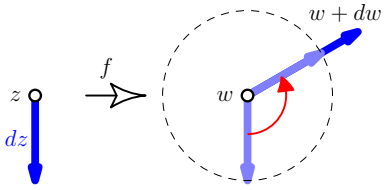


Figura 18.2: Significato geometrico di $dw = f'(z)dz$.

combinata con uno stiramento che per brevità chiameremo "stiro-giro". In generale, l'amplificazione e la rotazione sono diverse per diversi vettori infinitesimi nel punto z, come ne caso (a). Quando sono le stesse come in (b) (si veda anche la figura 18.3), la trasformazione f è detta *analitica* o *olomorfa*.

Le trasformazioni analitiche sono precisamente quelle il cui effetto locale è uno stiro-rotazione: tutti i vettori infinitesimi che emanano da un singolo punto sono amplificati e ruotati nello stesso modo. (18.1)

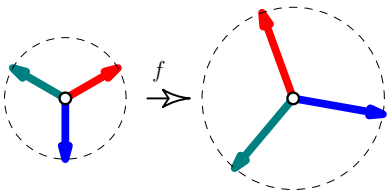


Figura 18.3: Azione locale di una funzione analitica: i tre vettori a sinistra sono tutti e e tre ruotati dello stesso angolo e allungati della stessa quantità.

Si osservi che se una trasformazione è analitica, cerchi e quadrati infinitesimi si trasformano rispettivamente in cerchi e quadrati infinitesimi, come illustrato dalla figura della pagina precedente per $F(z) = z^2$ (in generale, questo non vale per cerchi e quadrati finiti, che risultano deformati).

Uno stiro-giro locale in z è la moltiplicazione per un numero complesso che dipende da z e che denoteremo $F'(z)$,

$$dw = F'(z)dz\,. \tag{18.2}$$

La funzione $F'(z)$ è detta la *derivata* complessa della funzione F nel punto z. (dz è espanso di $|F'(z)|$ e ruotato di $\arg[F'(z)]$). La derivata complessa è in corrispondenza uno a uno con la derivata reale

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

del campo vettoriale associato. Se la funzione è analitica, $\mathbf{F}'(\mathbf{r})$ è uno stiro-giro, cioè la composizione di una dilatazione (o compressione) e di una rotazione e quindi della forma

$$\mathbf{F}'(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \tag{18.3}$$

dove$\rho > 0$ e θ sono in generale funzioni del punto. Per confronto, si ottengono le *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

che forniscono un criterio per riconoscere una funzione analitica.

Esempi

- $f(z) = z^2$ è analitica e $f'(z) = 2z$ (incluso $z = 0$, dove però l'angolo viene raddoppiato).

- $f(z) = \overline{z}$ non è analitica: lo stiramento è uguale per tutti (e vale 1), ma la rotazione no: la figura 18.4 mostra che ϕ deve essere ruotato di -2ϕ per ottenere un vettore immagine con angolo $-\phi$. Quindi differenti vettori devono essere ruotati di quantità differenti, e quindi $f(z) = \overline{z}$ non è una stiro-rotazione.

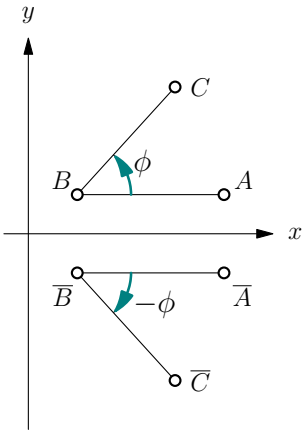
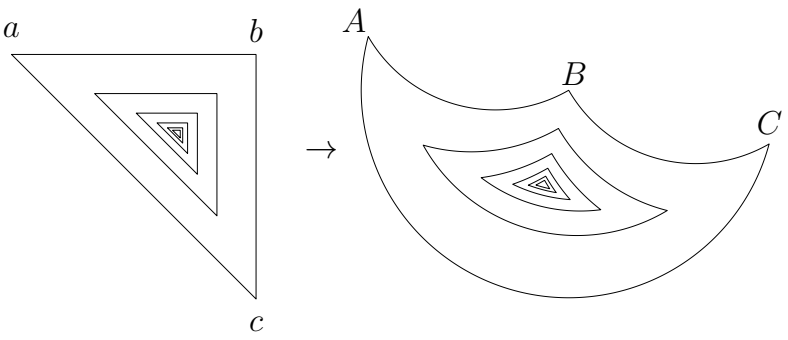


Figura 18.4: La coniugazione complessa è una riflessione rispetto all'asse reale che preserva il valore assoluto dell'angolo, ma non il suo segno; non è analitica.

18.2 *Conforme = analitico*

Se una trasformazione F preserva l'angolo, incluso il suo *segno*, tra qualunque coppia di curve che passano per il punto p, si dice che la trasformazione è *conforme nel punto p*. Se la trasformazione è conforme in tutti i punti della regione in cui è definita, si dice che la trasformazione è *conforme*. Se il valore numerico dell'angolo è preservato, ma il segno è invertito, la trasformazione è detta *anti-conforme*. Ad esempio, $z \mapsto \overline{z}$ è anticonforme. Stiro-rotazioni e traslazioni sono conformi (perché sono proprio le trasformazioni di similitudine del piano euclideo, cfr. sezione 1.2, che come è noto dalla geometria elementare, lasciano intatti gli angoli).

Dalla (18.1) segue immediatamente che se una trasformazione è analitica, è anche conforme. Cerchiamo di capire in che senso vale il viceversa. Guardiamo la figura sotto.



Il triangolo finito (non infinitesimo) *abc* è trasformato conformemente nel triangolo ABC: i lati si distorcono, ma gli angoli restano invariati. Si immagini adesso, mediante trasformazione di scala, di comprimere il triangolo *abc* verso un punto arbitrario dentro la regione. Mentre facciamo questo, i lati delle immagini dei triangoli diventano sempre più linee rette, mentre gli angoli, ovviamente, non cambiano. Perciò un triangolo infinitesimo a sinistra è trasformato in un triangolo infinitesimo *simile* a destra. Quindi è ottenuto mediante stiro-rotazione dall'originale. Quindi la trasformazione è analitica. Perciò, *se una trasformazione è conforme in un intorno comunque piccolo del punto p, allora è analitica in p.* In particolare,

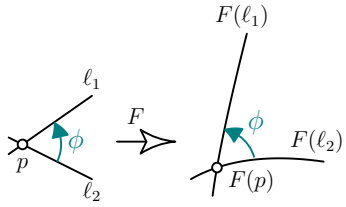


Figura 18.5: Trasformazione conforme.

- L'inversione complessa $z \mapsto 1/z$ è analitica (essendo conforme, cfr. problema 20.13).
- Le trasformazioni di Möbius

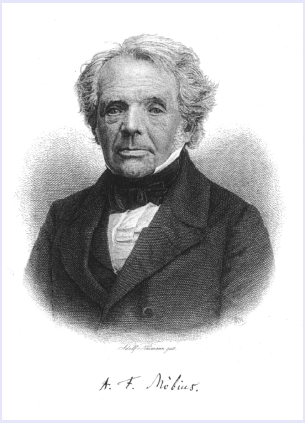
$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

sono analitiche (essendo conformi, cfr. problema 20.14).

- L'inversione $z \mapsto 1/\overline{z}$ *non* è analitica.

Si osservi che una funzione può non essere conforme in un punto, pur avendo derivata complessa in quel punto ed essendo analitica in qualunque intorno di quel punto; per esempio, $w = f(z) = z^2$ è conforme dappertutto eccetto che nei due punti critici $z = 0$ e $z = \infty$, dove gli angoli sono raddoppiati, ma è derivabile nello 0 ed è analitica in qualunque dominio che contenga lo zero (per $z = \infty$ non è analitica). In generale:

Una funzione analitica f può non essere conforme nei punti critici della trasformazione, cioè nei punti c in cui $f'(c) = 0$. (18.4)



August Ferdinand Möbius (1790–1868) è stato un matematico tedesco. Noto principalmente per la scoperta di una superficie bidimensionale non orientabile, il nastro di Möbius. Contribuì allo sviluppo della geometria proiettiva, dove le trasformazioni di Möbius svolgono un ruolo importante.

18.3 *Differenziabilità complessa e funzioni analitiche*

La derivata è, localmente, la moltiplicazione per il numero complesso $a + ib$ che rappresenta uno stiro-giro, quindi

$$f'(z) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \partial_x(u + iv) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Per Cauchy-Riemann abbiamo anche

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\partial_y(u + iv) = -i\frac{\partial f}{\partial y}$$

In altre parole

$$f'(z) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(z+\delta x) - f(z)}{\delta x} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(z+i\delta y) - f(z)}{i\delta y},$$

il che non è sorprendente, visto che *lo stiro-giro dei vettori infinitesimi in z è lo stesso per tutti*, se la funzione è analitica. Quindi, anche per un arbitrario δz in z, si avrà

$$f'(z) = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z+\delta z) - f(z)}{\delta z}. \tag{18.5}$$

Se il limite (18.5) esiste in un sottoinsieme aperto U del piano complesso, la funzione f è detta *differenziabile in senso complesso* e

Per una funzione complessa $f = u + iv$ in un dominio U, le relazioni tra differenziabilità reale (l'esistenza dei differenziali di u e v,) analiticità, equazioni di Cauchy-Riemann e continuità delle derivate prime di u e v sono espresse dai seguenti teoremi:

(1) Le equazioni di Cauchy-Riemann in U e la continuità delle derivate prime di u e v in U sono condizioni necessarie e sufficienti per l'analiticità di f in U.

(2) Sia f differenziabile reale. Allora f è analitica se e solo se le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte in tutto U.

Mentre (1) è facile da dimostrare, (2) non lo è (teorema di Goursat). Un teorema sorprendente che dimostreremo nel seguito è il seguente:

(3) Se f è analitica, allora ha derivate complesse di ogni ordine (cioè, se f è derivabile una volta lo è infinite volte).

sopra abbiamo dimostrato che dove f è analitica, allora tale limite esiste. Ma si può dimostrare anche il vice-versa:

> Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è detta analitica (o olomorfa) su U se e solo se è differenziabile in senso complesso in *ogni* punto di U. (18.6)

Dalla (18.5) si deducono le regole di calcolo della derivata complessa e le proprietà della derivata, che sono del tutto analoghe a quelle della derivata reale, per esempio,

- la regola di Leibniz $(fg)' = f'g + fg'$ e
- a regola della funzione composta $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{d\mathfrak{z}}\dfrac{d\mathfrak{z}}{dz}$
- regole di calcolo come

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}\,, \quad \frac{d\sin z}{dz} = \cos z\,, \quad \frac{de^z}{dz} = e^z\,, \quad \ldots$$

o la regola di l'Hôpital

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}$$

se $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = 0$ o ∞.

18.4 *Integrazione complessa*

Sull'integrazione complessa in quanto tale c'è poco da dire. Anche se non sembra, è già nota: dato un cammino regolare C nel piano complesso dal punto z_1 al punto z_2, e una funzione complessa $f(z) = u + iv$, l'integrale di linea si f lungo C è

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)(dx+idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx\,. \tag{18.7}$$

La nozione di integrale di una funzione complessa è dunque ricondotta a quella di integrale di linea nel piano, che si assume noto dall'analisi reale. Le nozioni di continuità della curva e di regolarità sono le stesse sia che si guardi il piano come $\mathbb{C}$ sia come $\mathbb{R}^2$.

C'è invece molto da dire sulla (18.7). Innanzi tutto, la riscriviamo in modo che il suo significato geometrico sia manifesto. Si introduca il campo vettoriale

$$\bar{\mathbf{f}} = (u, -v)\,. \tag{18.8}$$

Allora

$$\int_C udx - vdy = \int_C udx + (-v)dy = \int_C \bar{\mathbf{f}}\cdot d\mathbf{r}\,, \quad d\mathbf{r} \equiv \mathbf{t}ds = (dx, dy)$$
$$\int_C udy + vdx = \int_C udy + (-v)(-dx) = \int_C \bar{\mathbf{f}}\cdot \mathbf{n}\,ds\,, \quad \mathbf{n}\,ds = (dy, -dx)$$

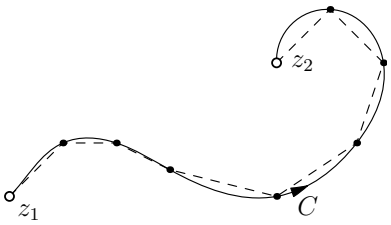


Figura 18.6: Più precisamente, la (18.7) è definita come limite di somme di Riemann:

$$I_N = \sum_i^N f(z_i)\Delta z_i = \mathrm{Re}\, I_N + i\mathrm{Im}\, I_N\,,$$

dove le parti reale e immaginaria di I_N convergono agli integrali di linea reali a secondo membro della (18.7).

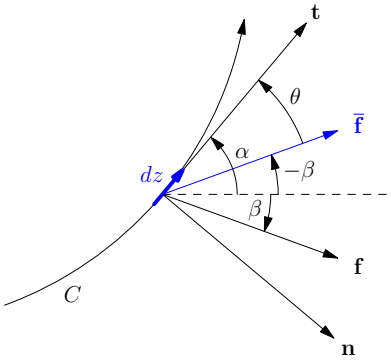


Figura 18.7: Relazioni angolari tra $\bar{\mathbf{f}}$,**f**, **t**, **n** e $d\mathbf{r}$.

In queste formule, $ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy^2)}$ è la lunghezza di un arco di curva infinitesimo; $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ sono rispettivamente il versore tangente e il versore normale alla curva. Riassumendo,

$$\int_C f(z)dz = \int_C \overline{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{r} + i \int_C \overline{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{n}\, ds\,. \tag{18.9}$$

La ragione per cui alla f risulta associato in modo naturale *non* il campo $\mathbf{f} = (u, v)$, ma il campo *coniugato* $\overline{\mathbf{f}} = (u, -v)$ è l'invarianza per rotazioni del prodotto scalare complesso (1.2). Data una funzione $f = u + iv$, la quantità invariante per rotazioni è $f \cdot dz = \overline{f}dz$ e non fdz. Ha quindi significato geometrico invariante

$$f \cdot dz = (u - iv)(dx + idy) = udx + vdy + i(udy - vdx) = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + i\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}ds\,,$$

da cui

$$\int_C \overline{f}dz = \int_C f \cdot dz = \int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + i \int_C \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}ds\,,$$

che è esattamente la (18.9) con f e $\overline{f}$ scambiati di ruolo.

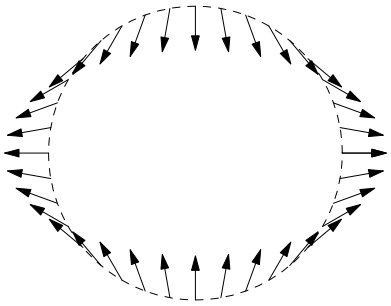


Figura 18.8: Ritratto di fase del campo della funzione $z \mapsto z$, cioè del campo vettoriale $(x, y) \mapsto (x, -y)$, equivalentemente, del campo vettoriale $f(z) = \bar{z}$. Sono stati disegnati solo i vettori del campo per punti sul cerchio unitario.

18.5 *Circuitazione e Flusso*

Consideriamo adesso il caso in cui il cammino d'integrazione sia un circuito, descritto da una curva *regolare* (= la tangente esiste) *semplice* (= non ci sono intersezioni) e *chiusa* C, come in figura 18.10. In particolare, questo significa che la regione di piano $\mathcal{R}$ racchiusa da C è *semplicemente* connessa. Allora

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \overline{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{t}\, ds + i \oint_C \overline{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n}\, ds \tag{18.10}$$

I due integrali a secondo membro della (18.10) sono noti: il primo è la circuitazione di $\overline{\mathbf{f}}$ lungo la curva chiusa C,

$$\Gamma(\overline{\mathbf{f}}, C) \equiv \oint_C \overline{\mathbf{f}} \bullet d\mathbf{r}\,. \tag{18.11}$$

Per il il teorema di Green-Stokes,

$$\Gamma(\overline{\mathbf{f}}, C) = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \times \overline{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{S}\,, \tag{18.12}$$

dove $d\mathbf{S}$ è il vettore "elemento infinitesimo di superficie nel piano che è sempre parallelo alla direzione verticale (immaginando il piano complesso identificato con il piano xy dello spazio tridimensionale), e quindi sempre nella stessa direzione di $\nabla \times \overline{\mathbf{f}}$. Questi due vettori possono avere, al più una discordanza di verso, e quindi

$$\nabla \times \overline{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{S} = \pm|\nabla \times \overline{\mathbf{f}}|dS\,.$$

Il secondo integrale della (18.10) è il flusso di $\overline{\mathbf{f}}$ attraverso la curva chiusa C,

$$\Phi(\overline{\mathbf{f}}, C) \equiv \oint_C \overline{\mathbf{f}} \bullet \mathbf{n}\, ds = \iint_{\mathcal{R}} \nabla \bullet \overline{\mathbf{f}}\, dS\,,$$

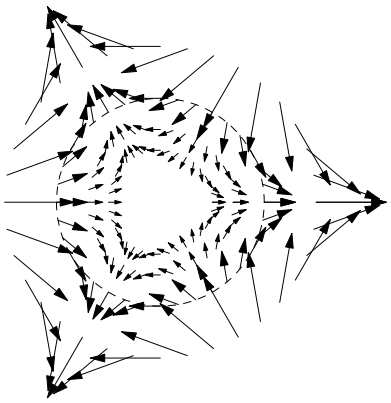


Figura 18.9: Ritratto di fase del campo della funzione $z \mapsto z^2$ cioè del campo $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, -2xy)$ (cfr. sezione 18.1), equivalentemente, del campo vettoriale $f(z) = \overline{z^2}$. Sono stati disegnati i vettori del campo per diverse distanze dall'origine. La proprietà nascosta nelle altre visualizzazioni, ma qui del tutto manifesta, è l'invarianza per rotazioni di $\pi/3$.

dove dS è l'elemento infinitesimo di area (l'analogo in due dimensioni del volume). Per la seconda uguaglianza è stato usato il teorema di Gauss in due dimensioni. (Siamo in due dimensioni e il bordo di una regione è una curva chiusa: si veda la figura 18.14 più avanti, che mostra che si tratta proprio del flusso attraverso la superficie laterale del cilindro con base C, quando si identifica il piano complesso con il piano xy dello spazio tri-dimensionale.) In definitiva,

$$\oint_C f(z)dz = \Gamma(\bar{\mathbf{f}}, C) + i\,\Phi(\bar{\mathbf{f}}, C) \tag{18.13}$$

Siamo così in grado di calcolare integrali di funzione complesse lungo curve chiuse con metodi noti: basta calcolare circuitazione e flusso del loro campo coniugato.

È inteso che nella (18.13) l'orientamento della curva C è positivo. Ricordiamo la convenzione sull'orientamento positivo: si dice che il bordo C di una regione $\mathcal{R}$ è percorso in *senso o verso positivo* se camminando lungo quella direzione, la regione risulta sempre a sinistra. Per un cerchio la direzione positiva risulta essere quella anti-oraria. La normale $\mathbf{n}$ è la *normale diretta verso l'esterno*, e quindi a destra di chi cammina lungo C.

La (18.13) vale anche per il contorno $C = \partial\mathscr{R}$ di una regione molteplicemente connessa $\mathscr{R}$, cioè quando Il contorno (o bordo) della regione è l'unione di più curve semplici, $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$ (figura 18.11). In questo caso, l'orientamento positivo di C è ancora fissato dalla regola ricordata sopra: questo richiede che le curve "interne", come C_2 e C_3 in figura 18.11, siano percorse in senso orario (per avere la regione a sinistra).

È utile rendere manifesta la natura algebrica dei cammini ed esprimere una curva chiusa che delimita una regione molteplicemente connessa come *somma algebrica* delle curve che la delimitano piuttosto che come unione: se la curva semplice C è percorsa in senso antiorario, scriveremo $+C$ o semplicemente C, e se è percorsa in senso orario, scriveremo $-C$. Per esempio, per la curva C (non semplice) che delimita la regione $\mathcal{R}$ in figura 18.11, si ha

$$C = C_1 - C_2 - C_3\,.$$

Per gli integrali vale allora la seguente regola

$$\oint_{a_1C_1+a_2C_2+\dots} = a_1 \oint_{C_1} + a_2 \oint_{C_2} + \dots\,,$$

dove $a_1, a_2, \dots$ possono assumere i valori ± 1.

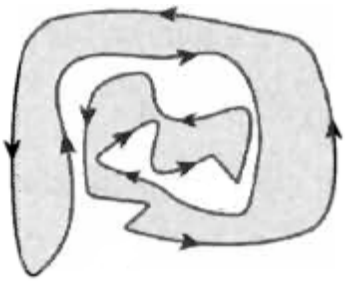


Figura 18.10: Curva regolare semplice che racchiude una regione semplicemente connessa.

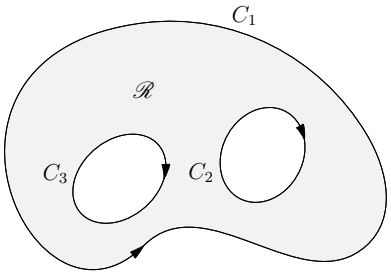


Figura 18.11: Regione molteplicemente connessa con bordo $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. L'orientamento di C è positivo se C_1 è percorso in senso antiorario, e C_2, C_3 in senso orario.

ESEMPIO 18.1. Vediamo la (18.13) in un caso semplice. Calcoliamo

$$\oint_C \bar{z}dz$$

per C curva chiusa attorno all'origine. Il campo coniugato associato a $f(z) = \overline{z}$ è $\overline{\mathbf{f}}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$. La circuitazione è chiaramente zero, ma il flusso è positivo (escono più linee di forza, di quante ne entrino). In effetti, si ha

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= 0 \\ \nabla \bullet \mathbf{r} &= 2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\oint_C \overline{z} dz = 2 \iint_{\mathcal{R}} dS = 2i\mathcal{A}(C)$$

dove $\mathcal{A}(C)$ è l'area della regione di piano racchiusa da C.

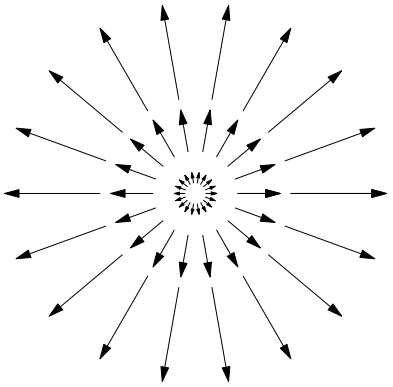


Figura 18.12: Linee di forza del campo vettoriale $z \leftrightarrow \mathbf{r}$ associato alla funzione complessa $z \mapsto \overline{z}$. dal disegno è ovvio che la sua circuitazione è nulla. Il suo flusso attraverso un cerchio di raggio R è pari alla sua divergenza costante, uguale a 2, $\times$ l'area della ragione racchiusa dal cerchio. Quindi FLUSSO $= 2\pi R^2$.

18.6 Significato fisico delle funzioni analitiche

Sorprendetemente, come aveva già intravvisto d'Alembert, si ha: FUNZIONI ANALITICHE = CAMPI SOLENOIDALI E IRROTAZIONALI NEL PIANO, vale a dire:

> Il campo vettoriale coniugato della funzione complessa H è solenoidale (divergenza nulla) e irrotazionale (rotore nullo) se e solo se H è analitica. (18.14)

Questa proposizione è molto importante e la sua verifica è un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} \nabla \times \overline{\mathbf{f}} &= \partial_x(-v) - \partial_y u = -(\partial_x v + \partial_y u) \\ \nabla \bullet \overline{\mathbf{f}} &= \partial_x u + \partial_y(-v) = \partial_x u - \partial_y v \end{aligned}$$

Quindi, divergenza e rotore si annullano se e solo se sono soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann.

Questo significa che possiamo attribuire alle funzioni analitiche un significato fisico diretto e trasferire ad esse le conoscenze fisiche al riguardo.

ELETTROSTATICA. Consideriamo il campo elettrico $\mathbf{E}$ nel piano in condizioni stazionarie, e quindi governato dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 0 \quad \textit{ovunque} \\ \nabla \bullet \mathbf{E} &= 0 \quad \textit{dove non ci sono cariche} \end{aligned}$$

Al campo elettrico $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ è quindi associata la funzione analitica $f(z) = E_x - iE_y$. Per la legge di Gauss si ha

$$\Phi(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, ds = \sum_i q_i$$

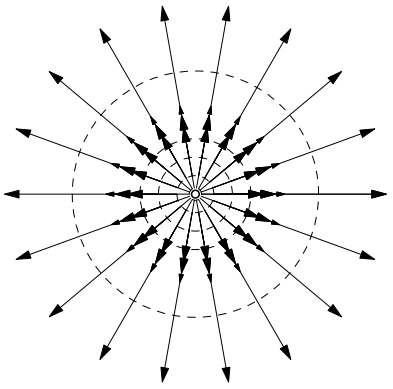


Figura 18.13: Linee di forza del campo elettrico generato da una carica positiva nel piano. L'origine è una SORGENTE.

e il come campo prodotto da una carica puntiforme q posta nell'origine è

$$\frac{q}{r}\mathbf{e}_r = \frac{q}{r}\left(\cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y\right) \tag{18.15}$$

La funzione complessa associata al campo elettrico prodotto da una carica q posta nell'origine è dunque

$$\frac{q}{2\pi r}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = \frac{qe^{i\theta}}{2\pi r} = \frac{q}{2\pi\overline{z}}$$

MAGNETOSTATICA. Equazioni per il campo magnetico in condizioni stazionarie:

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{B} &= 0 \quad \textit{dove non ci sono correnti} \\ \nabla\bullet\mathbf{B} &= 0 \quad \textit{ovunque (non ci sono cariche magnetiche)} \end{aligned}$$

Possiamo procedere come prima, ma adesso i ruoli di circuitazione e flusso si scambiano: abbiamo cariche di "circuitazione", cioè correnti I, e linee di flusso prive di pozzi e sorgenti. Il campo generato da una corrente I lungo un filo infinitamente sottile passante per l'origine e perpendicolare al piano (cfr. figura 18.15 è

$$\frac{I}{r}\left(-\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y\right)$$

per cui la sua funzione complessa (coniugata) associata è

$$-i\frac{I}{z} = I\frac{e^{-i(\theta+\pi/2)}}{r}$$

FLUIDO PERFETTO STAZIONARIO. Equazioni per il campo di velocità del fluido:

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{V} &= 0 \quad \textit{dove non ci sono vortici} \\ \nabla\bullet\mathbf{V} &= 0 \quad \textit{dove non ci sono pozzi o sorgenti} \end{aligned}$$

Per "cariche" (pozzi o sorgenti e vortici) puntiformi, oltre alle linee di flusso già viste per campi elettrici e magnetici, adesso sono anche possibili configurazioni tipo quella in figura 18.16, per cui l'origine è sia una sorgente sia un vortice.

DIPOLI E QUADRUPOLI. Il campo di una sorgente di carica q nel piano posta nel punto P è

$$\frac{q}{2\pi}\frac{1}{\overline{z}-\overline{P}}$$

Un doppietto con sorgente di carica q in A e pozzo di di carica $-q$ in B genera un campo

$$D = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{\overline{z}-\overline{A}} + \frac{-q}{2\pi}\frac{1}{\overline{z}-\overline{B}}$$

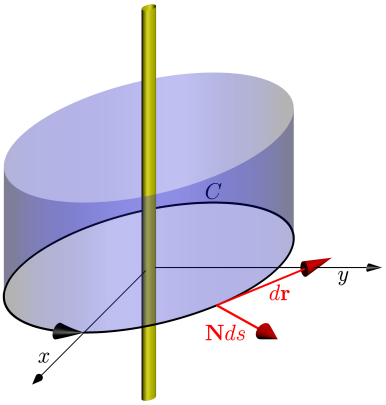


Figura 18.14: Le cariche elettriche nel piano vanno pensate come le sezioni di fili indefiniti, perpendicolari al piano, con densità lineare di carica costante, come mostrato in figura. Il campo elettrico generato da una carica nel piano va dunque come $1/r$ e non come $1/r^2$.

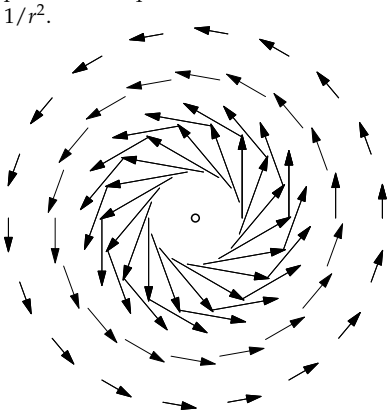


Figura 18.15: Linee di forza del campo magnetico generato da una corrente elettrica che scorre lungo un filo indefinito perpendicolare al piano. L'origine è un VORTICE.

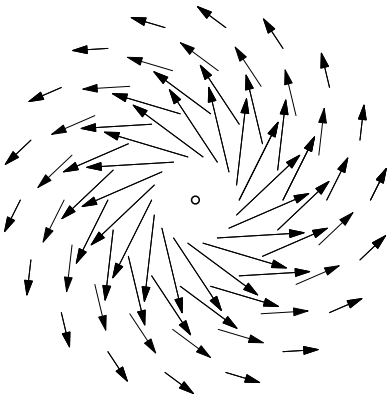


Figura 18.16: Linee di forza di un fluido in moto vorticoso attorno all'origine. L'origine è sia sorgente sia vortice.

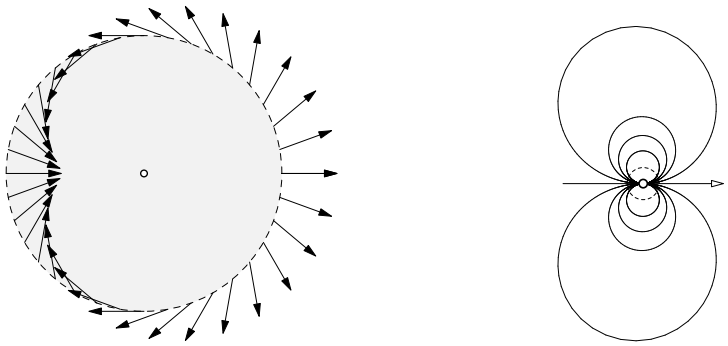
Supponiamo che pozzo e sorgente si avvicinino all'origine muovendosi lungo una linea L che fa un angolo ϕ con l'asse reale. La linea L è chiamata l'*asse di simmetria* del dipolo. Poniamo $A = \epsilon e^{i\phi} = -B$. Allora il campo del doppietto diventa

$$D = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{\overline{z} - \epsilon e^{-i\phi}} + \frac{-q}{2\pi}\frac{1}{\overline{z} + \epsilon e^{-i\phi}} = \left[\frac{2\epsilon q e^{i\phi}}{2\pi}\right]\frac{1}{(\overline{z}^2 - \epsilon^2 e^{-i2\phi})},$$

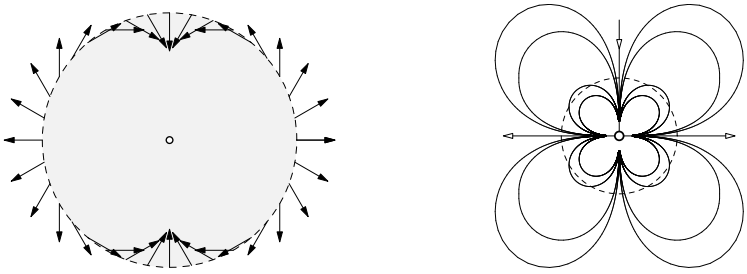
che tende a zero quando $\epsilon \to 0$. Il campo di dipolo corrisponde a tenere costante $q(2\epsilon)$ e quindi ad aumentare q quando la distanza di separazione 2ϵ diminuisce). Nel limite si ottiene

$$D = \frac{|d|e^{-i\phi}}{\overline{z}^2} = \frac{d}{\overline{z}^2}, \quad \text{dove} \quad d = |d|e^{-i\phi}$$

Il numero complesso d è il *momento di dipolo* (un vettore). Sotto sono riportati il s ritratto di fase del dipolo sul disco unitario (tratteggiato) e l'andamento delle sue linee di forza. Il dipolo in figura ha $\phi = 0$, cioè, il vettore associato è diretto nel verso positivo dell'asse reale.



Il gioco può continuare: che cosa accade se fondiamo due dipoli opposti, aumentando la loro intensità in modo che i loro campi non si annichilino? La figura mostra la risposta



Ecco l'algebra che la chiarisce:

$$Q_\epsilon = d\left[\frac{1}{(\overline{z} - \epsilon)^2} - \frac{1}{(\overline{z} + \epsilon)^2}\right] = 4d\epsilon\frac{\overline{z}}{(\overline{z}^2 - \epsilon^2)^2} \xrightarrow{\epsilon \to 0} Q = \frac{p}{\overline{z}^3}, \quad p = 4d\epsilon$$

Questo è un campo di quadrupolo con momento di quadrupolo p. Ne segue che flusso e circolazione di $(1/\overline{z}^3)$ devono annulllarsi,

essendo il campo di due dipoli infinitamente vicini ciascuno dei quali produce zero flusso e zero circolazione ; lo stesso vale per il campo di quadrupolo. Il gioco può ancora continuare: fondendo due quadrupoli si ottiene l'ottupolo $(1/\bar{z}^4)$ e così via.

Dipoli, quadrupoli, ottupoli etc. sono noti come *multipoli* e i loro momenti sono noti come *momenti di multipolo*.

18.7 Teorema e formula di Cauchy

Questo teorema stabilisce quanto segue.

Sia $f(z)$ analitica in una regione $\mathcal{R}$ e sul suo bordo C. Allora

$$\oint_C f(z)dz = 0 \tag{18.16}$$

È il teorema più importante dell'analisi complessa, ma, sorprendentemente, risulta automaticamente dimostrato sulla base di quanto è stato esposto finora. Grazie alla (18.14), e ai teoremi di Gauss e Ampère (e di Green e Stokes) noti dalla fisica e dall'analisi reale, non è richiesto alcun sforzo ulteriore per dimostrarlo.

Una sua conseguenza importante è la formula di Cauchy, che otteniamo con un semplice ragionamento fisico. Consideriamo il campo elettrico generato da una carica q posta nell'origine in presenza di altre cariche nel piano. Allora il il campo elettrico totale è

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r}\mathbf{e}_r + \mathbf{E}_{ext}$$

dove $\mathbf{E}_{ext}$ è il campo generato dalle altre cariche. Detta $g(z)$ la funzione associata a $\mathbf{E}_{ext}$, la funzione complessa associata a $\mathbf{E}$ è

$$\frac{q}{z} + g(z) = \frac{q + zg(z)}{z}$$

Se prendiamo una curva C che racchiude solo l'origine, per la legge di Gauss abbiamo

$$\Phi(\mathbf{E}, C) = \oint_C \mathbf{E} \bullet \mathbf{n}\, ds = 2\pi q$$

In generale

$$\oint_C F(z)dz = \Gamma(\bar{\mathbf{f}}, C) + i\,\Phi(\bar{\mathbf{f}}, C)$$

Quindi per $F(z) = \frac{q}{z} + g(z)$ si ha

$$\oint_C \frac{q + zg(z)}{z} dz = 2\pi i q \tag{18.17}$$

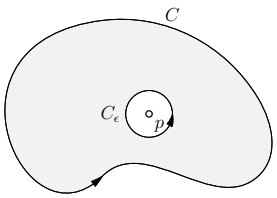
Osserviamo che $g(z)$ è analitica (perché è il campo elettrico generato da cariche fuori da C), ma per il resto è arbitraria. Quindi quello che

Dimostrazione n. 2 della formula di Cauchy. Sia $H(z) = \dfrac{f(z)}{z-p}$, dove $f(z)$ è analitica. Poiché $H(z)$ è analitica eccetto che in p, rotore e divergenza del campo $\overline{\mathbf{H}}$ saranno nulli ovunque eccetto che in p. Perciò se C è un un circuito attorno a p, tutto il flusso e circolazione emanano da un piccolo intorno di p. Se $f(p) = A + iB$, in questo piccolo intorno (piccolo a piacere) avremo

$$\overline{H} = \frac{A - iB}{\overline{z} - \overline{p}} = A\frac{1}{\overline{z} - \overline{p}} - B\frac{i}{\overline{z} - \overline{p}}\,,$$

da cui $\oint_C \dfrac{f(z)}{z-p}dz = \Gamma(\bar{\mathbf{f}}, C) + i\,\Phi(\bar{\mathbf{f}}, C) = -2\pi B + i2\pi A = 2\pi i f(p)$.

Dimostrazione n. 3 della formula di Cauchy. Sia C_ϵ un piccolo cerchio di raggio ϵ che circonda il punto p come nella figura sotto.



Nella regione del piano tra la curva C e la curva Γ la funzione $\dfrac{f(z)}{z-p}$ è analitica. Il bordo di questa regione è $C - C_\epsilon$. Allora, per teorema di Cauchy, si ha

$$\oint_{C-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p} = \oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz + \oint_{-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p}dz = 0$$

Quindi

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p}dz = -\oint_{-C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p}dz = \oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p}dz\,.$$

Ma il cerchio C_ϵ può essere preso con raggio arbitrariamente piccolo. Allora

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{z-p}dz \approx f(p) \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-p}\,,$$

con "$\approx$" che diventa "$=$", nel limite $\epsilon \to 0$. Calcoliamo l'integrale a secondo membro, tenuto conto che $z - p = \epsilon e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z-p} &= \int_0^{2\pi} \frac{d(p + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\left(\epsilon e^{i\theta}\right)}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i\end{aligned}$$

Conclusione (nel limite $\epsilon \to 0$):

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-p} = 2\pi i f(p)\,.$$

abbiamo a numeratore della funzione integranda è una funzione analitica $f(z)$ nella regione racchiusa da C tale che $f(0) = q$, che è la quantità che compare a secondo membro moltiplicata per $2\pi i$. Quindi, facendo astrazione dal significato fisico, quello che abbiamo è

$$\oint_C \frac{f(z)dz}{z} = 2\pi i f(0)$$

Aver posto la carica nell'origine era del tutto arbitrario, se è in un generico punto a, si ottiene

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) \tag{18.18}$$

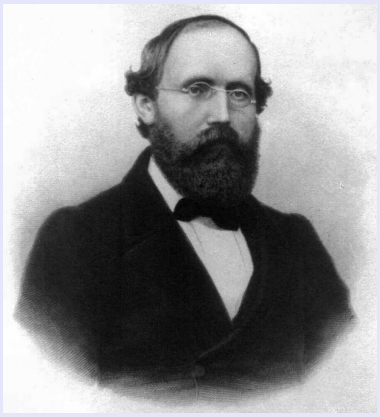
Questa formula è nota come *formula di Cauchy* e vale sotto l'ipotesi che $f(z)$ sia analitica all'interno e lungo una curva semplice chiusa C; a è un punto qualsiasi all'interno di C. Anche questa è una pietra miliare dell'analisi complessa e nel seguito vedremo come molte proprietà delle funzioni analitiche sono conseguenza di questa formula. Il fatto che si è condiderato q reale non è essenziale: la formula vale anche per q complesso (si vedano le altre dimostrazioni a margine.)

18.8 Sfera di Riemann e andamento dei campi all'infinito

Man mano che z si allontana dall'origine (in qualunque direzione) il punto $1/z$ si avvicina sempre più all'origine. È come se z si avvicinasse and un *singolo* punto all'infinito, scritto ∞, la cui immagine rispetto alla funzione $1/z$ è lo zero (l'osservazione sembra banale, ma merita un attimo di riflessione: stiamo dicendo che non c'è un infinito di un tipo quando il movimento di z è lungo l'asse reale, un altro lungo l'asse immaginario e infiniti altri quando si sceglie una qualunque altra direzione, come accade quando si considera lo spazio $\mathbb{R}^2$ e si passa allo spazio proiettivo *reale*). Perciò, per definizione, questo punto ∞ soddisfa le seguenti equazioni

$$\frac{1}{\infty} = 0\,, \qquad \frac{1}{0} = \infty\,. \tag{18.19}$$

L'aggiunta di questo singolo punto all'infinito trasforma il piano complesso nel cosiddetto *piano complesso esteso* $\overline{\mathbb{C}}$. Alcuni vantaggi sono immediati, per esempio, possiamo dire che la funzione $z \mapsto 1/z$ è un'applicazione uno-a-uno del piano complesso esteso su sé stesso. Se una curva passa per $z = 0$, allora (per definizione) la curva immagine rispetto alla trasformazione $z \mapsto 1/z$ passa per il punto all'infinito. Viceversa, se la curva passa per 0, allora la curva originale passa per ∞.



Bernhard Riemann (1826–1866) è stato un matematico tedesco la cui opera ha avuto un'influenza profonda sullo sviluppo della matematica e della fisica. Ha dato contributi duraturi all'analisi e alla geometria. Trasformò la teoria delle superfici di Carl Friedrich Gauss (1777–1855) nella moderna geometria differenziale che è alla base della teoria della relatività generale. Matematico con un profondo senso della fisica, fu il primo a pensare che la gravità avrebbe potuto essere spiegata in termini delle proprietà geometriche dello spazio.

Tutto ciò è molto pulito, ma lascia un po' perplessi. Siamo abituati a pensare il simbolo ∞ associato ad un processo di limite, non come un punto un ben definito. In effetti, le equazioni (18.19) sembrano in conflitto con quanto ci è stato insegnato e con tutte le raccomandazioni su come trattare il simbolo ∞. La risposta bella e profonda di Riemann a queste perplessità fu di interpretare i numeri complessi non come punti sul piano, ma come punti su una sfera Σ, *la sfera di Riemann* appunto. Per vedere come questo sia possibile si posizioni il piano complesso orizzontalmente, diciamo passante per l'equatore della sfera si orienti il piano complesso in modo tale che una rotazione di 90^0 dello spazio ruoti 1 in i. La sfera sia centrata nell'origine e abbia raggio unitario. Dette X, Y, Z le coordinate spaziali e $z = x + iy$ un punto del piano complesso, la corrispondenza tra punti della sfera e punti del piano è data dalla *proiezione stereografica* illustrata nella figura 18.17.

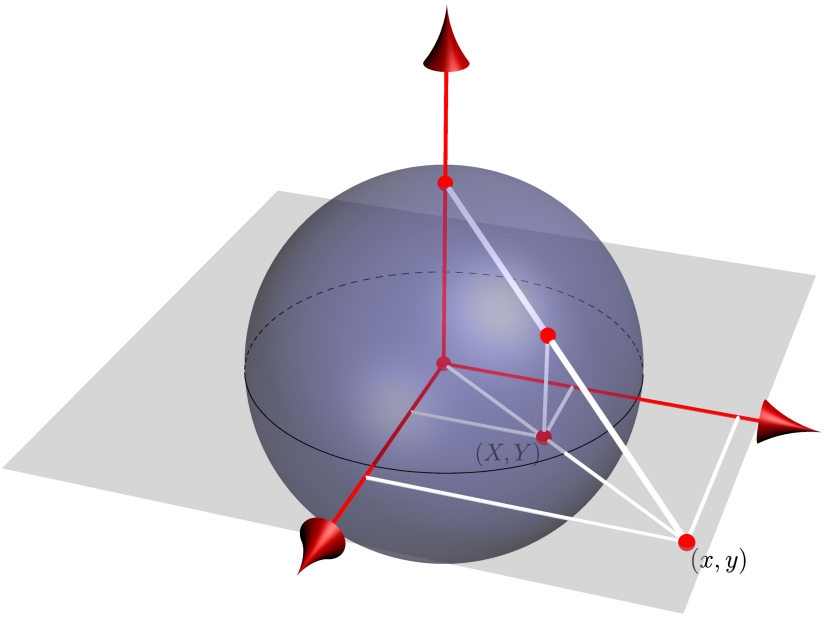


Figura 18.17: Proiezione stereografica: (X, Y, Z), con il vincolo $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, sono le coordinate di un punto sulla sfera unitaria; $z = x + iy$ è un generico punto nel piano complesso. La figura mostra la corrispondenza tra queste coordinate.

Le equazioni di trasformazione possono essere lette dalla figura 18.18, come semplice proporzionalità tra lati di triangoli simili, $1 : 1 - Z = z : X + iY$, da cui

$$z = \frac{X + iY}{1 - Z}\,. \tag{18.20}$$

Usando le coordinate sferiche $X = \sin\theta\cos\phi\,, \quad Y = \sin\theta\sin\phi\,, \quad Z = \cos\theta$, si ottiene (esercizio) $z = e^{i\phi}\cot\frac{\theta}{2}$. Si perviene alla stessa conclusione dopo avere ragionato sui triangoli della figura 18.19 (dopo aver

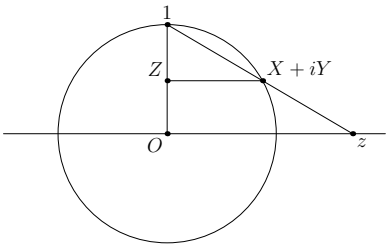


Figura 18.18: Sezione verticale della proiezione sterografica.

mostrato che l'angolo al polo SUD è $\theta/2$). La morale è che in questo modo ∞ è diventato un punto come gli altri: *è il polo* NORD *della sfera*!

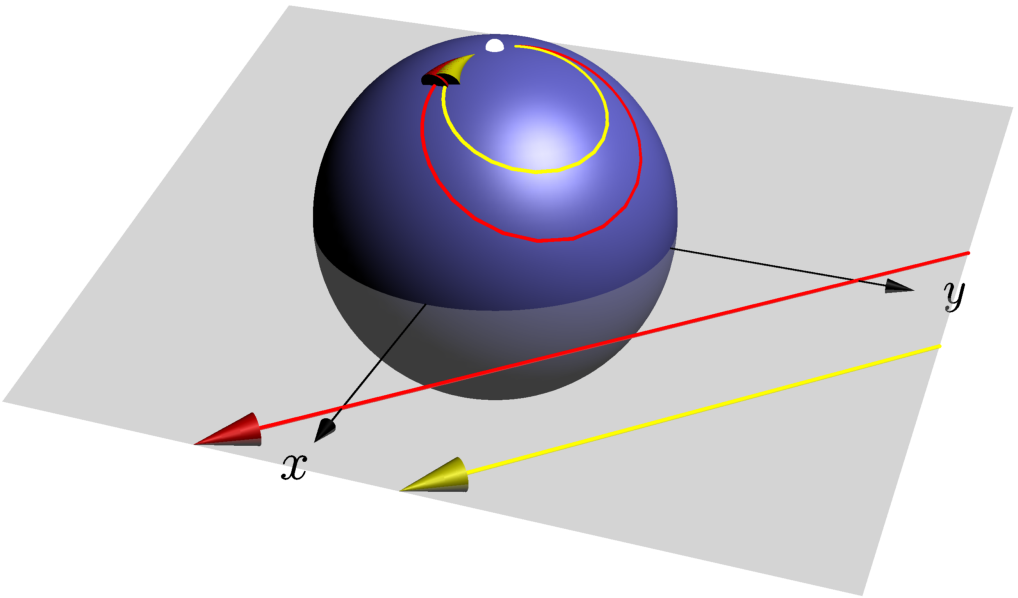
Poiché grazie a Riemann l'infinito è un punto come gli altri, è utile conoscere le proprietà di una funzione nell'intorno di questo punto. Per studiare una funzione nell'intorno di ∞, si considera il cambiamento di variabile $\zeta = \frac{1}{z}$ e si studia la funzione $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ nell'intorno di $\zeta = 0$.

Incominciamo con il campo più noioso che ci sia: il campo costante $\overline{\mathbf{f}} = \overline{a}$ associato funzione complessa $f(z) = a$, dove a è un numero complesso. Se pensiamo ad un fluido e ci mettiamo nell'origine, è come se avessimo un fiume di larghezza infinita con un flusso d'acqua costante che arriva dall'orizzonte nella direzione $-\overline{a}$ per poi andare verso l'orizzonte nella direzione $+\overline{a}$, come se all'infinito ci fosse sia una sorgente sia un pozzo. Similmente, se pensiamo in termini di campo elettrico, è come se avessimo un campo generato all'infinito da una carica le cui linee di forza diventano parallele al finito per poi finire in una carica di segno opposto, anch'essa all'infinito.

Per capire l'andamento all'infinito del campo costante, proiettiamo stereograficamente le linee di flusso del campo sulla sfera di Riemann. Invertendo la (18.20) si ottiene

$$X + iY = \frac{2x + i2y}{1 + x^2 + y^2} \qquad Z = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \tag{18.21}$$

Applicando questa trasformazione a due linee di flusso, si ottengono due cerchi passanti per il polo nord della sfera di Riemann (cioè per il punto all'infinito):



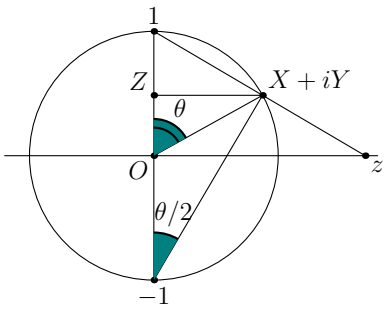
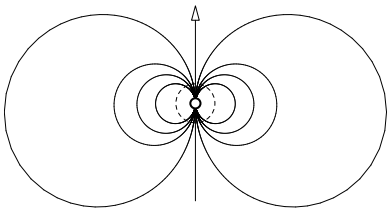


Figura 18.19: Sezione verticale della proiezione stereografica.

(la figura è stata ottenuta con un programmino numerico, ma ci si può convincere di questo studiando come la (18.21) trasforma rette nel piano). Le due rette in figura sono nel I quadrante; passando al quarto, le rette si trasformeranno in cerchi che sono immagine speculare dei primi. In breve, l'andamento del campo all'infinito è quello di un dipolo!



Per una funzione analitica, fatta eventualmente eccezione per $z = \infty$, al di fuori del cerchio C_R di raggio R (orientato positivamente), la natura della singolarità all'infinito è la stessa della natura della singolarità di $f(1/w)$ in $w = 0$. Per capire quale sia questa natura, consideriamo la circuitazione e il flusso all'infinito

$$\oint_{-C_R} f(z)dz = -\oint_{C_R} f(z)dz\,. \tag{18.22}$$

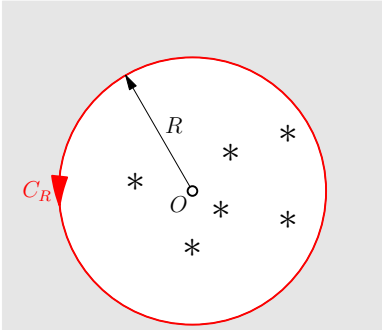


Figura 18.20: Tutte le singolarità sono dentro al cerchio C_R.

Mediante il cambiamento di variabile $w = 1/z$ l'integrale a secondo membro è trasformato nell'integrale di contorno nel piano w,

$$\oint_{C_R} f(z)dz = \oint_{-C_{1/R}} \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw = \oint_{C_{1/R}} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw. \tag{18.23}$$

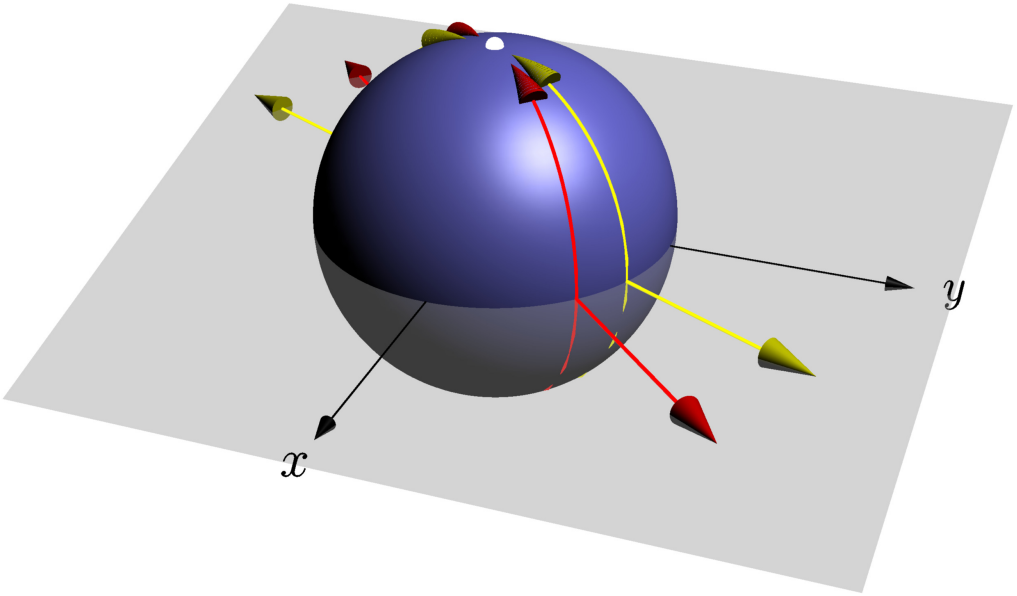
(Si osservi che la prima uguaglianza segue dal fatto che l'immagine del cerchio $|z| = R$ rispetto all'inversione $w = 1/z$, è il cerchio dato da $|w| = 1/R$ percorso nel senso *orario* (e ovviamente da $dz = [-1/w^2]\,dw$).) Questa formula fornisce la funzione

$$g(w) = \frac{-1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) \tag{18.24}$$

da utilizzare per descrivere, in un intorno di $w = 0$, i flussi e le circuitazioni nell'intorno di $z = \infty$. Per f costante e uguale a a, si ha $g(w) = -a/w^2$, e sopra abbiamo visto che il campo associato a questa funzione è proprio quello di un dipolo.

Se adesso consideriamo il campo coulombiano associato alla funzione q/z, cioè il campo di una carica q posta nell'origine e lo proiettiamo stereograficamente sulla sfera, vediamo che linee di forza radiali che emanano dall'origine diventano meridiani che convergono al polo nord, come nella figura sotto.

Nuovamente, questo è ciò che segue dalla (18.24), poiché in questo caso si ha $g(w) = \dfrac{-1}{w^2}\, qw = \dfrac{-q}{w}$. Quindi un campo coulombiano all'infinito è ancora coulombiano, ma con una carica di segno opposto. Questo cambiamento di segno è ciò che garantisce la conservazione del flusso: per una sorgente nell'origine ci deve essere un pozzo all'infinito, che è proprio ciò che mostra la figura sopra. Detto in altri termini, *il campo elettrico associato ad una carica elettrica nell'origine induce una carica immagine all'infinito.*

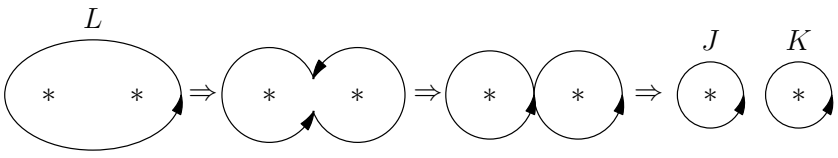


18.9 *Conseguenze del teorema di Cauchy*

TEOREMA DI DEFORMAZIONE Una prima conseguenza del teorema di Cauchy è la seguente: *il valore dell'integrale di contorno*

$$\oint_C f(z)dz$$

non cambia se la curva chiusa C è deformata a piacere, purché la deformazione avvenga passando sempre per punti analitici della funzione $f(z)$. Chiamiamo questo fatto teorema di deformazione (la dimostrazione è ovvia) e illustriamolo con l'esempio mostrato nella figura sotto.



Se $f(z)$ è ovunque analitica eccetto che nei due poli mostrati in figura, allora la deformazione del cammino mostrata in figura è ammissibile e

$$\oint_L f(z)dz = \oint_J f(z)dz + \oint_K f(z)dz$$

La deformazione mostrata nella figura figura 18.21 permette di comprendere perché teorema e formula di Cauchy sono validi anche per

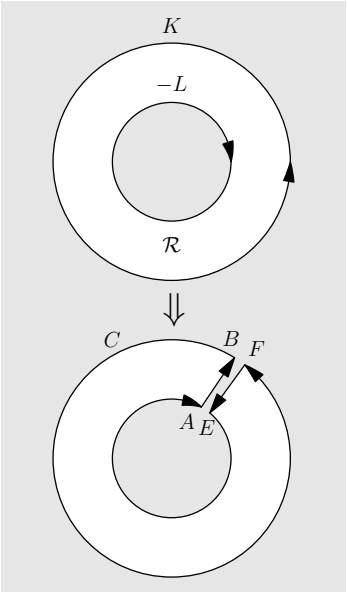


Figura 18.21: In alto la regione molteplicemente connessa $\mathcal{R}$ con bordo $K - L$ che, per deformazione del bordo, è trasformata nella regione in basso delimitata dalla curva semplice C.

regioni molteplicemente connesse. Nel limite in cui i segmenti AB e EF si toccano, gli integrali lungo i segmenti si elidono a vicenda, essendo diretti in senso opposto. Quindi, se la funzione $f(z)$ è analitica in $\mathcal{R}$, si avrà

$$\oint_{K-L} f(z)dz = \oint_C f(z)dz = 0$$

TEOREMA DI INFINITA DERIVABILITÀ Deriviamo la formula di Cauchy, assumendo che la regola di Leibniz (5.55) per la derivazione sotto il segno di integrale si estenda ad integrali di contorno. Allora

$$\frac{d}{da}f(a) = \frac{d}{da}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz\right\} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\partial}{\partial a}\left\{\frac{f(z)}{z-a}\right\}$$

da cui,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}\,. \tag{18.25}$$

Derivando n volte, si ottiene

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\,. \tag{18.26}$$

Questa formula mostra che *se f è analitica, cioè derivabile una volta, lo è anche infinite volte*, un risultato che non ha alcun analogo nell'analisi reale.

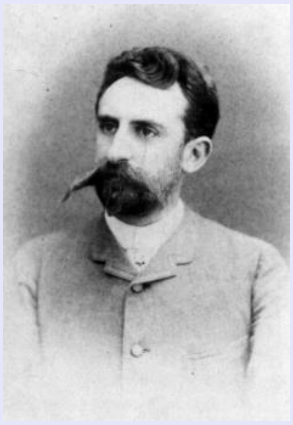
TEOREMA DI MORERA L'inverso del teorema di Cauchy, noto come teorema di Morera, afferma che *se $f(z)$ è continua in una regione semplicemente connessa$\mathcal{R}$ e se*

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

lungo ogni curva semplice chiusa contenuta in $\mathcal{R}$, allora $f(z)$ è analitica in $\mathcal{R}$. In termini di cariche e teorema di Gauss nel piano, questo fatto sembra così ovvio da non richiedere neanche una dimostrazione (che, comunque, è riportata a lato)

TEOREMA DI LIOUVILLE Un polinomio o l'esponenziale, per esempio, sono funzioni ovunque analitiche, ma non all'infinito. Il *teorema di Liouville* afferma che *se $f(z)$ è analitica e limitata in tutto il piano complesso, allora deve essere necessariamente una costante*. Sia infatti il contorno C nella (18.25) un cerchio di raggio R centrato in a e $|f(z)| \leq M$. Allora

$$|f'(a)| \leq \left(\frac{M}{2\pi R^2}\right)(2\pi R) = \frac{M}{R}\,.$$



Giacinto Morera (1856–1909) è stato un matematico e ingegnere italiano noto per il teorema di Morera e il suo lavoro sull'elasticità lineare. Insegnò meccanica razionale all'università di Genova per 15 anni, per poi trasferirsi sulla stessa cattedra al politecnico di Torino.

Dimostrazione del teorema di Morera. Se $\oint_C f(z)dz = 0$ indipendentemente da C, allora ne segue che

$$F(z) = \int_a^z f(z)dz$$

è indipendente dal percorso che unisce a e z, purché tale percorso si trovi tutto dentro la regione $\mathcal{R}$ semplicemente connessa dove vale $\oint_C f(z)dz = 0$. Ma allora

$$F'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)\,.$$

Quindi $F(z)$ è analitica e $F'(z) = f(z)$. Poiché se una funzione è analitica lo sono anche le sue derivate, anche $f(z)$ è analitica, che è quello che si voleva dimostrare. □

Se adesso facciamo tendere $R \to \infty$ (in altre parole, assumiamo che $f(z)$ *sia limitata per tutti i valori di* z ovvero sia analitica anche all'infinito), otteniamo che $f'(a) = 0$, cioè che $f(a)$ è costante.

Dunque, una funzione che è analitica ovunque nel piano complesso, e non è una costante, deve necessariamente avere una singolarità all'infinito. Una funzione di questo tipo è detta *intera*. Sono funzioni intere i polinomi, la funzione esponenziale, le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche. Le intere sono un caso particolare delle meromorfe (a cui è consentito avere poli).

Joseph Liouville (1809–1882) è stato un matematico francese che diede importanti contributi alla teoria dei numeri, all'analisi complessa, alla topologia e alla geometria differenziale. Anche i suoi contributi alla fisica furono ragguardevoli: introdusse la nozione di variabili azione-angolo come descrizione dei sistemi completamente integrabili e dimostrò il teorema (che prende il suo nome) che l'evoluzione temporale di un sistema Hamiltoniano preserva il volume nello spazio delle fasi.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA Sorprendentemente, il teorema di Liouville ha ripercussioni in un settore della matematica apparentemente molto lontano. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{P(z)}$, dove $P(z)$ è un polinomio. Se $P(z)$ non avesse radici, allora $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ sarebbe analitica in tutto il piano complesso. Chiaramente, $f(z)$ è limitata su tutto il piano complesso (il suo modulo tende a zero per z che tende all'infinito). Dunque, per il teorema di Liouville, si avrebbe che $f(z)$, e di conseguenza $P(z)$, dovrebbero essere costanti. Poiché si è raggiunta una contraddizione, ne segue che $P(z)$ deve avere almeno una radice. Ma questo è il teorema fondamentale dell'algebra (1.11)!

TEOREMA DELLA MEDIA DI GAUSS Questo teorema afferma che *se* $f(z)$ *è analitica all'interno e lungo un cerchio* C *di raggio* R *e con centro in* $z = a$*, allora* $f(a)$ *è la media dei valori di* $f(z)$ *su* C. Questo fatto è un'immediata conseguenza della formula di Cauchy. Infatti, se C è un cerchio di raggio R, la sua equazione è $|z - a| = R$, cioè $z = a + Re^{i\theta}$, e

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

diventa

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(a + Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta}} (iRe^{i\theta} d\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + Re^{i\theta}\right) d\theta \tag{18.27}$$

che è quanto si voleva dimostrare. Il teorema vale separatamente per la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$, che sono funzioni armoniche. Si ritrova così, in due dimensioni il teorema della media per funzioni armoniche che vale in un numero qualunque di dimensioni.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) è stato un matematico e scienziato tedesco che ha contribuito in maniera significativa a molti campi quali la teoria dei numeri, la statistica, la geometria differenziale, la geometria, la geodesia, la geofisica, l'elettrostatica, l'astronomia e l'ottica. È stato tra i matematici più influenti di tutti i tempi.

TEOREMI DEL MASSIMO E MINIMO MODULO Strettamente collegato al teorema della media è il seguente fatto: *se* $f(z)$ *è analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa* C*, allora il massimo del modulo di* $f(z)$ *si trova su* C (a meno che f non sia costante e quindi uguale dappertutto). Questo fatto, noto come *teorema (o principio) del massimo*

modulo si dimostra facilmente facendo riferimento alla figura 18.22: supponiamo che il massimo M si raggiunga in un punto a dentro la curva C (l'ovale in grigio nella figura), sia cioè $|f(a)| = M$. Sia C_1 un cerchio con centro in a tutto contenuto in C. Allora, se si esclude che f sia costante dentro C_1, ci sarà un punto b dentro C_1 tale che $|f(b)| < M$. Ma, per continuità, ci sarà un intorno finito di b dentro cui $|f(b)| < M$. Sia tale intorno il cerchio C_2 centrato in b mostrato in figura.
Sia adesso C_3 un cerchio di raggio $|a - b|$ centrato in a; per il teorema della media, la media dei valori del modulo sul cerchio C_3 dovrà essere maggiore o al più uguale al valore M che la funzione assume nel centro ma, nella parte di C_3 fuori da C_2 (in rosso in figura), il modulo può al massimo valere M e nella parte dentro C_2 (in blu) è strettamente minore di M, quindi la media su C_3 sarà strettamente minore di M. Essendo giunti ad una contraddizione, il teorema risulta dimostrato.

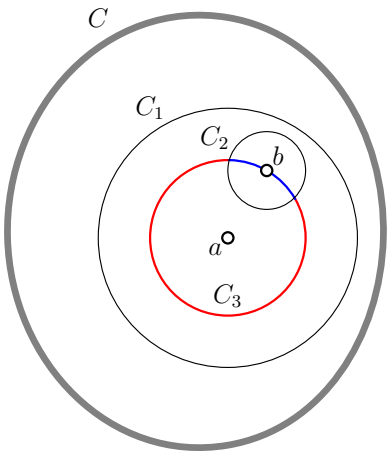


Figura 18.22: Teorema del massimo modulo.

Si osservi che il teorema poteva essere dimostrato separatamente per le parti reale e immaginaria di f: il principio del massimo modulo riguarda le funzioni armoniche. Vale anche un principio di *minimo modulo*: sotto le stesse ipotesii di prima, con la condizione aggiuntiva che $|f(z)| \neq 0$ dentro C, anche il valor minimo di $|f(z)|$ è raggiunto sul bordo C e non dentro a C. Questo teorema si dimostra in modo analogo ragionando sulla funzione $1/f(z)$. Il suo significato fisico è che neanche il minimo della temperatura può essere raggiunto dentro C, ma solo sul bordo.

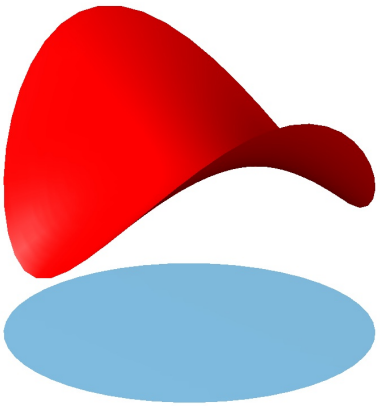


Figura 18.23: Grafico del modulo di $\cos z$ (in rosso) per z nel disco unitario centrato nell'origine (in blu). Come predetto dal teorema del massimo modulo, il massimo del modulo non può essere dentro al disco (cosicché il valore più elevato sulla superficie rossa è da qualche parte lungo il suo bordo). Analogo discorso vale per il suo minimo.

Concludiamo con due teoremi che ci limitiamo ad enunciare.
Teorema dell'argomento: Sia $f(z)$ analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa C, fatta eccezione per un numero finito di poli giacenti dentro C, allora $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P$, dove N e P sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di $f(z)$ dentro C.

Teorema di Rouché: Siano $f(z)$ e $g(z)$ analitiche dentro e lungo una curva semplice chiusa C e sia $|g(z)| < |f(z)|$ lungo tutta C, allora $f(z) + g(z)$ e $f(z)$ hanno dentro C lo stesso numero di zeri.

Problemi

Problema 18.1. □ Per $z \neq 0$, sia $f(z) \equiv f(x+iy) = xy/\bar{z}$.

(a) Mostrare che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.

(b) Avendo stabilito che $f = 0$ su entrambi gli assi, dedurre che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte nell'origine.

(c) Malgrado questo, mostrare che f non è analitica in 0 (lo si mostri in termini di caratterizzazione geometrica: localmente, su vettori infinitesimi nello 0, f non agisce come una stiro-rotazione)

Problema 18.2. □ Mostrare che $f(z) = e^z$ soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann e trovare $(e^z)'$.

Problema 18.3. □ Si consideri l'inversione complessa $I(z) = 1/z$.

(a) Se $z = x + iy$ e $I = u + iv$, esprimere u e v in termini di x e y.

(b) Mostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann sono soddisfatte dappertutto eccetto che nell'origine, cosicché I è analitica ovunque eccetto che nell'origine (è analitica all'infinito?).

(c) Determinare la matrice Jacobiana e, usando coordinate polari, determinare l'effetto geometrico locale di I.

(d) Usare $f'(z) = \partial_x f$ per mostrare che la derivata è $-1/z^2$, come nell'usuale calcolo. Utilizzare questo per confermare il risultato di (c).

Problema 18.4. □ Usando il teorema di Cauchy (e non la formula), dimostrare direttamente che

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i\,,$$

dove C è una qualunque curva chiusa che circonda l'origine.
Aiuto: si proceda come nell'ultima dimostrazione della formula di Cauchy data nella sezione 18.7.

Problema 18.5. □ Dimostrare che

$$\oint_C \frac{dz}{z^2+1} = 0$$

dove C è una qualunque curva chiusa che contenga i punti i e $-i$.
Aiuto: Dopo aver decomposto la funzione integranda in somma di fratti semplici, la si interpreti fisicamente in termini dei campi vettoriali coniugati ad essa associati. Quindi si proceda ad una verifica analitica usando la formula di Cauchy.

Problema 18.6. □ Sia J_R l'arco di raggio R centrato nell'origine e che va dal punto R al punto $-R$. Calcolare al prim'ordine in $1/R$ l'integrale

$$\int_{J_R} \frac{dz}{z^2+1}\,.$$

(N.B. C non è una curva chiusa.)

Problema 18.7. □ Sia L_R il cammino da $-R$ a R sull'asse reale. Calcolare al prim'ordine in $1/R$ l'integrale

$$\int_{L_R} \frac{dz}{z^2+1}\,.$$

Problema 18.8. □ Mostrare che dai due problemi precedenti risulta verificata l'uguaglianza (perlomeno al prim'ordine $1/R$)

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = \pi\,.$$

dove $C_R = J_R + L_R$.

Problema 18.9. □ Si consideri

$$I_n = \oint_C \frac{dz}{z^n}\,,$$

dove C è una qualunque curva chiusa che racchiude l'origine.

(a) Mostrare che per $n \geq 2$ si ha $I_n = 0$.

(b) Fornire una spiegazione fisica dell'annullarsi di I_2, associando a $1/z^2$ il campo di un dipolo (si avvicinino l'una all'altra due cariche di segno opposto tenendo costante il momento di dipolo $p = qd$, dove d è il raggio vettore da una carica all'altra).

(c) Estendere la spiegazione fisica ad ogni $n > 2$.

Morale. Se C è una qualunque curva chiusa che racchiude il punto p (poiché l'origine non è speciale e quel che vale per cammini intorno ad essa vale per cammini intorno a qualunque altro punto), allora

(1) $\oint_C (z-p)^n dz = 0$ per $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

(2) $\oint_C (z-p)^n dz = 2\pi i$ per $n = -1$

(3) $\oint_C (z-p)^n dz = 0$ per $n = -2, -3, -4 \ldots$

Queste equazioni sono tutte conseguenza del teorema di Cauchy: la (1) vale perché per $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$, $(z-p)^n$ è analitica ovunque nella regione delimitata da C; la (2) perché in p c'e una carica unitaria (caso particolare della formula di Cauchy); la (3) perchè la carica totale nell'origine è zero.

PROBLEMA 18.10. □ Sia $\{f_n(z)\}$, n=1,2,3, ..., una successione di funzioni analitiche nella regione $\mathcal{R}$. Si supponga che

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

sia uniformemente convergente in $\mathcal{R}$. Dimostrare che $F(z)$ è analitica in $\mathcal{R}$.

PROBLEMA 18.11. □ Sia $f(z)$ analitica dentro e lungo una curva semplice chiusa C e a dentro C. Dimostrare che

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it}) dt$$

Soluzioni

Problema 18.1. □ Preliminarmente, richiamiamo che i limiti di funzioni complesse si comportano esattamente come i limiti di funzioni reali. In particolare, se $\{z_n\}$ è una successione di punti nel piano complesso che converge al numero complesso a e se

$$\lim_{z_n \to a} f(z_n) = A\,, \quad \lim_{z_n \to a} g(z_n) = B\,,$$

allora

$$\begin{aligned}
&\lim_{z_n \to a} [f(z_n) + g(z_n)] = A + B \\
&\lim_{z_n \to a} [f(z_n) g(z_n)] = AB \\
&\lim_{z_n \to a} [f(z_n)/g(z_n)] = A/B \quad \text{se } B \neq 0
\end{aligned}$$

(a) Oggetto di questo esercizio è la funzione (per $z \neq 0$)

$$f(z) \equiv f(x+iy) = \frac{xy}{\overline{z}}$$

Viene chiesto di mostrare che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine. Si devono quindi determinare i limiti

$$\lim_{z \to s} \frac{xy}{\overline{z}}\,, \quad \lim_{z \to is} \frac{xy}{\overline{z}}$$

dove s è reale e, come di consueto, $z = x + iy$. In primo luogo, riscriviamo la funzione f in notazione complessa,

$$\frac{xy}{\overline{z}} = \frac{1}{4i} \frac{(z+\overline{z})(z-\overline{z})}{\overline{z}} = \frac{1}{4i} \frac{z^2 - \overline{z}^2}{\overline{z}} = \frac{1}{4i} \left[\frac{z^2}{\overline{z}} - \overline{z} \right]$$

Allora

$$\lim_{z \to s} \frac{xy}{\overline{z}} = \lim_{z \to s} \frac{1}{4i} \left[\frac{z^2}{\overline{z}} - \overline{z} \right] = \frac{1}{4i} \left[\lim_{z \to s} \frac{z^2}{\overline{z}} - \lim_{z \to s} \overline{z} \right] = s - s = 0\,.$$

Analogamente si trova

$$\lim_{z \to s} \frac{xy}{\overline{z}} = 0\,.$$

Risulta così verificato che $f(z)$ tende a 0 quando z tende verso qualunque punto dell'asse reale o dell'asse immaginario, inclusa l'origine.

(b) Poiché lungo gli assi $f = u + iv = 0$, sono nulli gli incrementi lungo x e lungo y di u e v a partire dall'origine, e quindi le loro derivate parziali in $z = 0$: le equazioni di Cauchy-Riemann sono banalmente soddisfatte.

(c) Consideriamo l'azione della trasformazione su un vettore δz (infinitesimo) applicato nell'origine, di lunghezza $\delta\rho$ e angolo ϕ. Allora

$$\delta z \mapsto \delta f = f(\delta z) = \frac{1}{4i}\left[\frac{(\delta z)^2}{\overline{\delta z}} - \overline{\delta z}\right] = \frac{1}{4i}\left[\delta\rho e^{i3\phi} - \delta\rho e^{-i\phi}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i2\phi} - e^{-i2\phi}}{2i}\right]\delta\rho e^{i\phi} = \frac{1}{2}\sin(2\phi)\delta\rho e^{i\phi}$$

Questa non è una stiro-rotazione, non tanto per la rotazione, che c'è ed è l'identità, ma per lo stiramento $\frac{1}{2}\sin(2\phi)$, che non è uniforme. Si osservi che per $\phi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, $\delta f = 0$, in accordo con (b).

PROBLEMA **18.2.** □ Banale.

PROBLEMA **18.3.** □ Inversione complessa:

$$I(z = x + iy) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

(a) Allora 2

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}\,, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,.$$

(b) Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned}
\partial_x u &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\partial_y u &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
\partial_x v &= \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
\partial_y v &= \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

Per $(x, y) \neq (0, 0)$, si ha $\partial_x u = \partial_y v$ e $\partial_y u = -\partial_x v$, che sono proprio le equazioni di Cauchy-Riemann. Per $(x, y) = (0, 0)$ le derivate parziali sono discontinue (verificare!): le equazioni di Cauchy-Riemann non valgono.

(c)

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha

$$y^2 - x^2 = \rho^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = -\rho^2\cos(2\theta)\,, \quad 2xy = \rho^2\sin(2\theta)$$

e quindi

$$J = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix} \cos(\pi - 2\theta) & -\sin(\pi - 2\theta) \\ \sin(\pi - 2\theta) & \cos(\pi - 2\theta) \end{pmatrix}$$

che descrive uno stiramento di $1/\rho^2$ e una rotazione dell'angolo $\pi - 2\theta$.

(d)

$$\partial_x f = \partial_x u + i\partial_x v = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\rho^2\left[-\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right]}{\rho^4} = -\frac{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)}{\rho^2},$$

da cui

$$\partial_x f = -\frac{1}{\rho^2}e^{-i2\theta} = -\frac{1}{\rho^2 e^{i2\theta}} = -\frac{1}{z^2}$$

che, naturalmente, coincide, con quanto si ottiene con le regole del calcolo

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}.$$

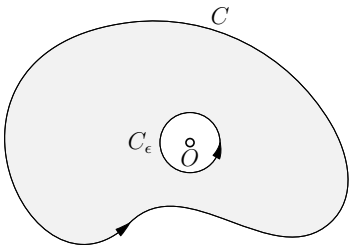


Figura 18.24: C_ϵ è un cerchio di raggio ϵ che circonda un l'origine O.

PROBLEMA **18.4.** □ I passaggi sono gli stessi di quelli per la dimostrazione della formula di Cauchy data a margine nella sezione 18.7.

$$\oint_C \frac{dz}{z} = -\oint_{-C_\epsilon} \frac{dz}{z}dz = \oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z}dz.$$

dove C_ϵ è un cerchio di raggio ϵ centrato in O. Calcoliamo l'integrale a secondo membro, tenuto conto che $z = \epsilon e^{i\theta}$:

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon de^{i\theta}}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Il valore non dipende da ϵ, che possiamo quindi far tendere a 0. Quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

dove C è il bordo di tutta la regione (semplicemente connessa) interna a C; questo era proprio quello che si voleva dimostrare.

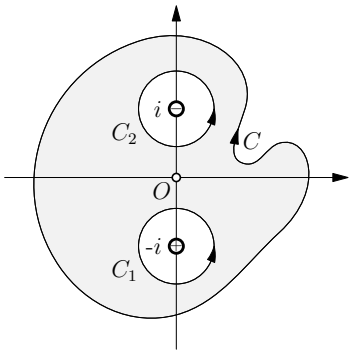


Figura 18.25: $f(z)$ rappresenta il campo generato da due correnti di uguale intensità, ma di segno opposto.

PROBLEMA **18.5.** □ Poichè

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{(-1/2)i}{z-i} + \frac{(1/2)i}{z+i}$$

$f(z)$ rappresenta il campo magnetico generato da due correnti puntiformi in $+i$ e $-i$ di uguale intensità ma di segno opposto. Quindi, per il teorema di Ampère,

$$\oint_C \frac{dz}{1+z^2} = 0$$

per qualunque curva chiusa C che racchiuda le due correnti.

Consideriamo due cerchi di raggio ϵ, C_1 e C_2, centrati rispettivamente in i e $-i$ e applichiamo ad essi la formula di Cauchy (vedere figura 18.25). Incominciamo con C_1.

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = (-1/2)i\oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} + (1/2)i\oint_{C_1} \frac{dz}{z+i}.$$

Poiché $1/(z+i)$ è analitica nella regione delimitata da C_1, il secondo integrale a secondo membro è nullo, per cui, applicando la formula di Cauchy al primo, si ottiene

$$I_{C_1} = \oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = (-1/2)i(2\pi i) + 0 = \pi\,.$$

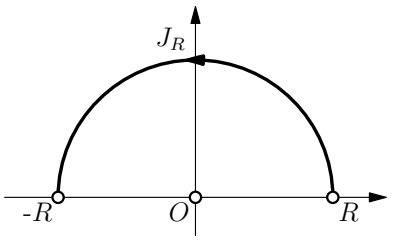
Procedendo in maniera analoga per C_2, si trova

$$I_{C_2} = \oint_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = 0 + (1/2)i(2\pi i) = -\pi\,.$$

Applichiamo adesso il teorema di Cauchy alla curva $C - C_1 - C_2$ (che delimita la regione molteplicemente connessa colorata in grigio nella figura):

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = \pi - \pi = 0\,,$$

che è proprio quello che si voleva dimostrare.



Problema 18.6. □ È chiesto di calcolare

$$I_{J_R} = \int_{J_R} \frac{dz}{z^2+1}\,,$$

dove C à la curva mostrata nella figura a lato. Facendo la sostituzione $z = Re^{i\theta}$, si ottiene

$$I_{J_R} = \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{R^2e^{2i\theta}+1} = \frac{i}{R}\int_0^\pi \frac{e^{i\theta}d\theta}{e^{2i\theta}+1/R^2} \tag{18.28}$$

Al prim'ordine in $1/R$, possiamo trascurare $1/R^2$ a denominatore, per cui

$$I_{J_R} = \frac{i}{R}\int_0^\pi e^{-i\theta}d\theta = \frac{i}{R}\left[\frac{e^{-i\theta}}{-i}\right]_0^\pi + o(1/R) = \frac{2}{R} + o(1/R)$$

Problema 18.7. □ Gli integrali reali sono un caso particolare di integrali di linea complessi.

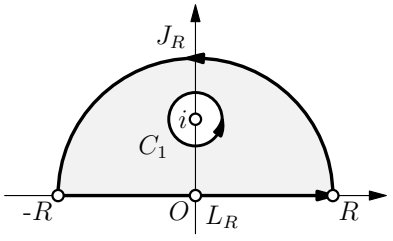
$$I_{L_R} = \int_{L_R} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = 2\arctan(R)$$

Ora,

$$\arctan(R) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{R} + o(1/R)$$

Quindi

$$I_{L_R} = \pi - \frac{2}{R} + o(1/R)$$



Problema 18.8. □

Nella regione racchiusa da $C_R = J_R + L_R - C_1$ (vedere la figura a lato) la funzione $1/(1+z^2)$ è analitica, quindi, per il teorema di Cauchy (vedere 18.5)

$$\oint_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} = (-1/2)i\oint_{C_1} \frac{dz}{z-i} = \pi$$

D'altro canto, da 18.6 e 18.7 si ha

$$I_{J_R} + I_{L_R} = \frac{2}{R} + o(1/R) + \pi - \frac{2}{R} + o(1/R) = \pi + o(1/R)$$

Quindi il teorema di Cauchy risulta verificato all'ordine $1/R$. Dal calcolo esatto dell'integrale (18.28) (un po' laborioso, ma utile esercizio) risulta in effetti che

$$I_{J_R} + I_{L_R} = \pi$$

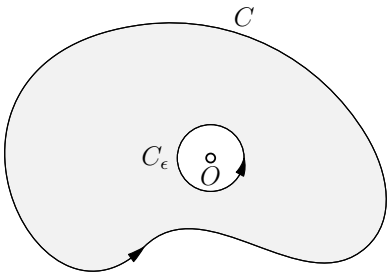


Figura 18.26: C_ϵ è un cerchio di raggio ϵ che circonda un l'origine O.

PROBLEMA **18.9.** □

(a) I passaggi sono esattamente gli stessi di quelli per la formula di Cauchy data nella sezione 18.7.

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} + \oint_{-C_\epsilon} \frac{dz}{z^n} dz = 0\,.$$

dove C_ϵ è un cerchio di raggio ϵ centrato in O. Calcoliamo il secondo integrale, tenuto conto che $z = \epsilon e^{i\theta}$:

$$\oint_{C_\epsilon} \frac{dz}{z^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = i\epsilon^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta} d\theta = \frac{e^{i(1-n)2\pi} - 1}{\epsilon^{n-1}(1-n)} = 0\,, \quad \text{per } n \neq 1$$

in quanto $e^{i\theta}$ è periodica di periodo 2π (per $n = 1$, l'integrale vale chiaramente$2\pi i$, come peraltro già calcolato nel problema 18.4). Analogo risultato per $n = -1, -2, , \ldots$. Quindi

$$\oint_C \frac{dz}{z^n} = 2\pi i\,, \quad n \neq 1$$

dove C è il bordo di tutta la regione (semplicemente connessa) interna a C, che era proprio quello che si voleva dimostrare.

(b) Il campo

$$\frac{-q}{z+d} + \frac{q}{z-d} = \frac{2qd}{z^2 - d^2}$$

è quello generato da due cariche q di segno opposto poste in $+d$ e $-d$ sull'asse reale. Facendo tendere d a zero e tendendo costante $2qd \equiv p$ si ottiene il campo

$$\frac{p}{z^2}$$

di un dipolo ideale. Scegliendo per p un numero complesso si ottiene un dipolo avente p come asse.

Fondendo due dipoli di momento opposto e centrati in $\pm\epsilon$,

$$\frac{p}{(z-\epsilon)^2} - \frac{p}{(z+\epsilon)^2} = p\frac{z^2 + 2z\epsilon + \epsilon^2 - z^2 + 2z\epsilon - \epsilon^2}{(z^2 - \epsilon^2)^2} = \frac{4p\epsilon z}{(z^2 - \epsilon^2)^2}\,.$$

Passando al limite $\epsilon \to 0$, tendendo $Q = 4p\epsilon$ costante, si ottiene il campo di quadrupolo

$$\frac{Q}{z^3}$$

e così via.

PROBLEMA **18.10.** □ Consideriamo $\oint_C F(z)dz$ per una qualunque curva semplice chiusa contenuta in $\mathcal{R}$. Poichè la serie che definisce $F(z)$ è uniformemente convergente possiamo scambiare la somma con l'integrale:

$$\oint_C F(z)dz = \oint_C \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z)dz = 0$$

perché le funzioni f_n sono analitiche. Per il teorema di Morera, concludiamo che $F(z)$ è analitica, che è quanto si voleva dimostrare.

PROBLEMA **18.11.** □ Dalla (18.26) si ha

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}}\,.$$

Mediante cambiamento di variabili $z - a = e^{it}$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nit} f(a + e^{it})dt$$

che è quanto si voleva dimostrare.

19
Teorema dei residui e calcolo di integrali

Indice

19.1 ***Antiderivata di una funzione analitica*** 427

19.2 ***Il teorema dei residui*** 430

19.3 ***Residui e singolarità di una funzione*** 432

19.4 ***Calcolo di integrali con il metodo dei residui I*** 434

19.5 ***Calcolo di integrali con il metodo dei residui II*** 440

19.6 ***Estensione del teorema e della formula di Cauchy*** 445

TAVOLA RIASSUNTIVA DELLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE 450

PROBLEMI 451

SOLUZIONI 453

19.1 Antiderivata di una funzione analitica

Sia $f(z)$ una funzione analitica in una regione semplicemente connessa $\mathcal{R}$. Si vuole calcolare l'integrale $I = \int_C f(z)dz$ dal punto A al punto B, lungo la curva C, come mostrato in figura 19.1. Poiché la funzione è analitica, per il teorema di Cauchy si ha $\oint_L f(z)dz = 0$, dove L è il circuito $L = C' - C$ e C' è un altro cammino da A a B. Ne segue che

$$I = \int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz$$

e quindi che l'integrale da A a B non dipende dal cammino. Scriveremo dunque

$$I = \int_A^B f(z)dz$$

omettendo il riferimento alla curva C.

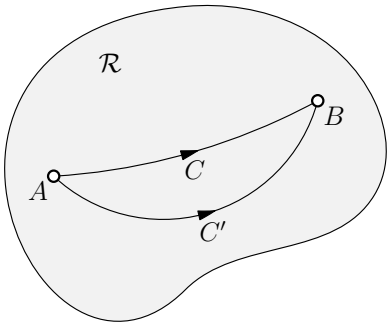


Figura 19.1: L'integrale di linea da A a B di una funzione analitica non dipende dal cammino.

Se l'integrale di linea non dipende dal cammino tra A e B, deve esistere una funzione $V = V(z)$ tale che

$$\int_A^B f(z)dz = V(B) - V(A)$$

La funzione V è chiamata *anti-derivata* o *primitiva* in matematica e *potenziale* in fisica (a meno di un segno irrilevante in questa sede); in entrambi i casi, è data a meno di una costante additiva.

Come di consueto, il potenziale $V(z)$ è costruito scegliendo arbitrariamente un punto P e il valore $V(P)$ (la "terra"), quindi V è definito in ogni punto Z di $\mathcal{R}$ nel seguente modo:

$$V(Z) = V(P) + \int_C f(z)dz\,,$$

dove C è un qualunque cammino da P a Z. Si verifica facilmente che V è una funzione analitica, che vale il *teorema fondamentale del calcolo* $V'(z) = f(z)$ (la convenzione usata in fisica è che la derivata del potenziale cambiata di segno sia pari al campo) e che

$$\int_A^B f(z)dz = (V(P) - V(A)) + (V(B) - V(P)) = V(B) - V(A)$$

Per l'antiderivata possiamo usare il simbolo di integrale indefinito, e scrivere

$$V(z) = \int f(z)dz$$

Dovrebbe essere abbastanza chiaro che le regole note dall'analisi reale si estendono pari pari all'integrale delle funzioni analitiche, ad esempio (a meno di una costante additiva),

$$\int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1}\ (n \neq -1)\,,\ \int \cos z\, dz = \sin z\,,\ \int e^z dz = e^z\,,\ \int \frac{dz}{z} = \ln z\,,\ldots$$

Si osservi che vale la seguente disuguaglianza

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq [\text{ valore massimo di } |f(z)| \text{ lungo } C] \times [\text{ lunghezza di } C]\ . \tag{19.1}$$

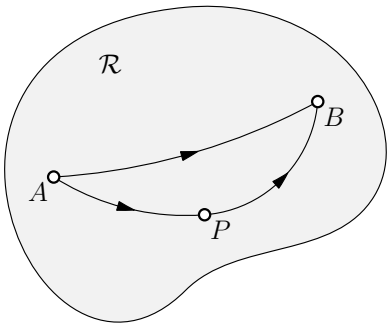


Figura 19.2: L'antiderivata è definita a meno di una costante arbitraria, ad esempio il suo valore in un punto arbitrario P.

Esempio 19.1. Si vuole calcolare $\int_A^B \frac{dz}{z^2}$.

Se A e B sono in una regione semplicemente connessa $\mathcal{R}$ che non include l'origine, la risposta è immediata: in $\mathcal{R}$ la funzione integranda è analitica, la primitiva è $-1/z$ e quindi

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

Ci si rende facilmente conto che la restrizione a $\mathcal{R}$ come in figura 19.3 non è necessaria: possiamo farci passare l'ansia della singolarità

$z = 0$ perché, essendo la primitiva $-1/z$ una funzione ad un solo valore, *tutti i cammini nel piano complesso da A a B danno lo stesso valore per l'integrale* (ovviamente vanno esclusi i cammini che passano attraverso $z = 0$). Dunque

$$\int_A^B \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{A} - \frac{1}{B}$$

è un'identità del tutto generale. In particolare,

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

qualunque sia il circuito C (sia che la singolarità $z = 0$ sia dentro il circuito o fuori).

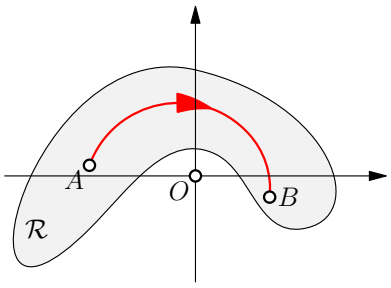


Figura 19.3: Il cammino da A a B è in una regione che non include lo zero.

Si giunge alle stesse conclusioni dell'esempio sopra per

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0\,, \quad n \geq 2\,.$$

Per la funzione $1/(z-a)$ il discorso è diverso. Applicando la formula di Cauchy alla funzione $f(z) = 1$, si ottiene

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{z-a}dz \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i \quad \text{se } a \text{ è dentro } C$$

alla funzione $f(z) = 1$. Passiamo adesso a due esempi un po' più complicati.

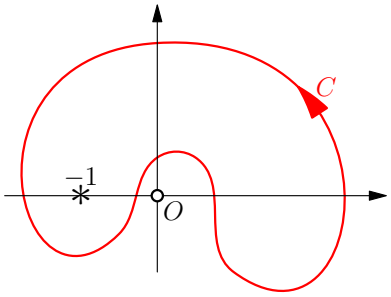


Figura 19.4: In -1 la funzione è singolare (ha un polo, come vedremo tra poco).

ESEMPIO 19.2. Si vuole calcolare per

$$I = \oint_C f(z)dz \quad \text{per} \quad f(z) = \frac{z^5}{(z+1)^2}$$

dove C è la curva mostrata in figura 19.4. Scrivendo il numeratore come $[(z+1)-1]^5$, otteniamo

$$f(z) = (z+1)^3 - 5(z+1)^2 + 10(z+1) - 10 + 5\left[\frac{1}{z+1}\right] - \frac{1}{(z+1)^2}$$

Sulla base di quanto abbiamo discusso sopra (tutte le potenze positive e negative eccetto la potenza -1 danno contributo nullo all'integrale), e poiché la curva racchiude il punto $a = -1$, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa $5/(z+1) = 5/[z-(-1)]$. Si ottiene

$$\oint_C f(z)dz = 5\oint_C \frac{dz}{z+1} = 5 \times 2\pi i = 10\pi i$$

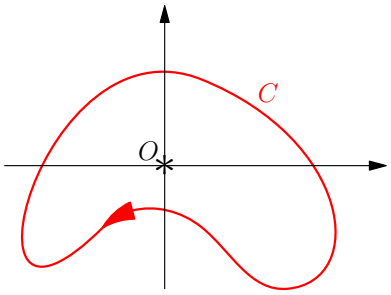


Figura 19.5: Il cammino C racchiude l'origine, dove la funzione integranda è singolare (ha un polo).

ESEMPIO 19.3. Si vuole calcolare

$$I = \oint_C f(z)dz \quad \text{per} \quad f(z) = \frac{\sin z}{z^6}$$

e dove C è la curva mostrata in figura 19.5. Ricordiamo lo sviluppo in serie del seno:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + \ldots$$

Allora

$$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!}\left[\frac{1}{z}\right] - \frac{1}{7!}z + \frac{1}{9!}z^3 - \dots .$$

Per le stesse ragioni di prima, essendo il punto $a = 0$ dentro la curva, l'unico contributo proviene dall'inversione complessa:

$$\oint_C f(z)dz = \frac{1}{5!}\oint_C \frac{dz}{z} = -\frac{2\pi i}{5!}$$

Il segno negativo è dovuto al fatto che la curva è percorsa in senso negativo (orario).

19.2 Il teorema dei residui

In questa sezione traiamo la morale generale degli ultimi due esempi. Incominciamo con alcune definizioni.

Una singolarità a di una funzione è detta isolata se esiste un intorno finito di a in cui non ci sono altre singolarità della funzione. Se a è una singolarità isolata di $f(z)$ ed è uno zero di $1/f(z)$, allora è chiamata *polo*. Dunque, se a è un polo, il comportamento locale di f vicino ad a è dato da

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

dove $g(z)$ è analitica e non nulla in a. Il numero m è la molteplicità algebrica o *ordine* del polo. Un polo è detto semplice *semplice*, *doppio*, *triplo*, etc., a seconda che sia $m = 1, 2, 3$ etc..

In una delle prossime lezioni dimostreremo che *se una funzione è analitica in a, allora esiste il suo sviluppo di Taylor in $z = a$.* Allora $g(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor in $z = a$,

$$g(z) = d_0 + d_1(z-a) + \ldots + d_m(z-a)^m + d_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots , \quad d_0 \neq 0 ,$$

dunque $f(z)$ è della forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n . \quad (19.2)$$

$c_{-m} \equiv d_0$, $c_{-2} \equiv d_{m-2}$, $c_{-1} \equiv d_{m-1}$
$c_n \equiv d_{m+n}$

Allora, per quanto visto nella sezione precedente,

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i c_{-1} \quad (19.3)$$

per ogni curva semplice chiusa C percorsa in senso positivo, che racchiude il punto a, e al cui interno $f(z)$ è analitica (fatta eccezione, ovviamente, per il punto a). Poiché c_{-1} è la sola parte della funzione che rimane dopo che integriamo, è chiamato il *residuo* della funzione

nella singolarità $z = a$ ed è denotato $\mathsf{Res}\{f, a\}$. Quanto abbiamo appena dimostrato è detto *teorema dei residui*.

Nell'interpretazione fisica del capitolo precedente, il residuo è una *carica*: la sua parte reale è la sorgente (o pozzo) del campo $\bar{\mathbf{f}}$ e la sua parte immaginaria è la corrente (o vortice).

Teorema dei residui. Sia a un polo di ordine m della funzione $f(z)$ e C una curva semplice chiusa che racchiude a, percorsa nel verso positivo e tale che $f(z)$ è analitica al suo interno (fatta eccezione per il punto a). Allora

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathsf{Res}\{f, a\}\,. \tag{19.4}$$

Il trucco per estrarre il residuo da una funzione della forma (19.2), è lo stesso che abbiamo usato per ottenere la (17.41). Se si moltiplica per $(z-a)^m$ ambo i membri di (19.2), allora, essendo $\mathsf{Res}\{f, a\} = c_{-1}$ il coefficiente di $(z-a)^{m-1}$, si ha

$$\mathsf{Res}\{f, a\} = c_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-a)^m f(z)\right\}. \tag{19.5}$$

Qualche regola per calcolare i residui

(1) Se $f(z)$ è della forma $f(z) = Q(z)/P(z)$ in $z = a$ con $Q(a) \neq 0$ e $P'(a) \neq 0$, allora $z = a$ è un polo semplice e

$$\mathsf{Res}\{f, a\} = \lim_{z\to a} Q(z)\frac{z-a}{P(z)} = \frac{Q(a)}{P'(a)}$$

Avendo applicato la regola dell'Hospital. Situazioni analoghe, ma più complicate, si trattano applicando la regola dell'Hospital più volte.

(2) *Regola per trovare l'ordine di un polo.* Se a è un polo di ordine m, allora

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = b_m \quad \text{dove} \quad b_m \neq 0\,,$$

ma la difficoltà è trovare m per una data f e un dato punto a. Possiamo allora procedere per tentativi ed errori: Scegliamo noi k, per esempio $k = 1$, e consideriamo il limite $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$. Se a è un polo, ci sono tre possibilità

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \begin{cases} c \neq 0 & \Rightarrow \quad m = k \quad \Rightarrow \quad b_m = c \\ 0 & \Rightarrow \quad m < k \\ \infty & \Rightarrow \quad m > k \end{cases}$$

A meno che non sia chiaro che $m > 1$, conviene applicare la regola partendo da $k = 1$.

(3) Il residuo di una funzione in un punto a (singolarità isolata) è il coefficiente c_{-1} del suo sviluppo[1]

[1] Detto di Laurent, che in una lezione successiva dimostreremo essere unico.

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \ldots \tag{19.6}$$

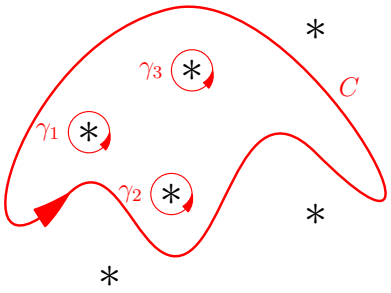
Talvolta è facile determinare questa serie sia a partire da serie già note (Es. $e^{1/z}$) sia facendo delle sostituzioni.

(4) Se a è una singolarità isolata e γ è un piccolo cerchio attorno a a che non contiene alcun punto singolare della funzione, allora, *per definizione*,

$$\mathsf{Res}\{f, a\} = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz$$

Si ponga $z = a + \epsilon e^{i\theta}$ e si faccia tendere ϵ a *zero*. A volte questo è un metodo efficiente per calcolare il residuo. Si tenga sempre presente che il gioco è sempre quello del teorema di Cauchy, per cui

$$\oint_C = \sum \oint_{\gamma_i} = 2\pi i \sum \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_i} \right) = 2\pi i \sum \mathsf{Res}\{f, a_i\} = \sum 2\pi i c_{-1}^{(i)}$$



19.3 *Residui e singolarità di una funzione*

In questa sezione discutiamo alcune nozioni rilevanti per l'applicazione del teorema dei residui.

FUNZIONI MEROMORFE Una funzione è detta meromorfa in una regione $\mathcal{R}$, se le sue singolarità sono solo dei poli e se, fatta eccezione per i poli, la funzione è analitica nella regione. Vediamone alcuni esempi. Tutte le funzioni razionali, come

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z + 10}{z^5 + 3z - 1}$$

sono meromorfe sull'intero piano complesso $\mathbb{C}$. Lo stesso vale per le funzioni

$$f(z) = \frac{e^z}{z} \quad \text{e} \quad f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^2}.$$

Anche la funzione Gamma $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ (estesa per continuazione analitica[2] a tutto $\mathbb{C}$) è meromorfa sull'intero piano complesso $\mathbb{C}$. E così è la funzione zeta di Riemann, ottenuta per continuamento analitico della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

La funzione $f(z) = e^{1/z}$ non ha un polo in $z = 0$, ma una singolarità essenziale (vedi sotto). È meromorfa (persino analitica) in $\mathbb{C} - 0$. La

[2] In una lezione successiva chiariremo che cosa sia la "continuazione analitica".

funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

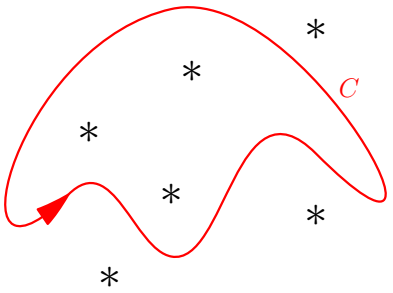
non è meromorfa sull'intero piano complesso $\mathbb{C}$, poiché $z = 0$ è un punto di accumulazione di poli.

Dalla (19.4) segue immediatamente la regola di calcolo per l'integrale di una funzione meromorfa lungo un cammino chiuso:

Sia $f(z)$ meromorfa e la curva C (semplice chiusa) orientata positivamente. Allora

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\{f, a_i\} \tag{19.7}$$

dove la somma a secondo membro è estesa solo ai poli a_i dentro C, come mostrato nella figura a lato.



SINGOLARITÀ ESSENZIALI In aggiunta ai poli, una funzione altrimenti analitica, può avere quelle che sono chiamate *singolarità essenziali*. In prossimità di una singolarità essenziale a il comportamento di f è abbastanza selvaggio e strano: infatti, se f fosse limitata, a non sarebbe una singolarità, e se f andasse all'infinito man mano che ci si avvicina da qualunque direzione, a sarebbe un polo.

Consideriamo l'esempio standard $g(z) = e^{1/z}$, che chiaramente ha una singolarità di qualche tipo nell'origine. Se scriviamo $z = re^{i\theta}$, allora

$$|g(z)| = e^{\frac{\cos\theta}{r}}$$

La figura 19.6 ne mostra la superficie modulare Se z si avvicina a 0 lungo l'asse immaginario, allora $g(z)$ tende a 1. Ma se l'avvicinamento avviene lungo un cammino a sinistra dell'asse immaginario, dove $\cos\theta < 0$, allora $g(z)$ tende a 0. Infine, se z si avvicina lungo un cammino a destra dell'asse immaginario, $g(z)$ tende all'infinito. In effetti, in quest'ultimo caso, non solo $f(z)$ tende all'infinito, ma la velocità con cui ci va è al di là della comprensione di qualunque polo.

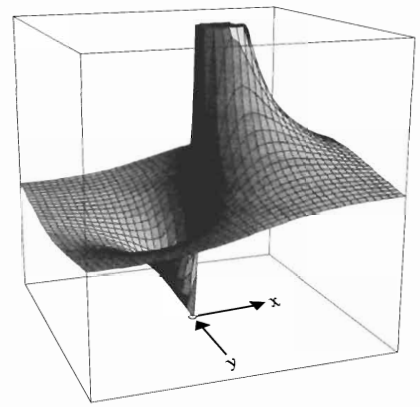


Figura 19.6: Superficie modulare di $g(z) = e^{1/z}$

Se a è una singolarità essenziale, non esiste alcun m tale la moltiplicazione per $(z-a)^m$ possa annullare l'esplosione della funzione in a. In particolare, per mostrare che questo è vero per $g(z)$, basta ricordare dall'analisi reale che

$$\lim_{x\to 0} x^m e^{1/x} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y^m} = \infty$$

qualunque sia il valore di m.

Se a è una singolarità essenziale NON significa che

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\{f, a\}$$

cessa di valere, ma che non abbiamo più una formula semplice per calcolare il residuo in a. Se a è una singolarità essenziale, a volte il

residuo può essere calcolato usando sviluppi in serie già noti. Ad esempio, possiamo ottenere lo sviluppo in serie di $g(z) = e^{1/z}$ a partire da quello di e^u per $u = 1/z$, vale a dire, sviluppiamo in serie $g(z)$ nel punto all'infinito (poiché lo sviluppo in serie di e^u ha raggio infinito, lo stesso varrà per lo sviluppo di $g(z)$),

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Essendo il residuo il coefficiente dell'inversione complessa, si ha immediatamente

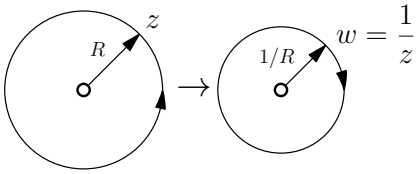
$$\mathrm{Res}(e^{1/z}, 0) = 1$$

RESIDUO ALL'INFINITO Sia $f(z)$ una funzione che è analitica, fatta eventualmente eccezione per $z = \infty$, al di fuori del cerchio C_R di raggio R orientato positivamente (si veda la figura 18.20). Il residuo all'infinito è così definito

$$\mathsf{Res}\{f, \infty\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-C_R} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(z)dz \tag{19.8}$$

Si osservi che questa definizione è coerente con l'usuale nozione di residuo in un punto che è rispetto ad un circuito attorno al punto percorso in senso antiorario: $-C_R$ è *antiorario* attorno all'infinito poiché C_R è *antiorario* attorno all'origine. Allora dalla (18.23) si ottiene

$$\mathsf{Res}\{f, \infty\} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{1/R}} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) dw \tag{19.9}$$



Dunque, la formula per la circuitazione complessa lungo C_R è

$$\oint_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\, \mathsf{Res}\left\{\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right\} \tag{19.10}$$

Si osservi che mentre una funzione analitica in un punto nel piano complesso finito ha un residuo zero in quel punto, una funzione che non è singolare all'infinito, può avere in esso un residuo non nullo. Per esempio, $1/z$ è analitica all'infinito ma ha un residuo pari a -1, in accordo con quanto visto nella sezione 18.8: *il campo eletrico associato ad una carica nell'origine induce una carica immagine all'infinito*.

19.4 Calcolo di integrali con il metodo dei residui I

Consideriamo

$$I = \oint_{L_R + C_R^+} \frac{dz}{1+z^2}\,, \tag{19.11}$$

dove $L_R + C_R^+$ è il cammino mostrato in figura 19.7. Poiché

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{(-1/2)i}{z-i} + \frac{(1/2)i}{z+i}$$

la funzione ha un polo in i e uno in $-i$. Dal secondo membro, si vede che il residuo in i è $(-1/2)i$, quindi, per il teorema dei residui

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}\left\{\frac{dz}{1+z^2}, i\right\} = 2\pi i(-1/2)i = \pi\,.$$

(confermando così il risultato del problema 18.8).

L'osservazione semplice ma cruciale è che possiamo usare il teorema dei residui per calcolare integrali reali. Nel caso in esame, possiamo calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\,. \tag{19.12}$$

Infatti, per $R \to \infty$, $\int_{C_R^+} \frac{dz}{1+z^2} \to 0$ e il primo membro della (19.11) diventa l'integrale reale (19.12) . Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \mathrm{Res}\left\{\frac{1}{1+z^2}, i\right\} = 2\pi i \times [(-1/2)i] = \pi$$

Si osservi che avremmo potuto procedere in modo analogo considerando il cammino in figura 19.8. Il cammino è adesso orario, il che comporta un cambiamento di segno a primo membro,

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \mathrm{Res}\left\{\frac{1}{1+z^2}, -i\right\} = 2\pi i \times [(1/2)i] = -\pi$$

Consideriamo adesso altri esempi e le morali M che se ne traggono.

Esempio 19.4.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}\,.$$

Si consideri

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

che ha due poli di ordine 2, uno in $+i$ e l'altro in $-i$. Si prenda lo stesso cammino della figura 19.7. Allora il residuo in i è

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\{f,i\} &= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}\right] = \frac{d}{dz}\,\frac{1}{(z+i)^2}\Big|_{z=i}\\ &= \frac{-2}{(z+i)^3}\Big|_{z=i}\,\frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-i}{4}\,,\end{aligned}$$

per cui

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}\{f,i\} = 2\pi i\frac{-i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

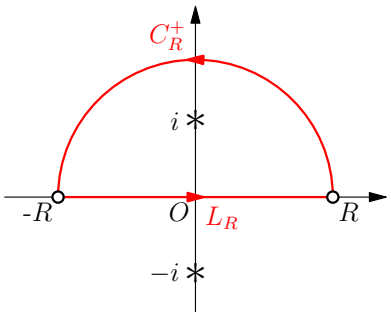
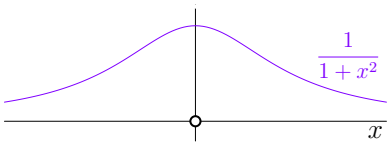


Figura 19.7: C_R^+ è il semiarco di cerchio di raggio R nel semipiano superiore.



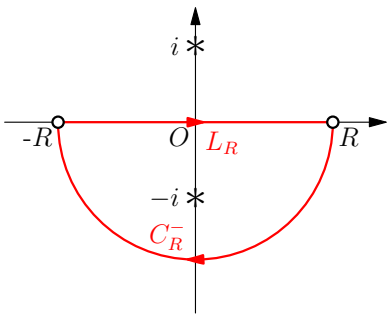
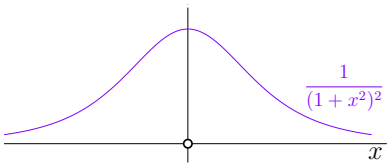


Figura 19.8: C_R^- è adesso il semiarco di cerchio di raggio R nel semipiano inferiore.



Ma

$$\int_{L_R+C_R^+} f(z)dz = \int_{-R}^{+R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{C_R^+} f(z)dz$$

L'integrale lungo C_R^+ tende a zero quando R tende all'infinito, infatti

$$I_R = \int_{C_R^+} f(z)dz = \int_{C_R^+} \frac{1}{(R^2e^{i2\theta}+1)^2} iRe^{i\theta}d\theta \to 0 \text{ per } R \to \infty$$

Quindi

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R+C_R^+} f(z)dz = \frac{\pi}{2}$$

M L'esempio è un caso particolare della classe di integrali

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\,, \tag{19.13}$$

dove la funzione f ha le seguenti caratteristiche:

(i) $f(z)$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ eccetto che per un numero finito di poli a_k.

(ii) $f(z)$ decade più rapidamente di $1/z$ per $|z| \to \infty$, $0 \le \arg(z) \le \pi$. Equivalentemente, $f(z) \le M/R^k$, per $z = Re^{i\theta}$, dove $k > 1$ e M sono costanti.

Per questi integrali, utlizzando il cammino della figura 19.9, si ottiene

$$I = 2\pi i \sum \text{Res}\{f(z)\} \text{ nel semipiano superiore } \Pi^+ \tag{19.14}$$

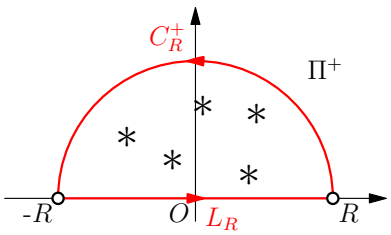


Figura 19.9: C_R^+ è il semiarco di cerchio di raggio R.

Infatti, il contributo del semicerchio C_R^+, stimato mediante la (19.1):

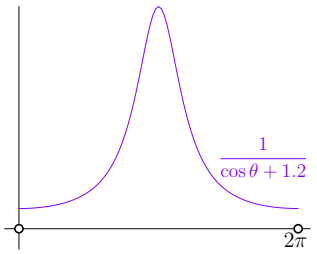
$$\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \le \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

tende a zero quando R tende all'infinito.

Si osservi che se $f(x)$ è una funzione pari, questo metodo può essere usato per calcolare $\int_0^\infty f(x)dx$.

Esempio 19.5.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\cos\theta + a}\,, \quad a > 1$$



Si faccia la sostituzione $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Allora

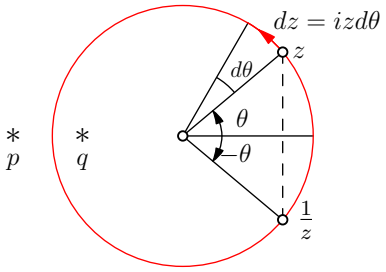
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] = \frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right]$$

$$dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

L'integrale iniziale risulta così trasformato

$$I = \oint_C \frac{(dz/iz)}{\frac{1}{2}\left[z + (1/z)\right] + a} = -2i \oint_C \frac{dz}{z^2 + 2az + 1},$$

dove C è il cerchio unitario. Le radici di $z^2 + 2az + 1$ sono $q = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ e $p = -a - \sqrt{a^2 - 1}$. Poiché soddisfano $pq = 1$, solo una, q, sarà dentro C e quindi



$$I = 4\pi \mathrm{Res}\left\{\frac{1}{(z-p)(z-q)}, q\right\} = \frac{4\pi}{q-p} = \frac{4\pi}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

M L'esempio è un caso particolare della classe di integrali

$$I = \int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \tag{19.15}$$

per i quali

(i) f è finita per tutti i valori di θ,

(ii) f è una funzione razionale di $\sin\theta$ e $\cos\theta$.

Procedendo come nell'esempio, si ottiene

$$I = 2\pi \sum \mathrm{Res}\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} \text{ nel cerchio unitario} \tag{19.16}$$

dove $g(z)$ è la funzione che si ottiene da $f(\sin\theta, \cos\theta)$ mediante la sostituzione

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right], \quad \text{dove } z = e^{i\theta}. \tag{19.17}$$

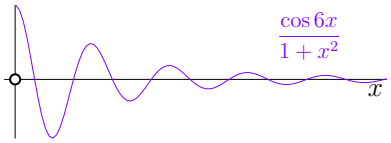
Il metodo si applica anche al caso in cui la funzione f contenga $\cos n\theta$ e $\sin n\theta$, in quanto

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left[z^n + \frac{1}{z^n}\right], \quad \sin n\theta = \frac{1}{2i}\left[z^n - \frac{1}{z^n}\right]$$

Si può adesso ritornare al problema 12.7 e calcolare i coefficienti di Fourier usando questo metodo (per un metodo più veloce si veda la sezione 21.1 più avanti.

ESEMPIO 19.6.

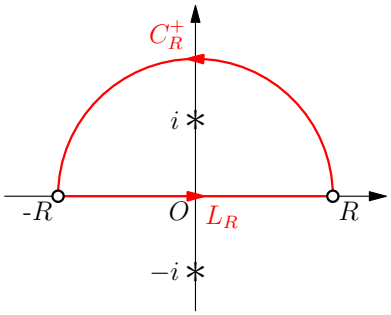
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx, \qquad -\infty < k < +\infty$$



La funzione

$$f(z) = \frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$$

ha due poli semplici in $+i$ e $-i$. Proviamo lo stesso cammino della figura 19.7. Se l'integrale lungo C_R^+ va a zero per R che va all'infinito, siamo a posto. Consideriamo questo integrale ponendo $z = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$,



$$\int_{C_R^+} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}} e^{-ikR\cos\theta + kR\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta$$

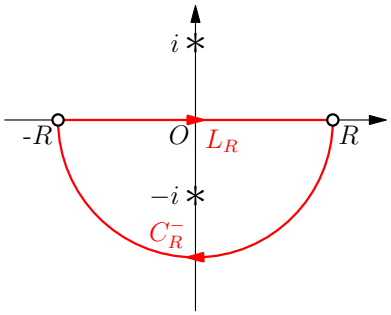
La situazione è analoga a quella incontrata nell'esempio 19.10, ma c'è un ma: il modulo di questo integrale va a zero per R che va all'infinito *solo se* k è un numero *negativo*, in quanto nell'esponenziale $e^{kR\sin\theta}$ il seno è positivo, essendo $0 \le \theta \le \pi$. Il residuo in $z = i$ vale

$$(z-i)\frac{e^{-ikz}}{1+z^2}\bigg|_{z=i} = \frac{e^k}{i+i} = \frac{e^k}{2i}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^k\,, \quad \text{per } k < 0$$

Che fare per $k > 0$? Con un momento di riflessione, ci si può convincere che il contributo dal semicerchio va a zero se chiudiamo il cammino reale con il semicerchio C_R^- nel semipiano inferiore, come in figura 19.8. Infatti, per questa scelta si ha



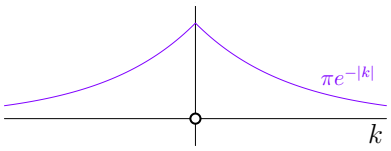
$$\int_{C_R^-} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{1+R^2e^{2i\theta}} e^{-ikR\cos\theta + kR\sin\theta} iRe^{i\theta} d\theta$$

Adesso $\sin\theta$ è sempre negativo per $\pi < \theta < 0$ e k *positivo*, quindi il modulo dell'integrale va a zero per R che va all'infinito.

Il cammino C_R^- racchiude l'altra singolarità della funzione, il polo semplice $-i$. Il residuo della funzione in $z = -i$ vale $e^{-k}/(-2i)$. Il cammino è adesso orario, il che comporta un cambiamento di segno. Quindi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = -2\pi i \left[\frac{e^{-k}}{-2i}\right] = \pi e^{-k}\,, \quad \text{per } k > 0$$

In conclusione,



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \pi e^{-|k|}\,.$$

M Quest'ultimo esempio è un caso particolare di integrali di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \tag{19.18}$$

per i quali la funzione $f(z)$ ha le seguenti caratteristiche:

(i) analitica nel semipiano superiore Π^+ eccetto che per un numero finito di poli

(ii) e tale che $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ per $0 \leq \arg(z) \leq \pi$.

Allora, per $k < 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx = 2\pi i \sum \text{Res}\left\{f(z)e^{-ikz}\right\} \text{ in } \Pi^+ \tag{19.19}$$

La (19.19) è nota come *lemma di Jordan*, la dimostrazione del quale è data a margine. Nel caso in cui

(i) $f(z)$ è analitica nel semipiano inferiore Π^- eccetto che per un numero finito di poli

(ii) $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ per $-\pi \leq \arg(z) \leq 2\pi$,

procedendo in modo analogo a prima, si stabilisce che, per $k > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx = -2\pi i \sum \text{Res}\left\{f(z)e^{-ikz}\right\} \text{ in } \Pi^- \tag{19.20}$$

Le condizioni (19.19) e (19.20) sono verificate per la funzione dell'esempio 19.6, che è una funzione nota in fisica come *lorentziana* e in probabilità come *distribuzione di Cauchy-Lorentz*. Tuttavia, per un'altra importante funzione, la *gaussiana*, $f(x) = e^{-ax^2}$, le condizioni (19.19) e (19.20) *non* sono verificate e quindi non si può usare questo metodo per calcolare $g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}e^{-ikx}dx$. Ci occuperemo di questo nella prossima sezione. Prima, però, vogliamo riscrivere le (19.19) e (19.20) con le notazioni tipicamente usate per l'analisi di Fourier di segnali dipendenti dal tempo.

$$\begin{aligned} t < 0 \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = i\sum \text{Res}\left\{g(z)e^{-izt}\right\} \text{ in } \Pi^+ \\ t > 0 \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = -i\sum \text{Res}\left\{g(z)e^{-izt}\right\} \text{ in } \Pi^- \end{aligned} \tag{19.21}$$

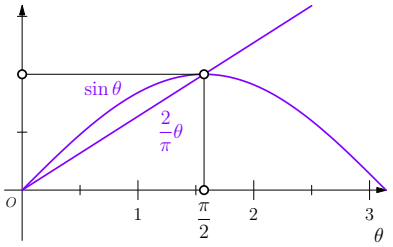
Dimostrazione del lemma di Jordan. Utilizziamo il cammino chiuso della figura 19.9 e valutiamo l'integrale lungo C_R^+:

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{C_R^+} f(z)e^{-ikz}dz \\ &= \int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{-ikR\cos\theta - |k|R\sin\theta} iRe^{i\theta}d\theta\,. \end{aligned}$$

Sia R così grande che $|f(z)| = |f(Re^{i\theta})| < \epsilon$. Allora

$$|I_R| \leq \epsilon R\int_0^\pi e^{-|k|R\sin\theta}d\theta = 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-|k|R\sin\theta}d\theta\,.$$

Nell'intervallo $[0, \pi/2]$, si ha che $(2/\pi)\theta \leq \sin\theta$, come mostrato nella figura sotto.



Quindi $|I_R| \leq 2\epsilon R\int_0^{\pi/2} e^{-|k|R2\theta/\pi}d\theta$. Integrando, si ottiene

$$|I_R| \leq 2\epsilon R\frac{1 - e^{-|k|R}}{|k|R\,2/\pi} < \frac{\pi}{|k|}\epsilon$$

Risulta così dimostrato che $\lim_{R\to\infty} |I_R| = 0$ e quindi la (19.19). □

ESEMPIO 19.7. Usiamo le formule appena trovate per calcolare l'integrale

$$K(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega}d\omega\,, \tag{16.41}$$

incontrato nell'esempio 16.10. I poli, cioè le radici di $z^2 + i2\beta z - \omega_0^2$ sono

$$z_\pm = -i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \equiv -i\beta \pm \Omega_0$$

($\beta > 0$). Quindi

$$\begin{aligned}
\text{Res}\{g(z), z_+\} &= \frac{-e^{-iz_+ t}}{2z_+ + i2\beta} = \frac{-e^{-\beta t} e^{-i\Omega_0 t}}{2\Omega_0} \\
\text{Res}\{g(z), z_-\} &= \frac{-e^{-iz_- t}}{2z_- + i2\beta} = \frac{-e^{-\beta t} e^{i\Omega_0 t}}{-2\Omega_0}
\end{aligned}$$

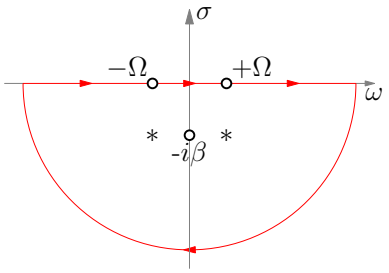


Figura 19.10: I poli sono nel semipiano inferiore.

Non ci sono poli nel semipiano superiore, quindi $K(t) = 0$ per $t < 0$ e

$$K(t) = -i\left[\frac{e^{-\beta t} e^{i\Omega_0 t}}{2\Omega_0} - \frac{-e^{\beta t} e^{-i\Omega_0 t}}{2\Omega_0}\right] = e^{-\beta t}\frac{\sin\Omega_0 t}{\Omega_0} \quad \text{per } t > 0$$

Dunque,

$$K(t) = e^{-\beta t}\frac{\sin\Omega_0 t}{\Omega_0} u(t) \tag{19.22}$$

In questo modo, otteniamo la rappresentazione integrale della soluzione particolare (16.42)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-u) f(u) du = \frac{1}{\Omega_0}\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-u)} \sin\Omega_0(t-u) f(u) du. \tag{19.23}$$

Questo integrale mostra esplicitamente la dipendenza causale della soluzione dalla forza applicata: il valore di y al tempo t dipende dalla storia passata di $f(t)$ fino al tempo t, ma non dai valori che sono nel futuro di t.

19.5 *Calcolo di integrali con il metodo dei residui II*

In questa sezione consideriamo esempi di calcolo di integrali mediante integrali al contorno che richiedono un po' di immaginazione nel trovare il cammino corretto.

Esempio 19.8.

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx \tag{19.24}$$

Completando i quadrati, si riscrive $e^{-ax^2} e^{-ikx}$ come

$$e^{-ax^2} e^{-ikx} = e^{-a\left(x^2 + i\frac{k}{a}x\right)} = e^{-a\left(x + i\frac{k}{2a}\right)^2} e^{-\frac{k^2}{4a}}.$$

Allora

$$g(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x + i\frac{k}{2a}\right)^2} dx. \tag{19.25}$$

Per sostituzione $z = x + i\frac{k}{2a}$ si ottiene

$$g(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{z=-\infty+i\frac{k}{2a}}^{\infty+i\frac{k}{2a}} e^{-az^2} dz\,,$$

che è l'integrale di e^{-az^2} sul lato superiore del rettangolo in figura 19.11, nel limite $R \to \infty$. Il contributo dei cammini verticali,

$$\int_{y=0}^{k/2a} e^{-a(R+iy)^2} dy + \int_{y=k/2a}^{0} e^{-a(-R+iy)^2} dy\,.$$

tende a zero quando R tende all'infinito. Quindi, poiché e^{-az^2} è analitica dentro al rettangolo, l'integrale a secondo membro della (19.25) sarà nel limite uguale all'integrale sull'asse reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,.$$

Dunque,

$$g(k) = e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \tag{19.26}$$

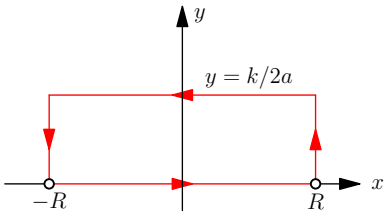


Figura 19.11: $f(z) = e^{-az^2}$ integrata lungo il rettangolo di base $[-R, R]$ e altezza $[0, ik/2a]$.

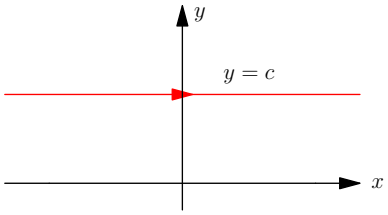
ESEMPIO 19.9.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x}\,, \qquad 0 < a < 1$$

La funzione

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1 + e^z}$$

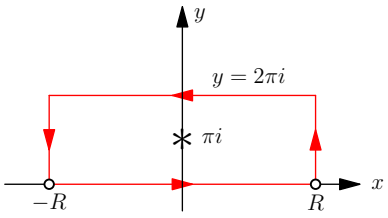
ha poli per $z = (2n+1)\pi i$. È dunque impossibile usare il contorno della figura 19.7.



Consideriamo l'integrale lungo la retta di equazione $y = c$ nel piano complesso, dove c è una costante, diciamo positiva. Allora $z = x + ic$ e quindi

$$\int_{y=c} \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iac} e^{ax}}{1 + e^{ic} e^x} dx = e^{iac} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^{ic} e^x} dx$$

Ci siamo quasi! Basta infatti scegliere $c = 2\pi$, e la funzione integranda diventa identica alla funzione $f(z)$ in quanto $e^{i2\pi} = 1$. Possiamo allora scegliere il cammino della figura a lato e ottenere



$$\int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} + \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{aR} e^{iy}}{1 + e^R e^{iy}} i dy - e^{ia2\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} - \int_{y=0}^{2\pi} \frac{e^{-aR} e^{iy}}{1 + e^{-R} e^{iy}} i dy = 2\pi i \text{Res}\,(f, \pi i) \tag{19.27}$$

Calcoliamo il residuo nel polo semplice πi,

$$\text{Res}\,(f, \pi i) = \lim_{z \to \pi i} (z - \pi i) \frac{e^{az}}{1 + e^z} = \frac{1}{e^{\pi i}} e^{a\pi i} = -e^{a\pi i}\,.$$

Consideriamo il modulo della funzione integranda del primo integrale in dy

$$\left|\frac{e^{aR}e^{iy}}{1+e^{R}e^{iy}}\right| = \frac{e^{aR}}{|1+e^{R}e^{iy}|} \leq \frac{e^{aR}}{e^{R}-1}$$

$|z_1+z_2| \geq |z_1| - |z_2|$, cioè la lunghezza di un lato di un triangolo è sempre maggiore o uguale alla differenza degli altri due.

e quindi tende a zero per $R \to \infty$ essendo $a < 1$. Analogamente, il modulo della funzione integranda del secondo integrale in dy è minore di

$$\frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}$$

e quindi tende a zero per $R \to \infty$. Allora, passando al limite $R \to \infty$ nella (19.27),

$$\left(1-e^{ia2\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} = 2\pi i(-e^{a\pi i}),$$

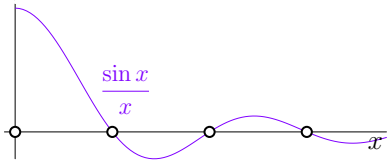
da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} = \pi\frac{-2ie^{a\pi i}}{1-e^{ia2\pi}} = \frac{2i\pi}{e^{a\pi i}-e^{-i2\pi}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

M La soluzione degli ultimi due esempi si è basata sulla seguente idea di validità generale: *trovare un cammino chiuso tale che su una parte del cammino l'integrale sia riconducibile a quello sull'asse reale che si vuole calcolare, e tale che le altre parti del cammino chiuso diano contributo nullo.*

Esempio 19.10.

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$



Per integrali di questo tipo (integrali estesi all'infinito di funzioni trigonometriche divise per polinomi), il trucco è di passare dalla funzione trigonometrica all'esponenziale e poi ritornare all'integrale iniziale usando le definizioni delle funzioni trigonometriche in termini di esponenziale. Passiamo quindi a $f(z) = e^{iz}/z$. Poichè la $\sin x/x$ è pari, l'integrale richiesto sarà metà del valore dell'integrale ta $-\infty$ a $+\infty$.

La prima idea che viene in mente è di considerare il cammino della figura 19.7. Nel limite $R \to \infty$, non c'è contributo dal cammino sul semicerchio C_R^+ dove $z = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$. Infatti, si ha

$$\int_{C_R^+}\frac{e^{iz}}{z}dz = \int_0^{\pi}\frac{1}{Re^{i\theta}}e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}iRe^{i\theta}d\theta = i\int_0^{\pi}e^{iR\cos\theta}e^{-R\sin\theta}d\theta$$

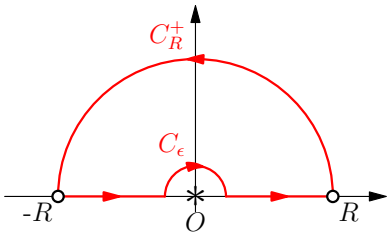


Figura 19.12: C_R^+ è il semiarco di cerchio di raggio R.

e il modulo di quest'integrale va a zero per $R \to \infty$. Tuttavia, c'è un problema: la singolarità $z = 0$ è sul cammino. Il trucco è quello di aggirare la singolarità con un giretto di raggio ϵ attorno ad essa (e preoccuparci alla fine di $\epsilon \to 0$). Passiamo quindi al cammino

chiuso mostrato in figura 19.12. Poichè non ci sono singolarità dentro il cammino

$$\oint \frac{e^{iz}}{z}dz = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$$

Poniamo a zero l'ultimo termine, avendo già mostrato che per $R \to \infty$ non dà contributo. Facciamo la sostituzione da $-x$ a x nel primo integrale a secondo membro e combiniamo con il terzo. Otteniamo così

$$2i \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}dx = -\int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz$$

Calcoliamo l'integrale a secondo membro ponendo $z = \epsilon e^{i\theta}$

$$-\int_{C_\epsilon} \frac{e^{iz}}{z}dz = i\int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}}d\theta \xrightarrow{\epsilon\to 0} \pi i$$

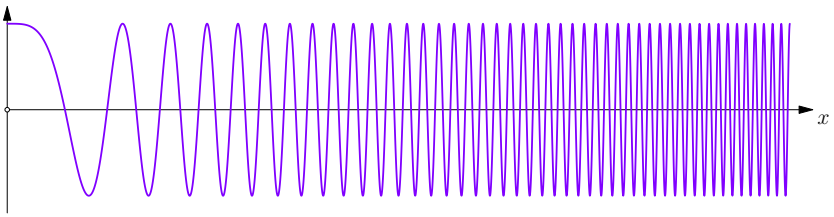
e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

M Quest'ultimo esempio è un caso particolare di integrali in cui lungo il cammino si incontra una singolarità e la si aggira come si è fatto nell'esempio. Il metodo funziona se l'integrale di aggiramento tende a zero come l'integrale su C_ϵ dell'esempio. Un metodo più diretto è presentato nella prossima sezione.

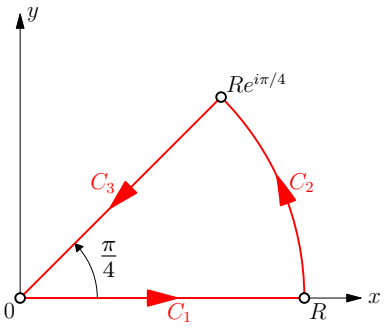
ESEMPIO 19.11. $\int_0^{\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{\infty} \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Dimostrazione. In un certo senso, c'è del miracoloso nel fatto che l'integrale di $\cos(x^2)$ converga. Infatti, $\cos(x^2)$, il cui grafico è riportato sotto, non va a zero quando x va all'infinito. Ci deve essere essere un'esatta cancellazione tra parti positive e negative che produce un valore finito dell'area.



Un modo per valutare l'integrale di $\cos(x^2)$ e di $\sin(x^2)$ è di incominciare con la formula di Eulero,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)dx + i\int_0^{\infty} \sin(x^2)dx = \int_0^{\infty} e^{ix^2}dx\,,$$



che è l'integrale della funzione complessa e^{iz^2} lungo l'asse reale positivo. Si tratta adesso di vedere se esistono modi di chiudere il cammino e usare il teorema dei residui. Consideriamo il contorno nel piano complesso illustrato nella figura a lato.

Questo contorno ha tre caratteristiche che lo rendono speciale. Primo, l'integrale lungo C_3 è una fase che moltiplica l'integrale della gaussiana. Infatti, posto $z = re^{i\pi/4}$ lungo questo cammino,

$$\begin{aligned}\int_{C_3} e^{iz^2} dz &= \int_{r=R}^{0} e^{i(re^{i\pi/4})^2} d\left(re^{i\pi/4}\right) \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{i(r^2 i)} dr \\ &= -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2} dr\end{aligned}$$

Quindi nel limite $R \to \infty$

$$\int_{C_3} e^{iz^2} dz = -e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-r^2} dr = -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Secondo, l'integrale di e^{iz^2} lungo C_2, l'arco di cerchio da R a $Re^{i\pi/4}$, nel limite $R \to \infty$, è nullo. Infatti, $z = Re^{i\pi/4}$ lungo questo cammino,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi/4} e^{(iRe^{i\theta})^2} dz\right| &= \left|\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta\right| \\ &= \left|\int_0^{\pi/4} e^{-R^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} iRe^{i\theta} d\theta\right| \\ &\leq \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\theta} R d\theta \\ &\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(perché } \cos 2\theta > 0 \text{ per } 0 < \theta < \pi/4)\end{aligned}$$

Terzo, la funzione e^{iz^2} è analitica nella regione delimitata da $C_1 + C_2 + C_3$. Allora

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_1} = -\int_{C_3}$$

e quindi

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

equivalentemente,

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

che è proprio quello che si voleva dimostrare. □

M L'integrale

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

è detto *integrale di Fresnel*. Dall'uguaglianza sopra segue che

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2} dx = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Si osservi che per cambiamento di variabili $x = e^{i\pi/4}y$, si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax^2} dx = e^{i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{i\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{(-ia)}},$$

che può essere compresa come risultante da una rotazione del contorno di $\pi/4$. Questo giustifica il passaggio da certi integrali reali che coinvolgono gaussiane, ad altri complessi, mediante la sostituzione $a \to -ia$.

19.6 *Estensione del teorema e della formula di Cauchy*

Quando si considera un integrale di contorno $\oint_C f(z)dz$, può accadere che un polo semplice si trovi sul cammino di integrazione, come nella situazione illustrata nella figura 19.13, dove si ha un polo a lungo l'asse reale.

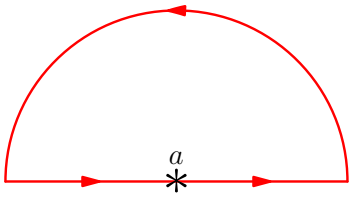


Figura 19.13: Polo lungo il cammino

Possiamo pensare al cammino della figura 19.13 come il limite $\epsilon \to 0$ del cammino situazione della figura 19.14, lungo il quale l'integrale di linea è

$$\oint_{C_\epsilon^+} f(z)dz = \int_b^{a-\epsilon} f(x)dx + \int_{S_\epsilon^+} f(z)dz + \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)dx + \int_S f(z)dz$$

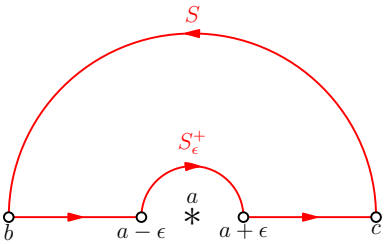


Figura 19.14: Aggiramento del polo.

Se nella regione racchiusa dal cammino della figura 19.13 la funzione è anlitica, fatta eccezione per un certo numero di poli a_k, allora

$$\oint_{C_\epsilon^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\{f, a_k\} \tag{19.28}$$

Consideriamo adesso i tre integrali che dipendono da ϵ. Calcoliamo l'integrale di aggiramento lungo il semicerchio di raggio ϵ, cioè $\int_{S_\epsilon^+} f(z)dz$. Nell'intorno del polo $z = a$, la funzione è approssimata da

$$\frac{\mathrm{Res}\{f, a\}}{z - a}.$$

Allora, posto $z - a = \epsilon e^{i\theta}$, per $\epsilon > 0$ piccolo, l'integrale diventa

$$\int_{S_\epsilon^+} f(z)dz = \mathrm{Res}\{f, a\}\int_\pi^0 \frac{\epsilon i e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = \mathrm{Res}\{f, a\} i \int_\pi^0 d\theta = -i\pi \mathrm{Res}\{f, a\}.$$

Consideriamo adesso la somma degli altri due integrali reali

$$\int_b^{a-\epsilon} f(x)dx + \int_{a+\epsilon}^{c} f(x)dx$$

Il limite $\epsilon \to 0$ di questa somma è chiamato *parte principale di Cauchy* dell'integrale ed è denotata

$$P \int_b^c f(x)dx\,.$$

Essa è una regolarizzazione dell'integrale, altrimenti divergente.

Consideriamo adesso il limite $\epsilon \to 0$ dell'integrale di linea sul cammino chiuso

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{C_\epsilon^+} f(z)dz &= P\int_b^c f(x)dx - i\pi \mathrm{Res}\{f,a\} + \int_S f(z)dz \\ &= 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\{f,a_k\}\,.\end{aligned}$$

Il risultato ottenuto è interessante, ma si potrebbe obbiettare che la procedura che abbiamo seguito ha una certa arbitrarietà in quanto il modo in cui abbiamo scelto di aggirare il polo non è il solo possibile. Avremmo infatti potuto scegliere il cammino mostrato in figura 19.16.

In questo caso, l'integrale di aggiramento lungo il semicerchio di reaggio ϵ vale

$$\int_{S_\epsilon^-} f(z)dz = \mathrm{Res}\{f,a\}\int_\pi^0 \frac{\epsilon i e^{i\theta}d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = \mathrm{Res}\{f,a\} i\int_{-\pi}^0 d\theta = i\pi \mathrm{Res}\{f,a\}$$

e la (19.28) diventa

$$\oint_{C_\epsilon^-} f(z)dz = 2\pi i\left[\sum_k \mathrm{Res}\{f,a_k\} + \mathrm{Res}\{f,a\}\right] \tag{19.29}$$

perchè adesso il polo a è nella regione racchiusa dal contorno. Nel limite $\epsilon \to 0$, allora si ha

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \oint_{C_\epsilon^-} f(z)dz &= P\int_b^c f(x)dx + i\pi \mathrm{Res}\{f,a\} + \int_S f(z)dz \\ &= 2\pi i\left[\sum_k \mathrm{Res}\{f,a_k\} + \mathrm{Res}\{f,a\}\right]\,.\end{aligned}$$

Confrontando i risultati ottenuti, si vede che non c'è arbitrarietà per il valore di

$$P\int_C f(z)dz \equiv P\int_b^c f(x)dx + \int_S f(z)dz\,,$$

poiché entrambe le regole di aggiramento danno lo stesso valore

$$P\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\{f,a_k\} + \pi i \mathrm{Res}\{f,a\}\,.$$

Si osservi che per la validità di questa formula non è essenziale che il polo sia sull'asse reale o che ce ne sia uno solo. Con gli stessi

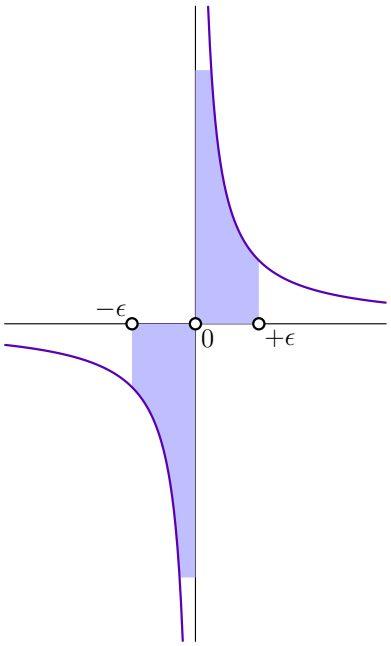


Figura 19.15: Parte principale di Cauchy: cancellazione tra parti positive e negative dell'integrale.

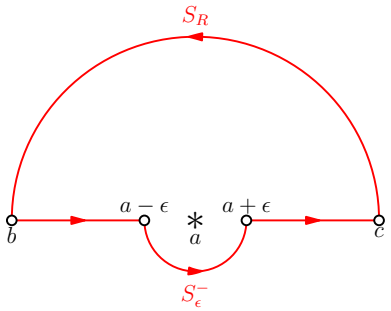


Figura 19.16: Aggiramento del polo.

ragionamenti si arriva a stabilire la formula generale

$$P \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum (\text{res. dentro } C) + \pi i \times \sum (\text{res. su } C) \tag{19.30}$$

in cui ci sono uno o più poli lungo il cammino C.

Questa formula estende il teorema di residui al caso di poli lungo il cammino di integrazione (e ha un qualche significato intuitivo: un po' paradossalmente si potrebbe dire che un polo lungo il cammino è "metà dentro e metà fuori" e quindi che il suo contributo è metà del contributo dei poli dentro il cammino). La formula vale anche per poli di ordine dispari, ma cessa di valere per poli di ordine pari perché in questo caso $P\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz$ non è finito, non essendoci cancellazione tra le aree delle due regioni a destra e a sinistra del polo.

Come conseguenza della (19.30), si ottiene l'estensione della formula di Cauchy per una funzione analitica dentro e lungo un contorno C, ad un punto z che si trova sul contorno,

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} P \oint_C \frac{f(Z)dZ}{Z - z}, \quad z \in C\,. \tag{19.31}$$

Esempio 19.12. Riconsideriamo l'integrale

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

dell'esempio 19.10. Adesso risulta chiaro che il risultato non dipende dalla particolare regola di aggiramento del polo che allora avevamo scelto. Applicando la (19.30), si ottiene

$$I = \frac{1}{2} \mathrm{Im}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im}\, \pi i = \frac{\pi}{2}$$

essendo 1 il residuo di e^{iz}/z in $z = 0$.

Le funzioni generalizzate $1/(x \pm i\epsilon)$ Si supponga di dover calcolare l'integrale

$$\int_b^c \frac{f(x)}{x} dx\,, \tag{19.32}$$

dove $f(x)$ è analitica in 0 (b e negativo e c positivo). Allora poiché il residuo di $f(x)/x$ in $x = 0$ è $f(0)$, si ha

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_b^c \frac{f(x)}{x - i\epsilon} dx = P \int_b^c \frac{f(x)}{x} + \int_{-a}^{b} i\pi\delta(x) g(x) dx\,. \tag{19.33}$$

Per esprimere questa identità scriviamo

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)\,. \tag{19.34}$$

a patto che sia inteso che P è la parte principale dell'integrale, che l'intero membro destro è dentro un integrale e che ϵ sia fatto tendere a zero. In altre parole, la (19.34) va intesa come la definizione di una funzione generalizzata.

Il caso con il modo opposto di evitare il polo è trattato similmente. In questo caso si ottiene

$$\frac{1}{x + i\epsilon} = P\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)\,. \tag{19.35}$$

Il segno meno a secondo membro è perché il semicerchio adesso è percorso in senso orario. Si veda la figura 19.18. Combinando le formule (19.34) e (19.35), si ottiene

$$P\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x - i\epsilon} + \frac{1}{x + i\epsilon}\right]\,. \tag{19.36}$$

Vediamo così che la parte principale è la media dei cammini appena sopra e appena sotto il polo.

Naturalmente, per il discorso appena fatto non è richiesto che il polo sia nell'origine. Se il polo è in $x = a$, si avrà

$$\frac{1}{x - a - i\epsilon} = P\frac{1}{x - a} + i\pi\delta(x - a)\,, \tag{19.37}$$

$$\frac{1}{x - a + i\epsilon} = P\frac{1}{x - a} - i\pi\delta(x - a)\,, \tag{19.38}$$

$$P\frac{1}{x - a} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x - a - i\epsilon} + \frac{1}{x - a + i\epsilon}\right]\,. \tag{19.39}$$

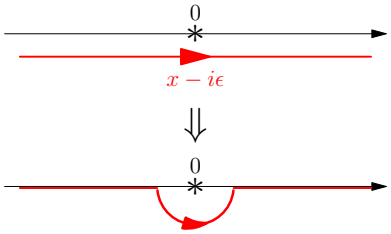


Figura 19.17: Deformazione di un cammino di poco sotto l'asse reale in un cammnino che passa sotto il polo. L'integrale sul semicerchio di raggio ϵ, essendo percorso in senso anti-orario è $\frac{1}{2}2\pi i g(0) = i\pi g(0)$.

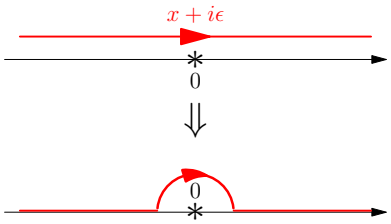


Figura 19.18: Deformazione di un cammino di poco sopra l'asse reale in un cammino che passa sopra il polo. L'integrale sul semicerchio di raggio ϵ è percorso in senso orario e quindi dà un contributo $-i\pi g(0)$.

ESERCIZIO 19.1. Verifichiamo le formule ottenute in un esempio semplice:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx$$

Usando

$$\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x - i\epsilon} dx$$

Il primo termine permette di chiudere il cammino con un semicerchio nel piano superiore, il secondo nel semipiano inferiore (Lemma di Jordan). Poiché il polo $z = +i\epsilon$ è nel sempiano superiore, solo il

semicerchio superiore circonda il polo. Il residuo nel polo vale 1.
Quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - i\epsilon} dx = \frac{1}{2} \times 2\pi i \times 1 = \pi i$$

D'altro canto, la parte principale dell'integrale è zero

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0$$

in quanto $\cos x$ è pari e la cancellazione è esatta. Dalla definizione della $\delta(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x) \, (i\pi\delta(x)) \, dx = i\pi \cos(0) = i\pi$$

Dunque la formula

$$\frac{1}{x - i\epsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$$

risulta verificata.

Tavola riassuntiva delle singolarità di una funzione

Singolarità a di una funzione analitica $f(z)$		
Tipo	Descrizione	Esempi
Isolata	Se esiste un intorno finito di a in cui non ci sono altre singolarità	
Polo	Se nell'intorno di a si ha $1/f(z) = (z-a)^m \Omega(z)$, dove Ω è analitica e non nulla in a, m è l'ordine del polo	$1/z$ in $z=0$ $(m=1)$ $1/(z-2)^3$ in $z=2$ $(m=3)$
Punto di diramazione	Se un giro completo attorno ad a fa cambiare il valore di $f(z)$	$\sqrt{z}$ in $z=0$
Eliminabile	Se $\lim_{z\to a} f(z)$ esiste	$\dfrac{\sin z}{z}$ in $z=0$
Essenziale	Se $f(z)$ diverge in a, ma non è un polo	$e^{1/(z-2)}$ in $z=2$

Classificazione delle funzioni analitiche		
Funzione	Descrizione	Esempi
Olomorfa	Equivalente ad analitica	
Intera	Analitica ovunque nel piano complesso (solo una singolarità all'infinito)	polinomi, esponenziale, trigonometriche, iperboliche
Meromorfa	Solo poli come singolarità	razionali

Problemi

Problema 19.1. □ Sia C la linea $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ che congiunge i punti $(1,1)$ e $(2,3)$. Determinare il valore di

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz$$

Problema 19.2. □ Calcolare

$$\oint_C |z|^2 dz$$

lungo i cerchi (a) $|z| = 1$ e (b) $|z-1| = 1$.

Problema 19.3. □ Calcolare

$$\int_C \bar{z}^2 dz + z^2 dz$$

lungo la curva C definita da $z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 = (2-2i)z + (2+2i)\bar{z}$ tra i punti $z = 1$ e $z = 2+2i$.

Problema 19.4. □ Calcolare

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2} dz$$

dove C è il cerchio $|z| = 4$.

Problema 19.5. □ Calcolare

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz$$

dove C è il cerchio $|z| = 2$.

Problema 19.6. □ Dimostrare che

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \sin t$$

per $t > 0$ e C il cerchio $|z| = 3$.

Problema 19.7. □ Calcolare

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$$

lungo un rettangolo con vertici in: (a) $2 \pm i$, $-2 \pm i$; (b) $-i$, $2-i$, $2+i$, i.

Problema 19.8. □ Siano

$$P(z) = \frac{1}{\cos z}, \quad Q(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad R(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^3}.$$

Trovare i poli di P, Q e R e il loro ordine.

Problema 19.9. □ Classificare le singolarità di $f(z)$ nei punti indicati.

(I) $f(z) = \cot z \quad$ in $z = 0$.

[Polo semplice.]

(II) $f(z) = \dfrac{1+\cos z}{(z-\pi)^2} \quad$ in $z = \pi$.

[Eliminabile.]

(III) $f(z) = \sin(1/z) \quad$ in $z = 0$.

[Singolarità essenziale.]

(IV) $f(z) = \dfrac{z^2 - z}{z^2 + 2z + 1} \quad$ in $z = -1$.

[Polo di ordine 2.]

(V) $f(z) = z^{-3} \sin z \quad$ in $z = 0$.

[Polo di ordine 2.]

(VI) $f(z) = (\csc z)(\cot z) \quad$ in $z = 0$.

[Polo di ordine 2.]

Problema 19.10. □ Trovare i residui di $g(z)$ nei punti indicati.

(I) $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ in $z = -i$.

[Res = $\dfrac{i}{2}$]

(II) $g(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$ in $z = 0$.

[Res = $\dfrac{1}{2}$]

(III) $g(z) = \tan z$ in $z = \pi/2$.

[Res = -1]

(IV) $g(z) = \dfrac{z+2}{(z^2 - 2z + 1)^2}$ in $z = 1$.

[Res = 0]

Problema 19.11. Le singolarità delle funzioni sotto sono tutte poli semplici. Trovare i residui

(I) $g(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z^2 - 5iz - 4}$.

[i e $4i$. $\text{Res}_1 = (-2/3)i$ e $\text{Res}_2 = (17/3)i$]

(II) $g(z) = \tan z$.

$[(n+\frac{1}{2})\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots.\ \mathrm{Res}_n=-1]$

(III) $g(z)=\dfrac{z^2}{z^3-8}$.

$[2,\ 2e^{2i\pi/3}$ e $2e^{4i\pi/3}.\ \mathrm{Res}=1/3]$

(IV) $g(z)=\dfrac{e^z}{\sin z}$.

$[n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots.\ \mathrm{Res}_n=(-1)^n e^{n\pi}]$

(V) $g(z)=\dfrac{\sin z}{z^2-3z+2}$.

$[1$ e $2.\ \mathrm{Res}_1=-\sin 1$ e $\mathrm{Res}_2=\sin 2]$

PROBLEMA 19.12. □ Usare il metodo dei residui per calcolare gli integrali seguenti. Quando possibile, usate i risultati degli esercizi precedenti.

(I) $\oint_C \dfrac{z^2}{z^3-8}dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro $3/2$.

$[2\pi i/3]$

(II) $\oint_C \dfrac{z^2}{z^3-8}dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 3 e centro 0.

$[2\pi i]$

(III) $\oint_C \dfrac{z^2}{z^3-8}dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il cerchio di raggio 1 e centro 0.

$[0]$

(IV) $\oint_C \dfrac{z^2-1}{z^2-5iz-4}dz$, dove C è una qualunque curva semplice chiusa (percorsa in senso antiorario) che include i seguenti punti: (a) solo i , (b) solo $4i$, (c) sia i sia $4i$, (d) né i né $4i$.

[(a) $4\pi/3$, (b) $-34\pi/3$, (c) -10π, (d) 0]

(V) $\oint_C \dfrac{e^z}{\sin z}dz$, dove C (percorso in senso antiorario) è il rettangolo con vertici $-\pi/2-i$, $5\pi/2-i$, $-\pi/2+2i$ e $5\pi/2+2i$.

$[2\pi(1-e^{\pi}+e^{2\pi})]$

(VI) $\oint_C \dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz$, dove C (percorso in senso *orario*) è il semicerchio nel semipiano superiore che ha centro 0, raggio $R>2$ e diametro collocato lungo l'asse reale.

$[-\pi/6]$

PROBLEMA 19.13. □ Calcolare i seguenti integrali:

(I) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^3}$ $[3\pi/8]$

(II) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4dx}{(a+bx^2)^4}$, $a,b>0$ $[\pi/(16a^{3/2}b^{5/2})]$

(III) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ $[\pi]$

(IV) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^6}$ $[\pi/3]$

(V) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\cos x+x\sin x}{x^2+a^2}dx$ $[2\pi e^{-a}]$

(VI) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$ $[\pi/12]$

(VII) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-3\sin t}$ $[\pi/2]$

(VIII) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-2\cos t}$ $[2\pi/\sqrt{5}]$

(IX) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos t dt}{13+12\cos t}$ $[4\pi/15]$

(X) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ $[\pi/6]$

(XI) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\cosh x}$ $[\pi]$

(XII) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{\sinh x}dx$ $\left[\dfrac{\pi}{2}\tanh\dfrac{a\pi}{2}\right]$

(XIII) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}$ $\left[-\pi e^{-2\pi}\right]$

Soluzioni

Problema 19.1. □ Per calcolare l'integrale

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz\,,$$

dove C è la linea $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ che congiunge i punti $(1,1)$ e $(2,3)$ si può: (i) calcolare l'integrale di linea lungo la curva data separando parte reale e parte immaginaria e applicando le regole di calcolo degli integrali di linea reali; (ii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, il valore dell'integrale non dipende dalla linea, quindi, invece di quella assegnata, si prende una linea molto più semplice che congiunge i due punti, per esempio una retta; fatto questo si calcola l'integrale di linea lungo il segmento di retta tra $(1,1)$ e $(2,3)$; (iii) osservare che, essendo la funzione integranda analitica, valgono le usuali regole del calcolo: la primitiva della funzione integranda è $4z^3 - 2iz^2$ e quindi

$$\int_C (12z^2 - 4iz)dz = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz)dz = (4z^3 - 2iz^2)\Big|_{1+i}^{2+3i} = -156 + 38i$$

Chiaramente, (iii) è il metodo migliore!

Problema 19.2. □

(a) C: $|z| = 1$. Si ponga $z = e^{i\theta}$. Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} de^{i\theta} = e^{i2\pi} - 1 = 0$$

(b) $|z - 1| = 1$. Si ponga $z = 1 + e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta}d\theta = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$. Allora

$$\oint_C |z|^2 dz = \int_0^{2\pi} \left[(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right](-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = 2i\pi$$

Problema 19.3. □ Risposta: 248/15.

Problema 19.4. □

$$I = \oint_C f(z)dz\,, \quad \text{dove} \quad f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + \pi^2)^2} = \frac{e^z}{(z - i\pi)^2(z + i\pi)^2}$$

e C è il cerchio $|z| = 4$. La funzione $f(z)$ ha due poli $z = \pm i\pi$ di ordine $m = 2$ nel cerchio C. Quindi

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(\mathsf{Res}\{f, +i\pi\} + \mathsf{Res}\{f, -i\pi\}\right)$$

Ricordiamo la formula generale per il residuo in un polo a di ordine m,

$$\mathsf{Res}\{f, a\} = \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{d}{dz}\right]^{m-1}\left[(z-a)^m f(z)\right]\Big|_{z=a}$$

Per $a = i\pi$

$$\mathrm{Res}\{f, i\pi\} = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dz}\right]\left[(z-\pi i)^2 \frac{e^z}{(z-i\pi)^2(z+i\pi)^2}\right]\Big|_{z=i\pi} = \frac{d}{dz}\frac{e^z}{(z+i\pi)^2}\Big|_{z=i\pi}$$
$$= \frac{e^z(z+i\pi)^2 - e^z[2(z+i\pi)]}{(z+i\pi)^4}\Big|_{z=i\pi} = \frac{e^z(z+i\pi) - 2e^z}{(z+i\pi)^3}\Big|_{z=i\pi} = \frac{\pi+i}{4\pi^3}$$

Analogamente, si trova

$$\mathrm{Res}\{f, -i\pi\} = \frac{\pi - i}{4\pi^3}$$

Allora

$$\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2} = 2\pi i\left[\frac{\pi+i}{4\pi^3} + \frac{\pi-i}{4\pi^3}\right] = \frac{i}{\pi}$$

Problema 19.5. □

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^3} dz = 2\pi i \times \frac{1}{2}\,(e^{iz})''\Big|_{z=0} = -\pi i$$

Problema 19.6. □

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{(z+i)(z-i)} dz = \frac{e^{-it}}{-2i} + \frac{e^{it}}{2i} = \sin t$$

Problema 19.7. □ Risposta: (a) 0, (b) $-1/2$.

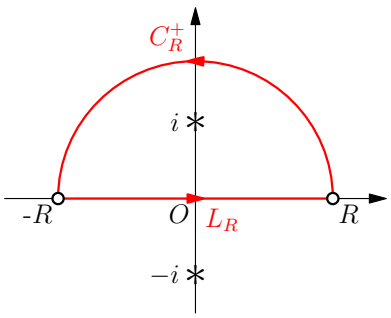
Problema 19.8. □ Risposta: se siete arrivati sin qui, non avete problemi a trovarla.

Problema 19.9. □ Idem.

Problema 19.13. □

(I) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^3}$. Polo triplo in i. $\mathrm{Res}\,(f,i) = \dfrac{1}{2}\dfrac{12}{(z+i)^5} = -\dfrac{3i}{16}$. Stesso contorno della figura 19.7.

$$\oint f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^3} + \int_{C_R^+} \frac{dz}{(1+z^2)^3} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\,(f,i) = \frac{3\pi}{8}$$



Nel limite $R \to \infty$ l'integrale lungo C_R^+ dà contributo nullo, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

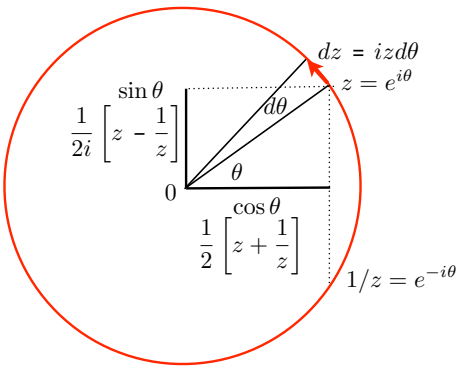
(II)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a+bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}\,, \qquad a, b > 0$$

Polo di quart'ordine in $i\sqrt{a/b}$.

(III) Integrali di questo tipo si riconducono a integrali nel piano complesso mediante le sostituzioni riassunte dalla figura a margine.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{3-2(z+z^{-1})/2+(z-z^{-1})/2i} = \oint_C \frac{2dz}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$$



I poli di

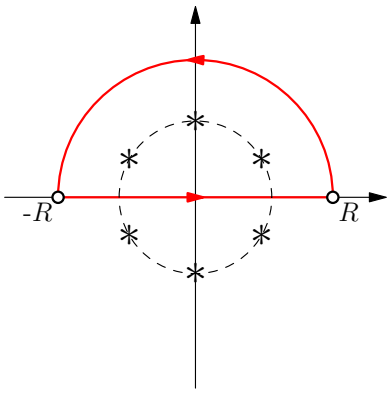
$$f(z) = \frac{2}{(1-2i)z^2+6iz-1-2i}$$

sono poli semplici, $z = 2-i$ e $z = (2-i)/5$. Solo $(2-i)/5$ è all'interno di C. Il residuo in $(2-i)/5$ è $1/(2i)$, quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta} = \pi$$

(IV) Essendo la funzione integranda pari,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}\,.$$



Per il calcolo di questo integrale si considera il contorno della figura a lato. Zeri di $1+x^6 = 0$: $e^{\pi i/6}$, $e^{3\pi i/6}$, $e^{5\pi i/6}$, $e^{7\pi i/6}$, $e^{9\pi i/6}$, $e^{11\pi i/6}$. Poli semplici di $f(z) = 1/1+z^6$. Solo i poli $e^{\pi i/6}$, $e^{3\pi i/6}$, $e^{5\pi i/6}$ si trovano dentro C. Usando la regola dell'Hospital si trova

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(e^{\pi i/6}) &= \lim_{z\to e^{\pi i/6}} \left[(z-e^{\pi i/6})\frac{1}{1+x^6}\right] = \lim_{z\to e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}\\
\mathrm{Res}(e^{3\pi i/6}) &= \lim_{z\to e^{3\pi i/6}} \left[(z-e^{3\pi i/6})\frac{1}{1+x^6}\right] = \lim_{z\to e^{3\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}\\
\mathrm{Res}(e^{5\pi i/6}) &= \lim_{z\to e^{5\pi i/6}} \left[(z-e^{5\pi i/6})\frac{1}{1+x^6}\right] = \lim_{z\to e^{\pi i/6}} \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}
\end{aligned}$$

Allora

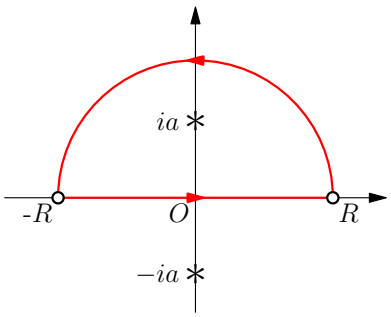
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{2}\times 2\pi i \times \frac{1}{6}\left(e^{-5\pi i/6}+e^{-5\pi i/2}+e^{-25\pi i/6}\right) = \frac{\pi}{3}\,.$$

(V) Per dimostrare che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos x + x\sin x}{x^2+a^2}dx = 2\pi e^{-a}$$

scomponiamo I nella somma di due integrali

$$I = a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx \equiv I_1 + I_2$$



Consideriamo il primo integrale

$$I_1 = a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx\,.$$

Non possiamo direttamente chiudere sul contorno della figura a lato perché $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. diverge lungo la direzione positiva dell'asse immaginario (a causa di e^{-iz}). Consideriamo invece lungo lo stesso contorno, l'integrale

$$J_1 = \oint \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz = \oint \frac{\cos z}{z^2+a^2}dz + i\oint \frac{\sin z}{z^2+a^2}dz$$

Essendo il seno una funzione dispari, il secondo integrale dà contributo nullo quando è integrato lungo l'asse reale. Quindi $I_1 = aJ_1$, nel limite $R \to \infty$, in quanto l'integrale lungo C_R^+ si annulla, nel limite $R \to \infty$, come si può verificare direttamente, oppure utilizzando il Lemma di Jordan.

Calcoliamo J_1. Polo in ia. Residuo: $\dfrac{e^{i(ia)}}{2ia} = \dfrac{e^{-a}}{2ia}$. Quindi $J_1 = (2\pi i)e^{-a}/(2ia) = \pi e^{-a}/a$, da cui $I_1 = aJ_1 = \pi e^{-a}$.
Per il secondo integrale possiamo procedere in modo analogo, oppure osservare che

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = -\frac{d}{d\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}dx\Big|_{\lambda=1}$$

Ma l'integrale

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+a^2}dx$$

è completamente analogo a J_1, calcolato poc'anzi e vale quindi $F(\lambda) = \pi\dfrac{e^{-\lambda a}}{a}$. Allora $I_2 = -F'(\lambda)\big|_{\lambda=1} = \pi e^{-a}$, da cui

$$I = I_1 + I_2 = \pi e^{-a} + \pi e^{-a} = 2\pi e^{-a}$$

(VI) Per calcolare

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta$$

si procede alla sostituzione usuale per integrali di questo tipo: $z = e^{i\theta}$, $dz = iz d\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(z+1/z)$. Si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}d\theta = \frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}$$

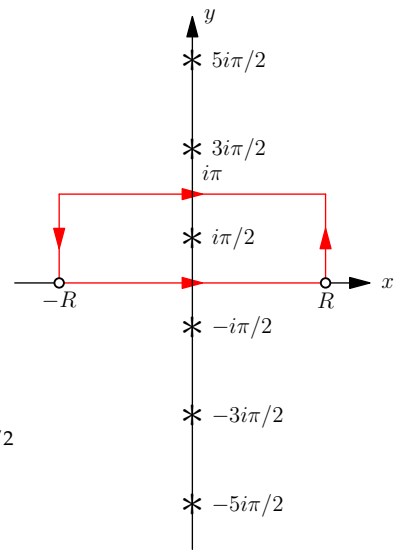
Polo di ordine 3 in $z=0$ e polo semplice in $z=1/2$. Risultato $\pi/12$.

(VII)

(VIII)

(IX)

(X)



(XI) Poiché $f(z) = 1/\cosh z$ ha infiniti poli nei punti $z = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i$, per calcolare $g(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx$ conviene prendere il cammino di integrazione della figura a lato. Si osservi la scelta di far passare il cammino per π (sfruttando la periodicità della funzione).

Il residuo della funzione integranda per $z = i\pi/2$ è $-ie^{\omega\pi/2}$ e quello per $z = -i\pi/2$ è $+ie^{-\omega\pi/2}$. Quindi,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}dx = \frac{1}{2\pi}(2\pi i)\text{Res} = e^{\omega\pi/2}$$

Adesso sviluppiamo il primo membro

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx + \frac{e^{\omega\pi}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx\end{aligned}$$

(si osservi il cambiamento di segno $\cosh(x + i\pi) = -\cosh(x)$).
Raccogliamo a secondo membro l'integrale cercato,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}dx = (1+e^{\omega\pi})\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx$$

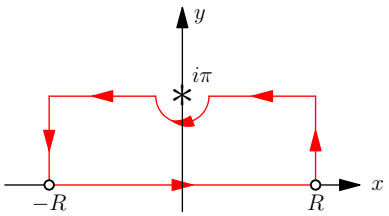
Si è così determinato che

$$(1+e^{\omega\pi})\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx = e^{\omega\pi/2}$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{\cosh x}dx = \frac{e^{\omega\pi/2}}{1+e^{\omega\pi}}$$

(XII) Un trucco simile a quello dell'esempio 19.9 potrebbe funzionare. Sfortunatamente, il cammino $y = \pi i$ incontra il polo $z = \pi i$. Ma questo non è un problema: basta prendere un cammino semicircolare che lo aggiri e poi far tendere a zero il suo raggio. Il residuo della funzione nel polo è $-i\sinh a$.



Dopo aver dimostrato che i contributi verticali tendono a zero, possiamo allora integrare lungo il rettangolo e ottenere

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{\sinh x}dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a(x+\pi i)}{\sinh(x+\pi i)}dx = \pi\sinh a$$

$$(1+\cosh a\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{\sinh x}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax\sinh a}{\sinh x}dx = \pi\sinh a$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{\sinh x}dx = \pi\frac{\sinh a}{1+\cosh a\pi}$$

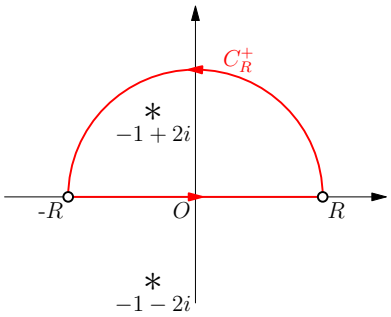
$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ax}{\sinh x}dx = \frac{\pi}{2}\frac{\sinh a}{(1+\cosh a\pi)}$$

(anche se non sembra è quello che si voleva dimostrare).

(XIII) Si consideri

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz\,,$$

dove C è il contorno della figura a lato.



L'integrando ha poli semplici in $-1\pm 2i$, ma solo $-1+2i$ è all'interno di C.

$$\text{Res}\{\} = \frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{2(-1+2i)+2} = (-1+2i)\frac{e^{-i\pi-2\pi}}{4i}\,.$$

Allora

$$\oint_C \frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}dz = 2\pi i(-1+2i)\frac{e^{-i\pi-2\pi}}{4i} = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}\,.$$

La funzione tende a zer per z che va all'infinito, quindi il contributo del semicerchio C_R^+ è nullo nel limite $R\to\infty$ e quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos\pi x}{x^2+2x+5} + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5} = \frac{\pi}{2}e^{-2\pi} - i\pi e^{-2\pi}$$

L'integrale richiesto è $-\pi e^{-2\pi}$ e, come bonus, si è ottenuto anche il valore di un altro integrale.

20
Il cuore della teoria delle funzioni analitiche

Indice

20.1 *Multifunzioni, punti di diramazione e rami* 459
20.2 *Rilevanza per le serie di potenze* 466
20.3 *Integrale di una funzione con punti di diramazione* 468
20.4 *Sviluppo in serie di Taylor* 469
20.5 *Sviluppo in serie di Laurent* 471
20.6 *Prolungamento analitico* 474
20.7 *La funzione zeta di Riemann** 477
20.8 *Il teorema di rappresentazione di Riemann* 480
PROBLEMI 483
SOLUZIONI 485

20.1 *Multifunzioni, punti di diramazione e rami*

La funzione $1/z$ è associata al campo di una carica puntiforme e svolge un ruolo privilegiato nella teoria delle funzioni analitiche. Non dovrebbe sorprendere che il potenziale che corrisponde ad essa svolga un ruolo altrettanto importante. Scegliendo come riferimento il punto 1, definiamo il logaritmo come l'integrale di $1/z$, in completa analogia con la caratterizzazione del logaritmo in analisi reale,

$$\log z \equiv \int_1^z \frac{dz}{z}\,, \tag{20.1}$$

L'integrale *non dipende dal cammino* se z è in una qualunque regione semplicemente connessa $\mathcal{R}$ che include 1, ma *non include l'origine*. Infatti, in una tale regione $1/z$ è analitica

Per comprendere meglio il carattere di questa funzione, calcoliamo l'integrale lungo un cammino particolare (poiché l'integrale non

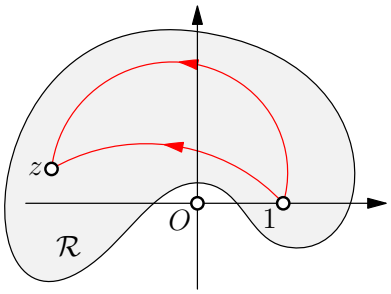


Figura 20.1: L'integrale di linea (20.1) da 1 a z in una regione semplicemente connessa che non include l'origine. L'integrale non dipende dal cammino.

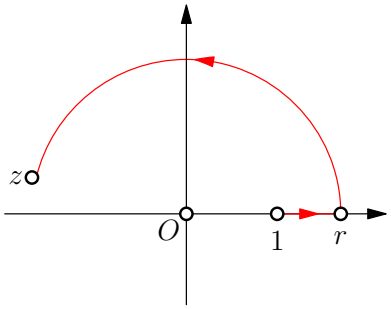


Figura 20.2: Cammino per il calcolo di $\log z$.

dipende dal cammino, scegliamo il cammino più comodo). Posto $z = re^{i\theta}$, conssideriamo il cammino da 1 a r e poi da r a z muovendosi lungo l'arco di cerchio centrato nell'origine e di raggio r da 1 a z (si veda la figura a margine). Allora

$$\log z = \int_1^r \frac{dx}{x} + \int_0^\theta \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = \log r + i\theta$$

Il logaritmo complesso è dunque una funzione di z la cui parte reale è l'usuale logaritmo del modulo di z e la parte complessa è l'angolo o argomento di z. Si capisce dunque l'esigenza di restringere la regione ad una regione semplicemente connessa non contenente l'origine: dopo un giro completo si guadagna un angolo 2π, cioè

$$\oint \frac{dz}{z} = i2\pi\,,$$

in accordo con la formula di Cauchy. Senza questa restrizione, il logaritmo non è più una funzione, cioè un'applicazione che assegna ad ogni punto del suo dominio un solo valore.

MULTIFUNZIONI Si può estendere il logaritmo a tutto il piano complesso eccetto l'origine, se lo si pensa non come una funzione, ma come una *multifunzione* o *funzione polidroma*, intendendo con questo un'applicazione che associa ad ogni elemento del suo dominio un insieme che contiene più elementi.

Se intendiamo il logaritmo in questo senso più generale, allora per ogni numero complesso $z \neq 0$ si ha

$$\log z = \ln|z| + i\arg(z) \tag{20.2}$$

dove $\arg(z) = \theta + 2\pi n$, per $-\pi < \theta \leq \pi$. In questo senso, il logaritmo di un numero complesso assume infiniti valori, cioè $\log z = \{\ln|z| + 2n\pi i\}$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, per esempio, $\log(2+2i) = \{\ln 2\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2n\pi i\}$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$.

Di solito, le multifunzioni emergono per inversione di funzioni che non sono iniettive. In effetti, il logaritmo è l'inverso della funzione esponenziale (come potevamo aspettarci), in quanto

$$e^{\log z} = e^{\log r + i\theta} = re^{i\theta} = z$$

e l'esponenziale complesso non è iniettivo (si rivedano le figure 4.14 e 4.15. Un altro esempio di multifunzione ootenuta per inversione di una funzione non iniettiva è la radice

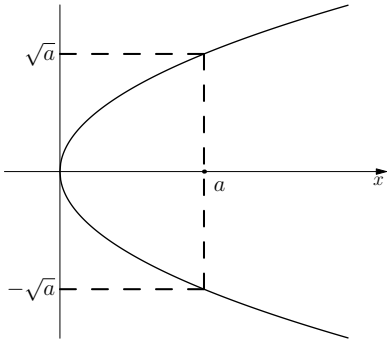
$$\sqrt{z} = z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta+2n\pi)/2} = \{\sqrt{r}e^{i\theta/2}, -\sqrt{r}e^{i\theta/2}\}\,,$$

che assume due valori in ogni punto $z \neq 0$.

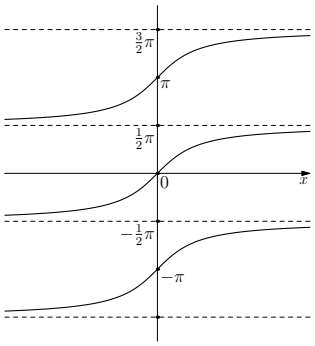
Multifunzioni nel campo reale. Nel campo reale la relazione inversa dell'elevazione al quadrato è la multifunzione "radice quadrata",

$$f(x) \equiv x^{1/2} = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}\,,$$

dove, come sempre, $\sqrt{x}$ denota l'usuale radice quadrata positiva di x. Le due determinazioni di f, $w_1 = \sqrt{x}$ e $w_2 = -\sqrt{x}$, sono dette *rami* (o *branche*) di f. Naturalmente, nel campo reale, $f(x)$ è solo definita per valori positivi di x.



Nel campo reale, i due rami $w_1 = \sqrt{x}$ e $w_2 = -\sqrt{x}$ possono a ragione essere considerati due funzioni completamente distinte in quanto, variando con continuità x tra 0 e $+\infty$, ognuna delle due varia separatamente dall'altra e quando ci si restringe ad una di esse, per esempio w_1, l'altra non entra mai in considerazione. La funzione $w_1 = \sqrt{x}$ è usualmente detta *ramo principale* di $f(x)$. Analogo discorso vale per altre multifunzioni reali, quali le potenze frazionarie $f(x) = x^{n/m}$, per n, m interi o l'arcotangente.



In effetti, proprio perché nel campo reale è impossibile passare con continuità da un ramo all'altro di una multifunzione, la nozione stessa di multifunzione risulta di scarsa utilità e di solito non è neanche menzionata.

Studiamo in dettaglio la radice per portare alla luce i tratti salienti delle multifunzioni. Si fissi un punto $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ del piano. Allora la radice assegna a z_0 due valori

$$w_{01} = \sqrt{r_0} e^{i\theta_0/2} \quad \text{e} \quad w_{02}(z) = -\sqrt{r_0} e^{i\theta_0/2}$$

Si scelga arbitrariamente uno di questi due, diciamo w_{01} e si consideri una qualunque curva chiusa C che circonda l'origine che parta da z_0. Per comodità pensiamo C descritta in forma parametrica e usiamo come parametro l'angolo, per cui rappresentiamo la curva come $z = r(\theta)e^{i\theta}$, con $z(\theta_0) = z_0$. In corrispondenza del movimento di z lungo la curva si ha un movimento nel piano $w = z^{1/2}$ lungo la curva $w(\theta) = \sqrt{r(\theta)} e^{i\theta/2}$, con punto iniziale $w(\theta_0) = w_{01}$. Quando $z(\theta)$ ritorna al punto iniziale,

$$w(2\pi) = \sqrt{r(\theta_0 + 2\pi)} e^{i[\theta_0 + 2\pi]/2} = -\sqrt{r_0} e^{i\theta_0/2} = w_{02}$$

Il che vuol dire che un movimento continuo di punto del piano, lungo una curva chiusa che circonda l'origine, fa passare *con continuità* da un valore all'altro della multifunzione. Si tratta di un fenomeno che non ha nulla di analogo nel campo reale! Questo fenomeno è visualizzato in figura 20.3.

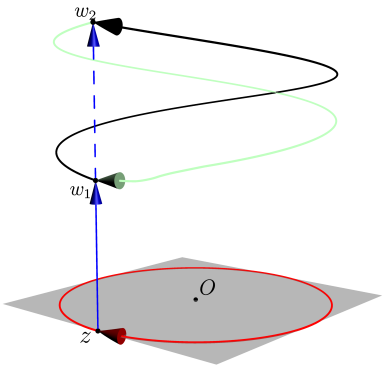


Figura 20.3: Ad un punto z del piano, la multifunzione $w = z^{1/2}$ associa due punti nel piano w. In figura, quest'ultimo piano è stato rappresentato come una linea blu verticale. w_1 e w_2 sono le due immagini di z. Scelto inizialmente il valore w_1, man mano che z si muove lungo una curva chiusa (in rosso) che circonda l'origine, la sua immagine w si muove con continuità fino a portarsi in w_2 alla fine del viaggio. Se adesso si fa compiere al punto z un altro giro, l'immagine w ritorna al suo valore iniziale w_1 (linea verde).

PUNTI DI DIRAMAZIONE Si osservi che se la curva chiusa C non racchiude l'origine il fenomeno non si manifesta: in questo caso la variazione di fase $\Delta\varphi$ dell'immagine è zero, si veda la figura 20.4. Si osservi che se la curva racchiude anche solo di un pelino l'origine, allora $\Delta\varphi = 2\pi$ (cfr. figura 20.5). È dunque naturale chiamare l'origine *punto di diramazione* (o di ramificazione) per la multifunzione $f(z) = z^{1/2}$, in quanto in esso vengono a coincidere i due valori di w, distinti per ogni altro valore z, come se dall'origine si diramassero i due rami della multifunzione. Più in generale, si ha la seguente definizione.

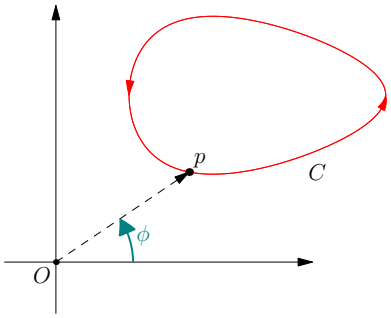


Figura 20.4: Se la curva chiusa non racchiude l'origine, la variazione di fase $\Delta\varphi$ del movimento che parte da p e ritorna in p è zero.

> Il punto q è un punto di diramazione di una multifunzione f se, fissato $w = f(p)$ in qualche punto p, esiste un cammino chiuso attorno a q che inizia e finisce in p tale che $f(z)$ non ritorna al suo valore iniziale w dopo una rivoluzione lungo il cammino. (20.3)

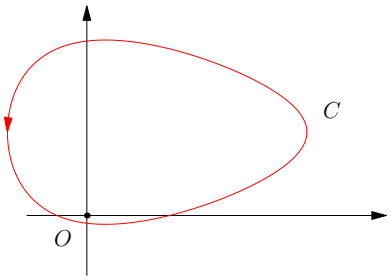


Figura 20.5: Basta che la curva C racchiuda anche di poco l'origine perché si abbia $\Delta\varphi = 2\pi$.

In particolare, se $f(z)$ ritorna per la prima volta al suo valore iniziale dopo N rivoluzioni attorno a q, si dice che q è un punto di diramazione algebrico di ordine $N-1$; per esempio, per $f(z) = \sqrt{z}$, l'origine $z = 0$ è di ordine 1. I punti di diramazione algebrici di ordine 1 sono detti *punti di diramazione semplici*. Se $f(z)$ non ritorna mai al suo valore iniziale, si dice che q è un punto di diramazione logaritmico. Infatti, per il logaritmo vale un discorso analogo a quello fatto

per la radice (muovendosi lungo una curva chiusa che circonda l'origine si passa con continuità da un valore all'altro del logarirmo), ma, continuando a ruotare intorno all'origine, non si ritrova mai il valore iniziale del logaritmo.

RAMI DI UNA MULTIFUNZIONE Mostriamo adesso come si possano estrarre funzioni ad un sol valore da una multifunzione, facendo riferimento alla radice. Si scelga un punto $z_0 \neq 0$ e, arbitrariamente, uno dei due valori di $f(z_0)$, diciamo w_{01}; quindi si lasci z libero di muoversi. In questo modo si ottiene un unico valore $f_1(z)$ associato con ogni cammino che parte da z_0 e finisce in z, *a patto che* il cammino non giri intorno al punto di diramazione $z = 0$. Così si può ottenere una funzione f_1 ad un sol valore restringendo z ad un *insieme semplicemente connesso* S che contiene z_0, ma non contiene l'origine Se inizialmente avessimo scelto l'altro valore w_{02}, mediante costruzione analoga, avremmo ottenuto una differente funzione ad un sol valore, f_2. Le funzioni ad un sol valore così ottenute sono dette *rami* della multifunzione. Si veda la figura 20.6. Più in generale si ha la seguente definizione.

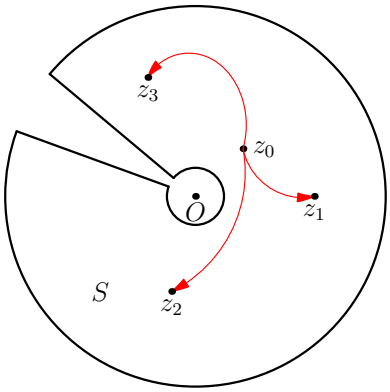


Figura 20.6: A partire da un punto arbitrario z_0 (ma non l'origine) si costruisce una funzione ordinaria nell'insieme connesso S, propagando la scelta di ramo in z_0 a tutti i punti z di S che si possono raggiungere mediante cammini che partono da z_0 (e rimangono in S).

> Sia S un insieme connesso che non contiene il punto (o i punti) di diramazione di una multifunzione f. Siano inoltre z_0 un punto arbitrario in S e $\{w_{01}, w_{02}, \ldots\}$ i valori di f in z_0. I *rami* $f_k(z)$ di f sono le funzioni ad un sol valore che si ottengono propagando f lungo cammini in S da z_0 a $z \in S$ tali che $f_k(z_0) = w_k$. (20.4)

TAGLI Ritornando all'esempio della radice, mostriamo come si possa estendere il dominio S dei rami in modo da ottenere le radici di qualunque punto del piano. La figura 20.6 suggerisce immediatamente come fare: si avvicinino i due archi fino a toccarsi, quindi si faccia tendere a zero il raggio piccolo e all'infinito quello grande. Quello che resta è il piano senza una semiretta dall'origine all'infinito C; quest'ultima è usualmente chiamata *taglio* o *linea di diramazione*. (Si osservi che non è necessario che il taglio sia una semiretta, basta che sia una curva semplice che parte dal punto di diramazione e va all'infinito).

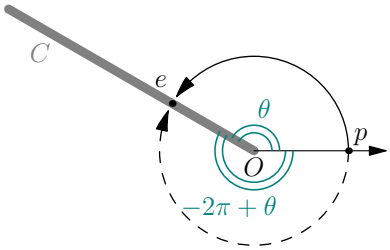


Figura 20.7: Avvicinamento orario e antiorario di z (che parte da p) ad un punto e sul taglio C.

Mostriamo infine che i rami possono essere definiti sul taglio C. Si consideri un punto e sul taglio. Immaginiamo che z viaggi lungo un cerchio centrato nell'origine che passa per e. La figura 20.7 mostra che $f_1(z)$ si avvicina a due valori differenti a seconda che il movimento di z sia orario o anti-orario: per un avvicinamento antiorario a e, $f_1(z) \to re^{i\theta/2}$, mentre per uno orario,

$f_1(z) \to re^{i(-2\pi+\theta)/2} = -re^{i\theta/2}$. A questo punto, se *arbitrariamente* stipuliamo che $f_1(e)$ sia il valore ottenuto per un avvicinamento antiorario, f_1 risulta definita univocamente su C e quindi su tutto il piano complesso. Similmente, possiamo estendere a tutto il piano il dominio di f_2. Il prezzo che si paga per questa estensione è che f_1 e f_2 sono funzioni *discontinue* sul taglio C.

PARTI PRINCIPALI DELL'ANGOLO E RAMO PRINCIPALE Se è presente un solo punto di diramazione, di solito, come taglio si sceglie l'asse reale negativo, il che risulta nella restrizione $-\pi < \theta \leq \pi$. Questa scelta convenzionale definisce la *parte principale dell'angolo* (o dell'argomento), usualmente denotata $\operatorname{Arg}(z)$ e il *ramo principale della funzione* f, a volte denotato con $[f]$.

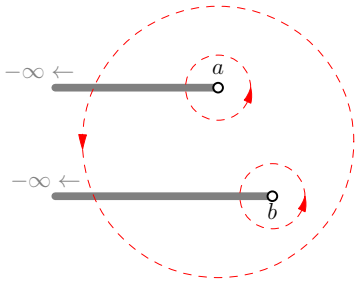


Figura 20.8: a e b: punti di diramazione di una funzione. Se si scelgono come tagli le semirette parallele all'asse reale con estremi a e b, tutti i cammini attorno a a o b o a entrambi sono proibiti (che siano rette e che siano parallele è convenzionale, l'importante è che vadano all'infinito).

ARBITARIETÀ DEI TAGLI È importante aver chiaro che i tagli non sono dettati dalla multifunzione, ma la loro scelta è convenzionale. Il loro ruolo è di estrarre dalla multifunzione delle funzioni ordinarie (cioè ad un solo valore) e quindi la la loro scelta è largamente arbitraria. Per esempio, se la funzione ha due punti di diramazione, introducendo due tagli come in figura 20.8, si elimina la *polidromia* (cioè che la funzione abbia più valori). In questo modo si impediscono cammini chiusi attorno ai punti di diramazione. Si osservi che in questo modo si impediscano anche cammini attorno ai due punti.

Ora, buon senso vuole che si proibisca quanto serve allo scopo, niente di meno, ma neanche niente di più. Sembrerebbe quindi che una scelta di taglio più economica, come quella mostrata in figura 20.9, sia sufficiente. Si noti che tale scelta impedisce i cammini chiusi attorno a ciascun punto di diramazione, ma non ad entrambi. Il fatto è che anche girando attorno ad entrambi si può produrre polidromia e la cautela è d'obbligo. Per un caso in cui la ricetta della figura 20.9 è adeguata, si veda l'esempio 20.3 più avanti; si veda il problema 20.1 per un caso in cui non è adeguata.

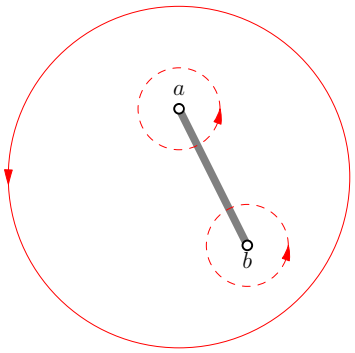


Figura 20.9: a e b: punti di diramazione di una funzione. Si sceglie come taglio il segmento tra a e b. Con questa scelta, solo i cammini attorno a ciascun punto di diramazione sono proibiti, mentre il cammino attorno ai due punti di diramazione è permesso.

ESEMPIO 20.1. Le *potenze frazionarie*, $w = z^{p/q}$ (con p e q primi tra loro) sono multifunzioni. Perché?

Soluzione. Per la stessa ragione per cui la radice quadrata è una multifunzione: l'origine è un punto di diramazione. In fatti, la specificazione dell'angolo di z a meno di multipli interi di 2π diventa rilevante quando la eleviamo alla potenza p/q:

$$w = r^{p/q}e^{i(p/q)(\theta+2n\pi)} = r^{p/q}e^{i(p/q)\theta}e^{i(2np\pi)/q} \quad n = 0, 1, 2,$$

Essendo p e q primi tra loro, si hanno q possibili valori distinti di w,

$$w_n = r^{p/q}e^{i(p/q)\theta}e^{i(2np\pi)/q} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, q$$

(passato q non si trovano nuovi valori). Quindi, per questa funzione, l'origine è un punto di diramazione algebrico di ordine $q-1$. □

ESEMPIO 20.2. Sia $w = f(z) = \sqrt[3]{z}$. Introdurre i tagli e caratterizzare il suo ramo principale $[\sqrt[3]{z}]$. Trovate nulla di strano?

Soluzione. Per quanto visto sopra, $z = 0$ è un punto di diramazione algebrico di ordine 2. Per il taglio, seguiamo la consuetudine di scegliere l'asse reale negativo, per cui il ramo principale è caratterizzato dalla condizione $-\pi < \theta \leq \pi$. La stranezza è questa: $[\sqrt[3]{z}]$ concorda con la radice cubica reale sull'asse positivo, ma non su quello negativo, dove si ha $[\sqrt[3]{-1}] = e^{i\pi/3}$.

Si osservi che gli altri due rami possono essere espressi in termini del ramo principale come $e^{i2\pi/3}[\sqrt[3]{z}]$ e $e^{i4\pi/3}[\sqrt[3]{z}]$. □

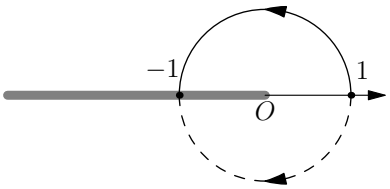


Figura 20.10: Nel ramo in cui si ha $\sqrt[3]{1} = 1$ (ramo principale, $-\pi < \theta \leq \pi$) si ha $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$.

ESEMPIO 20.3. Sia $w = f(z) = \sqrt{z^2+1}$.

(a) Dimostrare che $z = \pm i$ sono punti di diramazione per $f(z)$.

(b) Dimostrare che un giro completo attorno ad ambedue i punti di diramazione non produce alcun cambiamento di ramo per $f(z)$.

(c) Quali tagli si possono fare per definire i rami di $f(z)$ su tutto il piano?

Soluzione. (a) Per prima cosa osserviamo che

$$w = f(z) = \sqrt{z^2+1} = \sqrt{(z+i)(z-i)}\,.$$

È quindi abbastanza naturale aspettarsi che i e $-i$ siano punti di diramazione. Per mostrare che i è un punto di diramazione dobbiamo trovare un cammino chiuso C attorno a i, che parte da un punto z dove è stato scelto $w = f(z)$ e che ha la seguente proprietà: muovendo la funzione lungo , al ritorno in z la funzione cambia valore. Lo stesso va fatto per $-i$.

La situazione è descritta nella figura 20.11 dove è disegnata (in blu) una curva C che avvolge i e passa per un generico punto z. La figura mostra che z può essere espresso come (solita regola della somma di vettori)

$$z = -i + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{oppure} \quad z = i + r_2 e^{i\theta_2}\,,$$

Naturalmente, sia θ_1 sia θ_2 sono a meno di multipli interi di 2π, un fatto che diventa rilevante quando del numero si prendano potenze frazionarie (come è stato sottolineato sopra)[1]. Per cui se scriviamo

$$w = \sqrt{(z+i)(z-i)} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2}\,, \qquad (20.5)$$

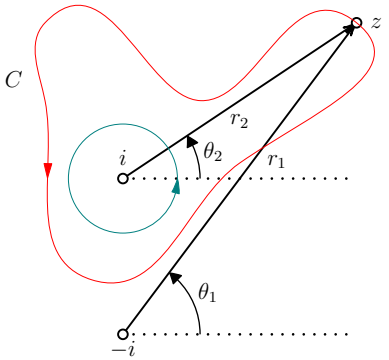


Figura 20.11: Cammino C (in blu) lungo cui la funzione cambia ramo.

[1] Per il momento non ci restringiamo alla parte principale dell'angolo, questo lo faremo più avanti.

il numero a secondo membro è solo uno dei possibili valori nella funzione in z. Ma quel che conta, per dimostrare che i è un punto di diramazione, è fissare un valore della multifunzione e poi muovere il punto lungo la curva.

I dettagli della curva sono irrilevanti: conta soltanto la variazione angolare (cerchio verde della figura). Dopo un giro completo si ha

$$e^{i\theta_2/2} \quad \rightsquigarrow \quad e^{i(\theta_2+2\pi)/2} = -e^{i\theta_2/2}$$

Per poter concludere che questo cambiamento di segno di $e^{i\theta_2/2}$ comporta un cambiamento di w, dobbiamo vedere che cosa succede agli altri fattori a secondo membro della (20.5): $\sqrt{r_1 r_2}$ è la radice usuale di un numero positivo e ovviamente non cambia e che cosa accade a $e^{i\theta_1/2}$ ce lo mostra la figura: mentre z si muove lungo C, l'angolo θ_1 va avanti e indietro: raggiunge un valore massimo a sinistra e poi, quando z ritorna al suo valore iniziale, anch'esso ritorna al suo valore iniziale; dunque, $e^{i\theta_1/2}$ non cambia.

In definitiva, w cambia di segno. Poichè mutatis mutandis lo stesso ragionamento si applica a $-i$, concludiamo che $+i$ e $-i$ sono punti di diramazione della funzione (20.5).

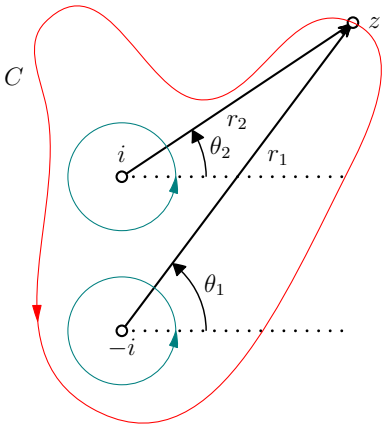


Figura 20.12: Cammino C (in blu) che avvolge i e $-i$.

(b) Deformiano il cammino della figura 20.11 in un cammino che giri attorno anche al punto $-i$ come in figura 20.12. Per quel che riguarda θ_2, valgono gli stessi ragionamenti di prima e la stessa conclusione:

$$e^{i\theta_2/2} \quad \rightsquigarrow \quad e^{i(\theta_2+2\pi)/2} = -e^{i\theta_2/2}$$

Ma non per θ_1. Adesso, quando il punto si muove lungo C e completa il giro ritornando al punto di partenza, anche θ_1 ha una variazione angolare di 2π. Perciò,

$$e^{i\theta_1/2} \quad \rightsquigarrow \quad e^{i(\theta_1+2\pi)/2} = -e^{i\theta_1/2},$$

di conseguenza,

$$w = \sqrt{r_1 r_2} e^{i\theta_1/2} e^{i\theta_2/2} \quad \rightsquigarrow \quad \sqrt{r_1 r_2}\left[-e^{i\theta_1/2}\right]\left[-e^{i\theta_2/2}\right] = w$$

In conclusione, *il movimento lungo una curva che racchiude entrambi i punti di diramazione della funzione* $f(z) = \sqrt{z^2+1}$ *non comporta un cambiamento di ramo della funzione stessa*.

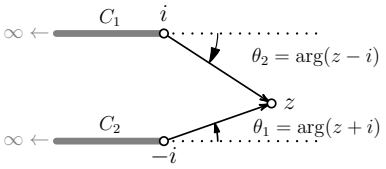


Figura 20.13: $C-1$ e C_2: tagli standard per la funzione $w = f(z) = \sqrt{z^2+1}$.

(c) La scelta più semplice per i tagli è quella di prendere un taglio da i all'infinito (che impedisce di girare attorno al punto i) e un altro taglio da $-i$ all'infinito, per la stessa ragione. La figura figura 20.13 mostra una scelta particolarmente importante e comune: linee che vanno a Ovest. Se non permettiamo a z di attraversare i tagli, possiamo restringere l'angolo $\theta_1 = \arg(z+i)$ al suo valore principale, nell'intervallo $-\pi < \theta_1 \leq \pi$. Se $\theta_2 = \arg(z-i)$ è similmente ristretto

al suo valore principale nell'intervallo $-\pi < \theta_2 \leq \pi$, allora la (20.5) diventa il ramo principale di $f(z)$, di solito denotato $[f](z)$. L'altro ramo è semplicemente $-[f](z)$.

Sulla basa della conclusione di (b) è possibile fare una scelta di tagli più economica: quella mostrata nella figura 20.14. In questo caso la ricetta illustrata dalla figura 20.9 funziona proprio perchè per una curva che gira intorno a entrambi i punti di diramazione, come la C in figura, non fa cambiare ramo alla funzione. □

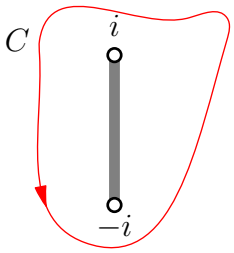


Figura 20.14: Un solo taglio per la funzione $w = f(z) = \sqrt{z^2+1}$.

SINGOLARITÀ E PUNTI DI DIRAMAZIONE ALL'INFINITO Abbiamo detto che la rappresentazione dei numeri complessi come punti della sfera di Riemann rende manifesto che una funzione complessa ha un carattere di continuità sconosciuto nel campo reale. Questo fatto risulta ancora più evidente quando si considerano multifunzioni. Consideriamo, ad esempio, una funzione che, come $w = \sqrt{z^2+1}$, ha due punti di diramazione, diciamo a e b. Sulla sfera complessa, il taglio è sempre una curva tra a e b. La differenza tra le due possibilità considerate sopra, diventa la possibilità che il taglio passi o no per ∞.

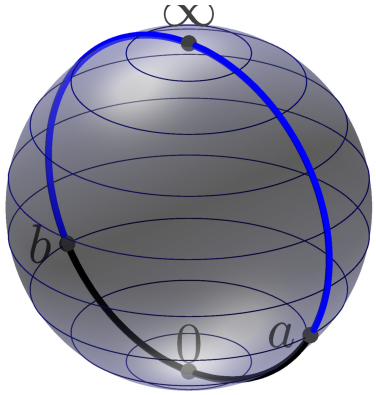


Figura 20.15: Il taglio (in blu) passante per ∞ corrisponde al taglio della figura 20.13; quello passante per 0 a quello della figura 20.14.

Per far pratica, prima si risponda alla domanda se $w = \sqrt{z^2+1}$ ha un punto di diramazione all'infinito, ragionando sulla figura 20.15, poi si passi ai problemi alla fine del capitolo.

20.2 *Rilevanza per le serie di potenze*

Già Newton conosceva la serie binomiale per *n numero reale* arbitrario

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \dots$$

L'intervallo di convergenza della serie è $-1 < x < 1$ (cfr. problema **??**).

Come spiegare questo intervallo di convergenza, per esempio per $n = 1/3$? Il criterio 4.23 sembra non funzionare in quanto la funzione $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ non ha singolarità. A differenza della funzione $1/(1+x^2)$, il mistero non scompare quando si passa alla funzione complessa

$$f(z) = (1+z)^{1/3}$$

perchè $f(z)$ non ha singolarità. Però non è una funzione ordinaria, è una multifunzione con punto di diramazione di secondo ordine in $z = -1$: per esempio, i suoi tre valori in 0 sono: $f(0) = \{1, e^{i2\pi/3}, e^{-i2\pi/3}\}$.

La multifunzione $f(z)$ è definita ovunque nel piano complesso e i suoi tre rami, dopo aver introdotto un taglio, ad esempio quello standard $-\infty < x < -1$, sono anch'essi definiti ovunque. Al contrario, la serie

$$(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1}{9}z^2 + \frac{5}{81}z^3 + \dots$$

è centrata nello zero e ha raggio di convergenza $R = 1$. Poiché la serie vale 1 nello 0, essa rappresenta *solamente* il ramo di $f(z)$ in cui si ha $f(0) = 1$.

Quest'ultima osservazione è la chiave per risolvere il mistero. Poiché una serie di potenze non può essere polidroma, un punto di diramazione è un ostacolo per la convergenza di una serie tanto quanto lo è una singolarità. Alla luce di questo, il criterio (4.23) va così modificato:

> Se una funzione complessa $f(z)$ o un ramo di una multifunzione $f(z)$ possono essere espressi come una serie di potenze centrata in u, allora il raggio di convergenza è la distanza tra u e la singolarità o il punto di diramazione più vicino. (20.6)

Esempio 20.4 (Serie del ramo principale del logaritmo). Il ramo principale del logaritmo è di solito denotato con Log,

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,(z)\,, \qquad -\pi < \mathrm{Arg}\,(z) \leq \pi$$

$\mathrm{Log}(1+z)$ può essere sviluppato in serie di Taylor (si veda il prossimo capitolo), ottenendo una formula che è formalmente la stessa del caso reale

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \dots \tag{20.7}$$

Usando il criterio del rapporto, si può vedere che questa serie converge nel disco unitario, eccetto $z = -1$. (la serie di $-\mathrm{Log}(1-z)$ è

proprio la serie di cui si è studiata la convergenza nell'esercizio (4.8) nei complementi del capitolo 16). Ponendo $z = 1$ si trova

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Ci sono altri casi speciali interessanti. Ponendo $z = i$ e uguagliando le parti reale e immaginaria, si ottiene

$$\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Per verificare la prima serie, si osservi che se $z = 1$, allora $\ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln(1+z)$.

20.3 *Integrale di una funzione con punti di diramazione*

Supponiamo di voler calcolare l'integrale

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \tag{20.8}$$

con metodi di analisi complessa. Sembrerebbe una scelta folle, visto che l'integrale lo si può calcolare agevolmente con i metodi del calcolo reale mediante la sostituzione $x = \cos\theta$ e ancora più agevolmente con quelli della geometria della scuola elementare: I è l'area del semicerchio di raggio 1 e quindi $I = \pi/2$. Ma c'è del metodo in questa follia: vogliamo usare (20.8) come palestra per integrali più complicati che contengono punti di diramazione.

Consideriamo la multifunzione che abbiamo già incontrato varie volte

$$f(z) = \sqrt{z^2-1} = \sqrt{(z-1)(z+1)}$$

Ha punti di diramazione semplici per $z = +1$ e $z = -1$. Scegliamo come taglio il segmento che unisce $z = +1$ e $z = -1$ e consideriamo il ramo principale della multifunzione corrispondente al ramo $0 \le \theta < 2\pi$, $z = e^{i\theta}$. Adesso consideriamo il contorno a "cappio" (o a "osso per cani") mostrato in figura 20.3.

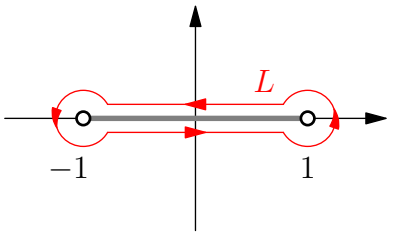


Figura 20.16: Contorno a "cappio".

Per z sull'asse reale appena sopra il taglio (diciamo per $z = x + i\epsilon$, $\epsilon \downarrow 0$), abbiamo $(z^2-1)^{1/2} = i\sqrt{1-x^2}$, mentre appena sotto si ha $(z^2-1)^{1/2} = -i\sqrt{1-x^2}$. Sia L il contorno chiuso mostrato in figura 20.3, dove intorno a $+1$ e -1 ci sono due percorsi circolari di raggio δ che aggirano i punti di diramazione. Nel limite $\delta \downarrow 0$ gli integrali lungo questi percorsi circolari danno contributo nullo, quindi

$$\oint_L (z^2-1)^{1/2}dz = \int_1^{-1} i\sqrt{1-x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} \left(-i\sqrt{1-x^2}\right) dx = -2iI\,,$$

da cui

$$I = \frac{i}{2}\oint_L (z^2-1)^{1/2} dz\,.$$

Poiché non ci sono singolarità tra L e C_R, possiamo deformare il contorno d'integrazione da L a C_R, un cerchio di raggio $R > 1$ (per maggiori dettagli sulla deformazione di cammini si veda la sezione 18.9), come nella figura 20.17, e ottenere

$$I = \frac{i}{2}\oint_{C_R} (z^2-1)^{1/2} dz\,.$$

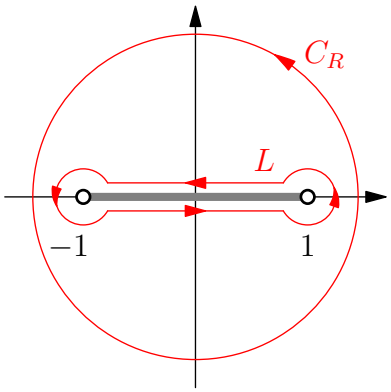


Figura 20.17: Deformazione del contorno.

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Dalla (19.10) otteniamo

$$I = (2\pi i)\frac{i}{2}\mathsf{Res}\left\{\frac{1}{w^2}\sqrt{\frac{1}{w^2}-1}, 0\right\}$$

Ora, $\dfrac{1}{w^2}\left(\dfrac{1}{w^2}-1\right)^{1/2} = \dfrac{1}{w^3}(1-w^2)^{1/2} = \dfrac{1}{w^3}\left(1-\dfrac{1}{2}w^2+\ldots\right)$.
Quindi $\mathsf{Res}\{\} = -\frac{1}{2}$ e dunque

$$I = (2\pi i)\frac{i}{2}\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\pi}{2}$$

Probabilmente, questo è il modo più complicato che ci sia per calcolare l'area del semicerchio di raggio 1! Ma, come abbiamo detto, il metodo nella follia era di illustrare come calcolare integrali in cui compaiono punti di diramazione e mettere in evidenza che per questi integrali torna utile la nozione di residuo all'infinito.

20.4 *Sviluppo in serie di Taylor*

Uno dei teoremi più importanti della teoria delle funzioni analitiche stabilisce che una funzione analitica è sempre sviluppabile in serie di Taylor.

Sia $f(z)$ analitica all'interno e lungo un cerchio C con centro in $z = a$. Allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{20.9}$$

dove

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ\,.$$

Il teorema è una conseguenza diretta della formula di Cauchy $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\dfrac{f(Z)}{Z-z}dZ$, dove C_R è un cerchio di raggio R centrato in a, dentro il quale la funzione è analitica. Infatti, se assumiamo per semplicità $a = 0$ e raccogliamo Z a denominatore nella formula di Cauchy, otteniamo

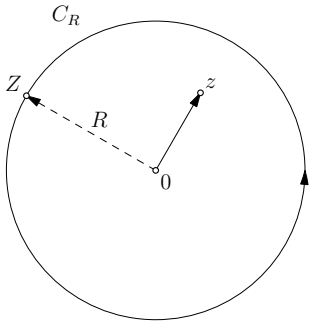


Figura 20.18: Z è un generico punto sul cerchio di raggio R, z è dentro al cerchio, $|z| < |Z| = R$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(Z)}{Z}\left[\frac{1}{1-(z/Z)}\right]dZ \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(Z)}{Z}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{Z^n}\right]dZ \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(Z)}{Z^n}dZ\right]z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,,\quad c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(Z)}{Z^{n+1}}dZ
\end{aligned}
\tag{20.10}
$$

Il primo passaggio è giustificato in quanto z è dentro al cerchio C_R su cui è Z, per cui $|z/Z| < 1$. Lo scambio della serie con l'integrale nel secondo passaggio in questo caso è lecita, come mostrato nella dimostrazione data a margine. Chiaramente, per traslazione, la dimostrazione si estende ad un qualunque centro di espansione a.

Qual è il raggio di convergenza della serie che abbiamo ottenuto? Sappiamo che se f è analitica dentro C, allora la serie (20.10) converge a $f(z)$ in quel disco. Perciò, riferendoci alla figura 20.19, vediamo che C_R può essere espanso fino al cerchio tratteggiato, dove incontra la prima singolarità di f. Più in generale, $f(z)$ potrebbe essere un ramo a un sol valore di una multifunzione e, come abbiamo imparato, i punti di diramazione agiscono come un ostacolo tanto quanto i poli. Perciò risulta dimostrato in maniera definitiva il principio (20.6): il raggio di convergenza è la distanza dal centro di espansione alla singolarità più vicina, sia essa un polo, un punto di diramazione o una singolarità essenziale.

Essendo $c_n = f^{(n)}(a)/n!$, una conseguenza immediata del teorema (20.9) è la formula (18.25), che abbiamo ottenuto nella sezione 18.9 mediante derivazione sotto il segno di integrale. Riscriviamo questa formula,

$$
f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(Z)}{(a-Z)^{n+1}}dZ\,,
$$

osservando che C, per deformazione, può essere una qualunque curva chiusa che contiene a, purché $f(z)$ sia analitica all'interno di e su C. Questa formula è interessante per due ragioni. In primo luogo, mostra che *se f è analitica, cioè derivabile una volta, lo è anche infinite volte*, un risultato che non ha alcun analogo nell'analisi reale. In secondo luogo, fornisce il calcolo della derivata in termini di un integrale! Da un punto di vista pratico, è utile che essa permetta di fare anche il viceversa (visto che in genere calcolare derivate è più semplice che calcolare integrali).

Dimostrazione completa di (20.9).
Dimostriamo che

$$
f_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(Z)}{Z^n}dZ\right]z^n
$$

converge a $f(z)$ quando N tende all'infinito. Il resto della serie geometrica è (problema 4.14)

$$
\frac{1}{1-(z/Z)} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{z^n}{Z^n} = \frac{(z/Z)^N}{1-(z/Z)}
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
f(z) - f_N(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(Z)}{Z}\left[\frac{(z/Z)^N}{1-(z/Z)}\right]dZ \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z-z}dZ\,,
\end{aligned}
$$

da cui

$$
|f(z) - f_N(z)| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\left|\frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z-z}\right|dZ
$$

Detto M il massimo di $|f(Z)/(Z-z)|$ (che esiste ed è finito), si ha

$$
\frac{1}{2\pi}\oint_{C_R}\left|\frac{(z/Z)^N f(Z)}{Z-z}\right| \le RM|(z/R)|^N
$$

Perciò $\lim_{N\to\infty} f_N(z) = f(z)$, che è quanto si voleva dimostrare. □

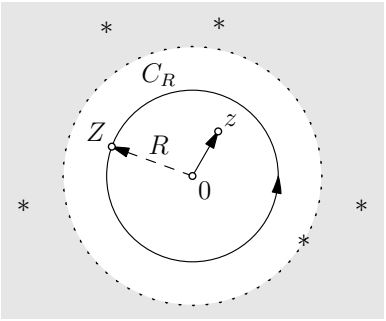


Figura 20.19: La serie diverge nella regione in grigio e converge nel disco bianco.

20.5 *Sviluppo in serie di Laurent*

Nella sezione 19.2 abbiamo mostrato che se a è un polo, la funzione $f(z)$ è della forma

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,. \qquad (19.2)$$

Il teorema di Laurent, stabilisce che un'espansione di questa forma esiste sempre:

Teorema di Laurent. Sia $f(z)$ analitica dappertutto dentro un anello centrato in a. Allora
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ dove $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$ (20.11)
e K è una qualunque curva semplice chiusa nell'anello (che contiene il disco interno).

La parte in potenze negative di questa serie è detta *parte principale*.

Ciò che è davvero notevole, è l'*esistenza* della serie di Laurent, non il fatto che converga in un anello. Poiché sappiamo che una serie di potenze in $(z-a)$ converge dentro a un disco centrato in a, sappiamo anche che una serie di potenze in $1/(z-a)$ convergerà fuori dal disco centrato in a. Essendo, per definizione, una serie di Laurent la somma di una serie di potenze in $(z-a)$ e una serie di potenze in $1/(z-a)$, ne segue che la convergenza è in un anello.

La (19.2) stabilisce l'esistenza di una serie in prossimità di un polo. Il Teorema di Laurent è molto più potente: non fa alcuna assunzione riguardo a quello che succede alla funzione nel disco interno D (vedi figura). In pratica, il disco esterno può essere espanso fino a incontrare la singolarità s di $f(z)$, e quello interno contratto fino a che non si raggiunge la singolarità più esterna r che sta in D.

Se non ci sono singolarità in D, il bordo interno può collassare completamente trasformando così l'anello in un disco. In questo caso, la serie non contiene potenze negative. Infatti, se n è negativo, allora $f(Z)/(Z-a)^{n+1}$ è analitica dappertutto dentro K e quindi $c_n = 0$. In questo modo si ritrova il teorema di Taylor come caso particolare del teorema di Laurent.

Supponiamo che a sia una singolarità e che per ϵ sufficientemente piccolo non ci siano altre singolarità in una distanza ϵ da a. In altre parole, a è una singolarità isolata. Applicando il teorema di Laurent all'anello $0 < |z-a| < \epsilon$, realizziamo che ci sono due differenti possibilità: o la parte principale ha un numero finito di termini o ne ha infiniti. Se il numero è finito a è un polo, se è infinito, è una singolarità essenziale del tipo di quella che abbiamo incontrato per $e^{1/z}$. Morale: *una singolarità isolata o è un polo o è una singolarità essenziale.*

Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) è stato un matematico francese, noto per la serie che porta il suo nome. Aveva esposto la sua scoperta in una memoria sottoposta per un premio dell'Accademia delle Scienze, ma memoria non arrivò entro i termini prescritti e non fu mai considerata per il premio. Fu pubblicata solo dopo la sua morte.

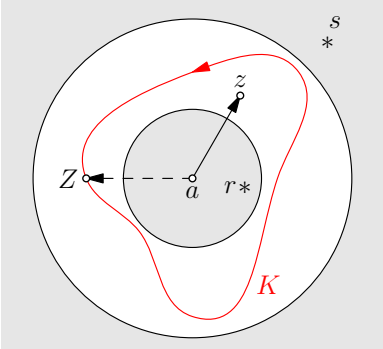


Figura 20.20: La serie converge nell'anello bianco.

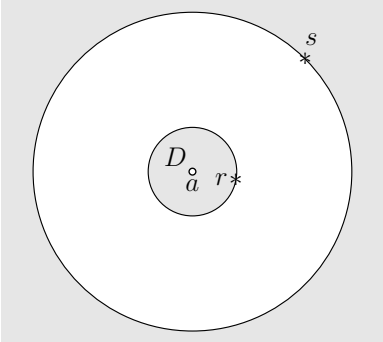
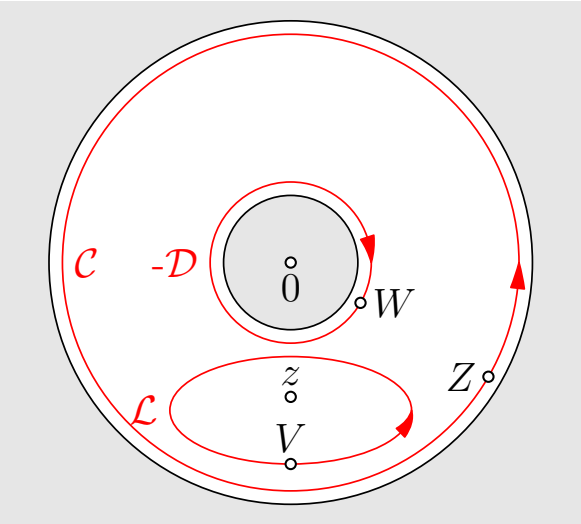


Figura 20.21: L'anello può essere steso verso l'esterno e l'interno fino ad incontrare le singolarità di f più vicine.



Dimostrazione del teorema di Laurent. Per comodità, sia $a = 0$. Si usino le notazioni della figura a lato: $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono cerchi percorsi in senso antiorario, tali che z è compreso tra di loro; $\mathcal{L}$ è un circuito semplice antiorario attorno a z, che sta dentro l'anello. Z, W e V sono rispettivamente punti generici sulle curve $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{L}$. Suddividiamo la dimostrazione in tappe. (1) Dalla formula di Cauchy, $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{L}} \frac{f(V)}{V-z} dV = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z-z} dZ - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{W-z} dW$. (poiché $\mathcal{L}$ può essere deformato in $(\mathcal{C}) + (-\mathcal{D})$). (2) Riscriviamo l'equazione precedente come $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z}\left[\frac{1}{1-(z/Z)}\right] dZ + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z}\left[\frac{1}{1-(W/z)}\right] dW$. Il significato di questo è che $|(z/Z)| < 1$ e $|(W/z)| < 1$, cosicchè entrambi gli integrandi a secondo membro possono essere espansi in serie geometriche. (3) Procedendo come per la serie di Taylor, si ottiene $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z}\left[\frac{1}{1-(z/Z)}\right] dZ = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ\right] z^n$. (4) Un ragionamento sostanzialmente identico a quello fatto per la serie di Taylor giustifica l'integrazione termine a termine dell'integrale attorno a $\mathcal{D}$: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{D}} \frac{f(W)}{z}\left[\frac{1}{1-(W/z)}\right] dW = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{D}} W^{n-1} f(W) dW\right]\left(\frac{1}{z}\right)^n$. (5) L'esistenza della serie di Laurent è stabilita: $f(z) = \ldots + \frac{d_3}{z^3} + \frac{d_2}{z^2} + \frac{d_1}{z^1} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$, dove $d_m = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{D}} W^{m-1} f(W) dW$ e $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ$. (6) Due osservazioni conclusive permettono di rifinire il risultato ed arrivare alla tesi del teorema: (I) Gli integrali che definiscono d_m e c_n non cambiano se permettiamo a $\mathcal{C}$ di contrarsi e a $\mathcal{D}$ di espandersi fino a che non si fondono nello stesso loop semplice K mostrato in figura. (II) Se scriviamo $m = -n$ l'integrale che definisce il coefficiente d_{-n} di z^n ha integrando $W^{-n-1} f(W) = f(W)/W^{n+1}$, che è lo stesso integrando dei c_n. Arriviamo così alla forma compatta $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ dove $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(Z)}{(Z-a)^{n+1}} dZ$ che è proprio quanto si voleva dimostrare. □

ESEMPIO 20.5. Calcolare i coefficienti c_n di un sviluppo di Laurent usando la formula dele teorema (20.11) non sempre è facile. Spesso si possono generare serie di Laurent direttamente dalla formula per la serie geometrica. Si consideri per esempio la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$

che è ovunque analitica eccetto in $z = a$. Cerchiamo una serie di Laurent per questa funzione con centro di espansione $z = 0$. Possiamo manipolare la funzione usando la serie geometrica e ottenere

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-(a/z)}\right) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a^3}{z^4} + \ldots .\end{aligned}$$

Questo è lo sviluppo di Laurent della funzione che converge per $|z| > |a|$.

ESEMPIO 20.6. Sviluppare

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

in serie di Laurent valevole per

(a) $1 < |z| < 3$

(b) $|z| > 3$

Soluzione. (a) Scomponendo in fratti semplici,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1/2}{z+1} - \frac{1/2}{z+3}\,.$$

Se $|z| > 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+1} &= \frac{1}{2z}\left[\frac{1}{1+z^{-1}}\right] = \frac{1}{2z}\left[1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots\right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots\end{aligned}$$

Se $|z| < 3$,

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1+z/3}\right] = \frac{1}{6}\left[1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} - \frac{z^3}{3^3} + \dots\right] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{z}{6\times 3} + \frac{z^2}{6\times 3^2} - \frac{z^3}{6\times 3^3} + \dots\end{aligned}$$

La serie di Laurent richiesta è dunque

$$\dots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{6\times 3} - \frac{z^2}{6\times 3^2} + \frac{z^3}{6\times 3^3} + \dots$$

(b) Se $|z| > 1$, si ha, come prima

$$\frac{1/2}{z+1} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \dots$$

Naturalmente, questa serie vale, *a fortiori*, per $|z| > 3$. Per l'altro fratto semplice, per $z > 3$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{1/2}{z+3} &= \frac{1}{2z}\left[\frac{1}{1+3z^{-1}}\right] = \frac{1}{2z}\left[1 - \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} - \frac{3^3}{z^3} + \dots\right] \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{3^2}{2z^3} - \frac{3^2}{2z^4} + \dots\end{aligned}$$

Quindi, per sottrazione delle singole serie,

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \dots$$

□

Espansione in multipoli La serie di Laurent è, dal punto di vista fisico, un'espansione in multipoli. Chiariamo questo con un esempio. Supponiamo che una funzione $f(z)$, altrimenti analitica, abbia un polo triplo nell'origine. Allora

$$f(z) = \frac{p}{z^3} + \frac{d}{z^2} + \frac{q}{z} + a + bz + cz^2 + \dots$$

Nell'intorno della singolarità, il comportamento della funzione è governata dalla sua parte principale, il cui campo coniugato è

$$\overline{\mathbf{P}} \leftrightarrow \frac{\overline{p}}{\overline{z}^3} + \frac{\overline{d}}{\overline{z}^2} + \frac{\overline{q}}{\overline{z}}$$

Riconosciamo la sovrapposizione di un quadrupolo, di un dipolo e di una combinazione sorgente/vortice del tipo già incontrato ($\overline{q} = A - iB$). La parte principale della serie corrisponde quindi ad una *espansione in multipoli*. La serie di Laurent e il teorema dei residui possono dunque essere interpretati fisicamente come segue. Il solo termine capace di generare flusso e circolazione è $\overline{q}/\overline{z}$, che può essere a sua volta decomposto in un vortice di intensità $\mathscr{C} = -2\pi \mathrm{Im}(q)$ e una sorgente di intensità $\mathscr{F} = 2\pi \mathrm{Re}(q)$. Tutti gli altri termini corrispondono a multipoli che non generano né circolazione ne flusso; un insieme finito di questi è nel polo, mentre il resto è all'infinito.

20.6 *Prolungamento analitico*

Si supponga di considerare la funzione analitica definita dallo sviluppo in serie di Taylor

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \tag{20.12}$$

all'interno del cerchio di convergenza C_1 (si veda figura a lato). Quanta libertà abbiamo di costruire una funzione analitica $f(z)$ che all'interno del cerchio C_1 sia data dalla serie sopra e in altre regioni del piano complesso sia definita in modo indipendente? Nessuna!

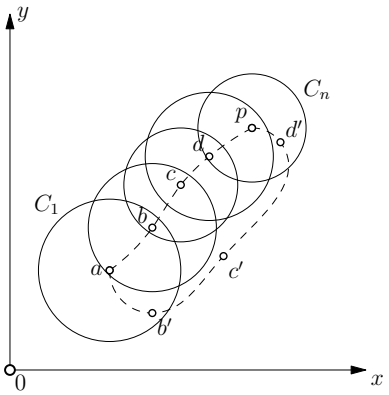


Figura 20.22: Prolungamento analitico.

Spieghiamo perché. Scelto un punto b dentro C_1, il valore di $f(z)$ e delle sue derivate in b è determinato dalla (20.12) e risulta quindi unicamente definito lo sviluppo in serie di Taylor in b

$$b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + \dots \tag{20.13}$$

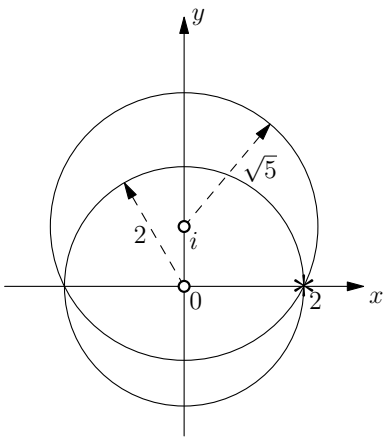
che ha cerchio di convergenza C_2. Se C_2 si espande oltre C_1, il valore della funzione e delle sue derivate risulta determinato in questa zona più ampia. Si dice in tal caso che la funzione è stata *prolungata analiticamente* oltre C_1 e il procedimento seguito si dice di *continuazione analitica* o *prolungamento analitico*. Naturalmente, il procedimento può essere continuamente ripetuto: scelto un punto c dentro C_2 si arriva ad una nuova serie che ha cerchio di convergenza C_3 che può estendersi oltre C_1, C_2, ecc.

L'insieme di tutte tale rappresentazioni in termini di serie di potenze, cioè di tutti i possibili prolungamenti analitici *definisce* la funzione analitica $f(z)$. Ogni serie di potenze del tipo (20.12) è detta *elemento* della funzione e il succo di quanto abbiamo appena spiegato

è che fissatone un elemento, tutti gli altri elementi della funzione, e quindi la funzione stessa, risultano determinati: dunque, nessuna libertà di definire a nostro piacimento la funzione in diverse regioni del piano complesso.

Nel realizzare il prolungamento analitico occorre evitare le singolarità. Ad esempio, in figura 20.22, non vi può essere alcuna singolarità che si trovi dentro C_2 e su C_1, perchè altrimenti la serie divergerebbe in quel punto. In alcuni casi, le singolarità sul cerchio di convergenza sono talmente tante che il prolungamento analitico diventa impossibile. In tali casi si dice che il cerchio di convergenza è una *barriera naturale*.

Passando dal cerchio C_1 al cerchio C_n in figura 20.22, si è scelto il percorso che passa attraverso in centri $a, b, c, \dots p$. Sono possibili altri percorsi, ad esempio il percorso $a, b', c', \dots p$ mostrato in figura, e se i cerchi lungo i percorsi non contengono singolarità (come deve essere perchè si abbia prolungamento analitico), la funzione analitica così individuata non dipende dal percorso.



Esempio 20.7. Le serie

$$(a) \quad \sum_0^\infty \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad \text{e} \quad (b) \quad \sum_0^\infty \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

sono prolungamento analitico l'una dell'altra.

Per il criterio del rapporto, la serie (a) converge nel disco $|z| < 2$. In questo disco, la serie (che è una serie geometrica con primo termine $1/2$ e ragione $z/2$) può essere sommata e rappresenta la funzione

$$f(z) = \frac{1/2}{1 - z/2} = \frac{1}{2 - z}\,.$$

Per il criterio del rapporto, la serie (b) converge per

$$\frac{|z-i|}{|2-i|} < 1,$$

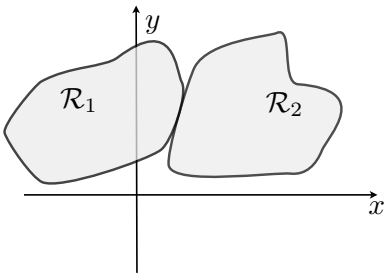
cioè per $|z - i| < \sqrt{5}$. In questo disco, la serie (che è una serie geometrica con primo termine $1/(2-i)$ e ragione $(z-i)/(2-i)$ può essere sommata e rappresenta la funzione

$$\frac{1/(2-i)}{1 - (z-i)/(2-i)} = \frac{1}{2-z}\,.$$

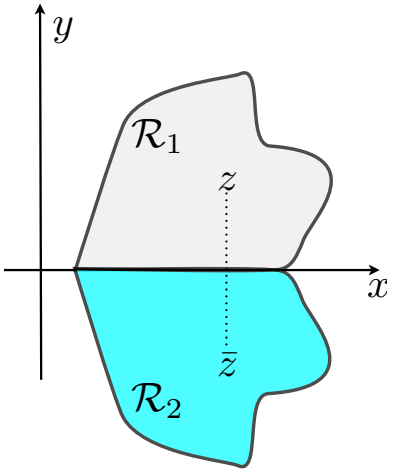
Dato che le serie rappresentano la stessa funzione nella regione interna ad entrambi i cerchi $|z| = 2$ e $|z - i| = \sqrt{5}$, ne segue che sono prolungamento analitico l'una dell'altra.

La nozione di prolungamento analitico vale anche per regioni che non sono delimitate da cerchi. Sia $f_1(z)$ una funzione che è analitica

in una regione $\mathcal{R}_1$ e supponiamo di trovare una funzione $f_2(z)$ che è analitica in una regione $\mathcal{R}_2$ e che è tale che $f_1(z) = f_2(z)$ in $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Allora $f_2(z)$ è una continuazione analitica di $f_1(z)$. Perché ci sia continuazione analitica è sufficiente che le due regioni abbiano in comune soltanto un piccolo arco.



Mediante continuazione analitica a regioni $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$, . . . , possiamo estendere la regione iniziale ad altre parti del piano complesso. Le funzioni $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, . . . sono ancora chiamate *elementi* della funzione. Il *teorema di unicità* stabilisce che la continuazione analitica è unica, a meno che nel processo di estensione non si incontrino punti di diramazione. L'unicità del prolungamento analitico è garantita dall'unicità della serie di Taylor. Un importante strumento di estensione analitica è *il principio di Schwartz*. Questo teorema stabilisce che se una funzione $F_1(z)$ è analitica in una regione $\mathcal{R}_1$ del semipiano superiore Π^+, avente come bordo l'asse reale, e ha un valore reale sull'asse reale, allora può essere estesa alla regione $\mathcal{R}_2$, ottenuta da $\mathcal{R}_1$ per riflessione sull'asse reale, nel modo illustrato nella figura a lato.



$$F_2(z) = \overline{F_1(\bar{z})}$$

Esempio 20.8 (Prolungamento analitico della funzione gamma). Per $\operatorname{Re} z > 0$, la funzione gamma è definita da

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \,. \tag{20.14}$$

w continua a valere la formula di ricorrenza (17.44) che, per z complesso riscriviamo come

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{dove} \quad \Gamma(1) = 1 \,. \tag{20.15}$$

(la dimostrazione è del tutto analoga a quella per z reale positivo).

Per $\operatorname{Re} z < 0$, la definizione (20.14) perde di significato, perché l'integrale diverge. La funzione gamma nel semipiano sinistro risulta però univocamente definita per prolungamento analitico. Per mostrare questo, dimostriamo preliminarmente la formula

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \tag{20.16}$$

per ogni intero n. Dalla (17.44), si ha

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \\
&\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1) = (z+1)z\Gamma(z) \\
&\Gamma(z+3) = (z+2)\Gamma(z+2) = (z+2)(z+1)z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

e, in generale

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)\ldots(z+2)(z+1)z\Gamma(z)$$

che è proprio la formula che si voleva dimostrare. Dalla (20.16), e dalla (20.14), la funzione gamma risulta così definita per $\mathrm{Re}\, z \geq -n$, salvo che nei poli semplici $z = 0, -1, -2, \ldots - n$. Dato che la (20.16) vale per qualunque intero n, la gamma risulta ovunque definita nel piano complesso eccetto che nell'origine e in tutti gli interi negativi, che sono poli semplici della funzione.

20.7 *La funzione zeta di Riemann**

La funzione zeta di Riemann $\zeta(z)$ è definita, per $\mathrm{Re}\, z > 1$ dalla serie

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Questa serie era già stata considerata da Eulero nel 1740 per z intero positivo e successivamente estesa da Chebyshev a z reale e maggiore di uno.

Si osservi che la sostituzione $u = t/n$ nell'integrale che definisce la funzione gamma (20.14) fornisce

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} (un)^{z-1} e^{-un} n du = n^z \int_0^{\infty} u^{z-1} e^{-nu} du\,,$$

da cui

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt$$

per $\mathrm{Re}\, z > 1$. Ora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} \tag{20.17}$$

se $t > 0$. Se $z = x + iy$, allora

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| t^{z-1} e^{-nt} \right| dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt\,. \tag{20.18}$$

Per grandi t, $1/e^t - 1 \sim e^{-t}$ e per piccoli t, $1/e^t - 1 \sim 1/t$. Ne segue che per $x > 1$ l'integrale nella (20.18) converge. Allora nella (20.17) si può scambiare la serie con l'integrale. Perciò

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \tag{20.19}$$

Questa equazione fu il primo risultato ottenuto da Riemann in suo famoso lavoro del 1859. Il secondo fu di mostrare che, rappresentando l'integrale a secondo membro della come integrale di contorno nel piano complesso t si otteneva l'equazione

$$\zeta(z) = \frac{\Gamma(1 - z)}{2\pi i} I(z) \tag{20.20}$$

dove $I(z)$ è analitica ovunque, con zeri per $2, 3, 4, \ldots$. Questi zeri di $I(z)$ cancellano i poli di $\Gamma(1-z)$, che sono $1, 2, 3, 4, \ldots$, eccetto il polo $z = 1$. Poiché il secondo membro della (20.20) è definito ovunque nel piano complesso eccetto in $z = 1$, la (20.20) definisce il prolungamento analitico della ζ a tutto il piano complesso. Se ne conclude che la zeta di Riemann è una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ con un polo in $z = 1$. Dall'espressione esplicita di $I(z)$, che qui non diamo, risulta che $z = 1$ è un polo semplice con residuo pari a 1. Sempre nello stesso lavoro del 1859, Riemann deduce la seguente equazione funzionale per la ζ:

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z)\zeta(1-z)\,. \tag{20.21}$$

ZERI DELLA ζ. Il lavoro di Riemann del 1859 incomincia con un riferimento al seguente risultato di Eulero:

$$\zeta(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_n^{-z}} \tag{20.22}$$

se $\operatorname{Re} z > 1$, dove $p_1, p_2, p_3, \ldots$ è la successione dei numeri primi. Per dimostrare questo risultano, si usi la serie geometrica per esprimere $1/(1 - p_n^{-z})$:

$$\frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{m=1}^{\infty} p_n^{-mz}$$

e quindi

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - p_n^{-z}} = \sum_{j=1}^{\infty} n_{N,j}^{-z}\,,$$

dove $n_{N,1}, n_{N,2}, n_{N,3}, \ldots$ sono tutti gli interi che possono essere fattorizzati come prodotti di potenze dei numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Facendo tendere N all'infinito, si ottiene l'equazione (20.22).

Poiché il prodotto (20.21) contiene fattori che non possono annullarsi, $\zeta(z) \neq 0$ per $\operatorname{Re} z > 1$. Supponiamo adesso che $\zeta(z) = 0$ e $\operatorname{Re} z < 0$. Poiché $\zeta(1-z) \neq 0$, l'equazione funzionale (20.21) implica

$$\Gamma(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0\,.$$

Poiché Γ non ha radici, abbiamo $z = 2k$, per interi $k < 0$, come radici. I pari negativi sono detti zeri banali della ζ. La striscia $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ è chiamata la *striscia critica*. Tutti gli zeri non banali della ζ devono stare nella striscia critica.

Supponiamo adesso che z sia nella striscia critica e che $\zeta(z) = 0$. Poiché $\sin(\pi z/2) \neq 0$, vediamo che $\zeta(1-z) = 0$. Vale a dire, le radici non banali, o *radici critiche*, sono simmetriche rispetto alla retta critica $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. Si osservi inoltre che, essendo $\zeta(z)$ reale per z reale, le radici della ζ sono simmetriche rispetto all'asse reale.

Per il suo studio sulla distribuzione dei numeri primi, Riemann ha bisogno di stimare il numero di radici della funzione ζ in una scatola nella striscia critica simmetrica rispetto alla retta critica. Ottiene una tale stima (dimostrata poi rigorosamente nel 1905 da Van Mangoldt) e quindi osserva che il numero di zeri sulla retta critica è circa lo stesso (*nessuno ha mai dimostrato questo!*). Quindi, continua dicendo che è "molto probabile" che tutte le radici nella striscia critica stiano sulla retta critica. Questa affermazione è nota come *ipotesi di Riemann*. Riemann continua dicendo:

> Naturalmente, sarebbe desiderabile avere una dimostrazione rigorosa di questo, ma ho deciso di lasciare da parte la ricerca di una tale dimostrazione, dopo qualche vano e fugace tentativo, perché non è necessario per l'oggetto immediato della mia investigazione.

Oggi, 152 anni dopo, dopo innumerevoli sforzi di molti matematici, non abbiamo ancora ragioni per ritenere o non ritenere che l'ipotesi di Riemann sia vera. L'ipotesi di Riemann resta uno dei problemi aperti della matematica più affascinanti e suggestivi.

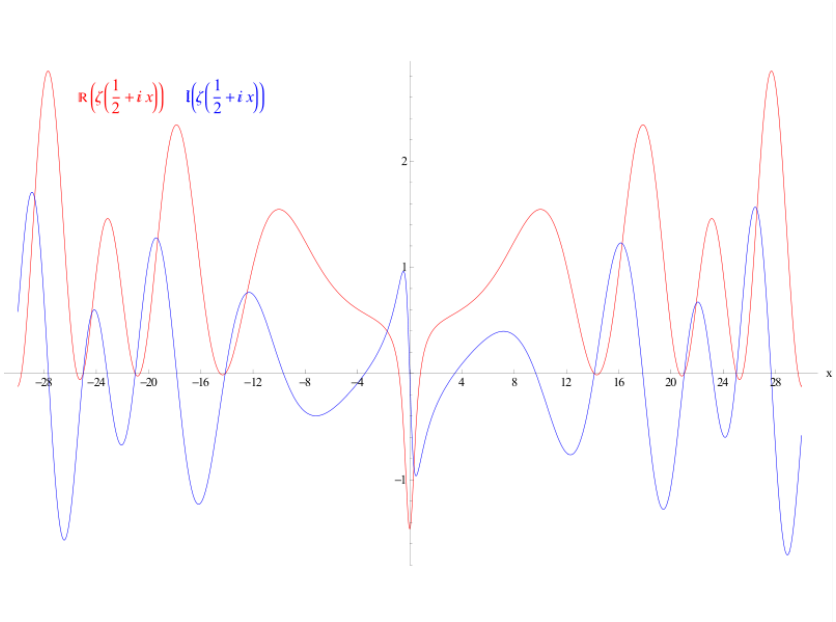


Figura 20.23: Parte reale (in rosso) e parte immaginaria (in blu) della funzione di Riemann lungo la retta critica $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$. I primi zeri non banali si hanno per $\operatorname{Im} z = \pm 14.135, \pm 21.022$ e ± 25.011.

La funzione ζ di Riemann compare in teoria dei numeri, in statistica, come un possibile modo di regolarizzare serie divergenti in teoria quantistica dei campi, nell'analisi dell'effetto Casimir (forza attrattiva tra le armature di un condensatore in assenza di campi dovuta alle fluttuazioni di vuoto del campo eletromagnetico quantizzato), nella teoria dei sistemi dinamici e nello studio del comportamento caotico di sistemi nel regime semi-classico.

20.8 Il teorema di rappresentazione di Riemann

È un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua estrema generalità. La sua dimostrazione esula dai limiti i questo corso. Ci limitiamo ad enunciarlo:

> Sia C una linea chiusa semplice del piano z che costituisce la frontiera di una regione $\mathcal{R}$. Sia $\mathbb{T}$ il cerchio di raggio unitario e centro nell'origine che costituisce la frontiera del disco unitario $\mathbb{D}$ nel piano $z^\star$. Allora esiste una funzione $z^\star = f(z)$ analitica in $\mathcal{R}$, che rappresenta ogni punto di $\mathcal{R}$ su un punto corrispondente di $\mathbb{D}$ e ogni punto di C su un punto corrispondente di $\mathbb{T}$, in una corrispondenza biunivoca. (20.23)

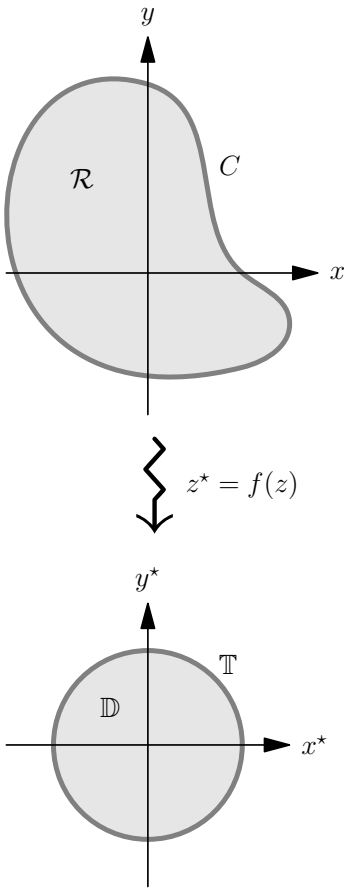


Figura 20.24: Rappresentazione di Riemann nel disco unitario.

Teorema del punto fisso di Brouwer. Si supponga di far coincidere il piano $z^\star$ con il piano z in modo che gli assi delle coordinate coincidano e che formino quindi sostanzialmente un solo piano. Si può allora pensare alla trasformazione $z^\star = f(z)$ come ad una rappresentazione di certi punti del piano in altri punti. I punti per i quali $z = f(z)$ resteranno fermi: per questa ragione si dice che sono i *punti fissi* o *invarianti* della trasformazione. Se f è complicata è difficile determinare se f ha punti fissi e quali sono. Grazie a Brouwer, sappiamo che ce ne sarà sempre almeno uno. Vale infatti il seguente teorema:

> Ogni trasformazione continua del disco unitario $\mathbb{D}$ in sé stesso ha almeno un punto fisso. (20.24)

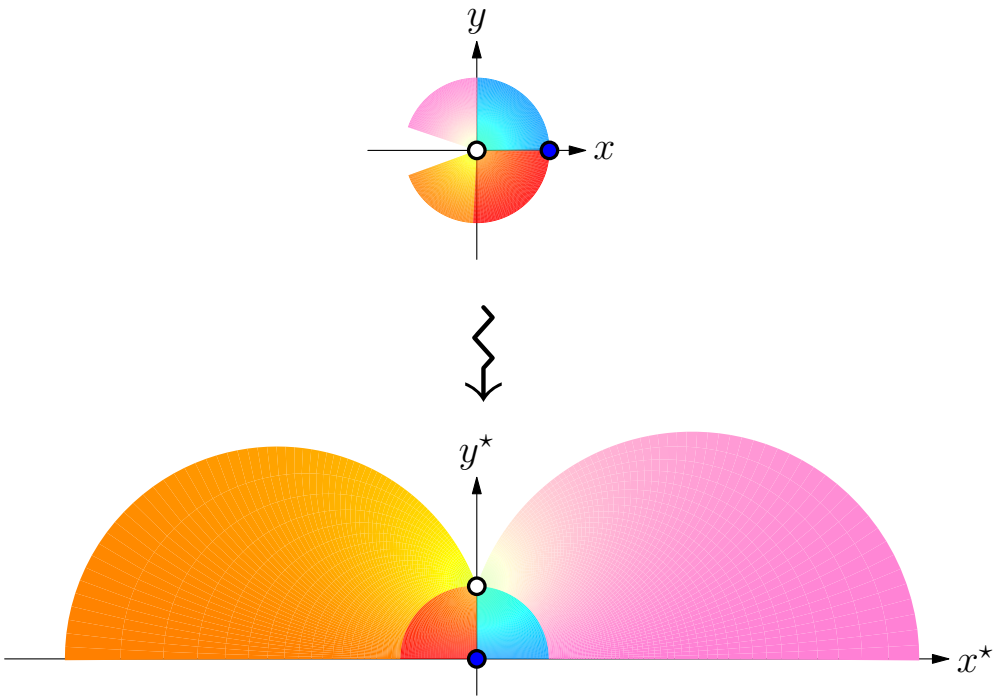
Anche questo è un teorema che ispira rispetto e ammirazione per la sua generalità.

L. E. J. Brouwer (1881–1966) è stato un matematico e filosofo danese che ha lavorato in topologia, teoria degli insiemi e anali complessa. È noto per l'approccio costruttivo, noto come intuizionismo, in filosofia della matematica.

Esempi di trasformazioni conformi

Esempio 20.9 (Rappresentazione di un cerchio in un semipiano e viceversa).

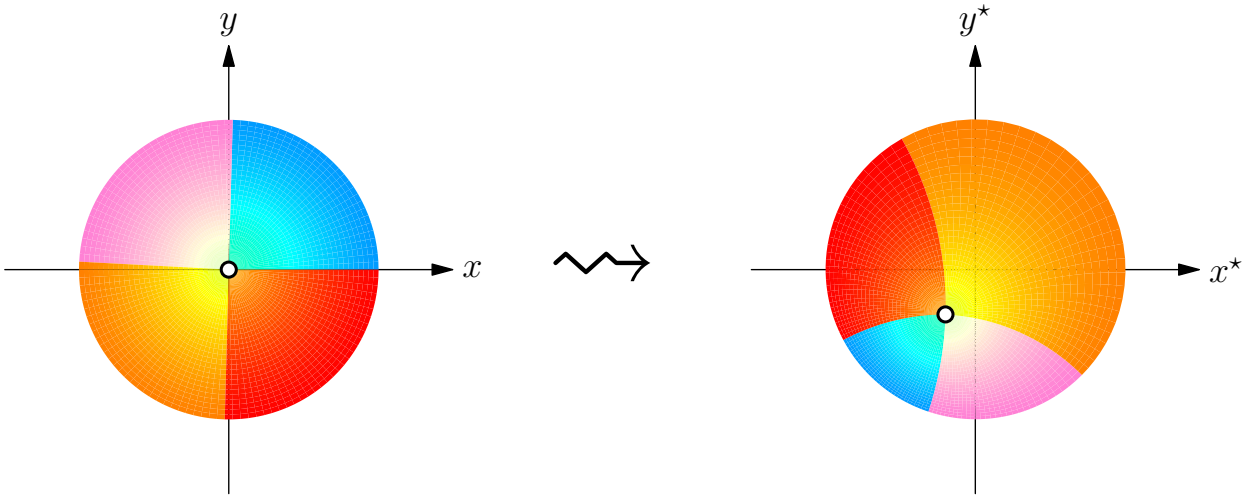
$$z^\star = i\left(\frac{1-z}{1+z}\right) \qquad z = \frac{i-z^\star}{i+z^\star}$$



Si osservi che si tratta di una trasformazione di Möbius. Si vede che il centro del cerchio $z = 0$ finisce in $z^\star = i$ e che $z = -1$ corrisponde a $z^\star = \infty$, mentre $+1$ finisce nello zero. Il semicerchio inferiore finisce nell'asse reale negativo e quello superiore in quello positivo.

Esempio 20.10 ("Swap" tra un punto qualunque nel cerchio unitario e centro del cerchio).

$$z^\star = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}\,, \qquad |a| < R = 1 \tag{20.25}$$



Anche questa è una trasformazione di Möbius, denotiamola $M_a(z)$.
La matrice associata è

$$[M_a] = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ \overline{a} & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché il determinante $-1 + |a|^2 \neq 0$, la trasformazione è invertibile (essendo $|a| < 1$). Lo swap si vede immediatamente:

$$M_a(0) = a \quad \text{e} \quad M_a(a) = 0$$

Inoltre, si verifica facilmente che questa trasformazione rappresenta il disco unitario $\mathbb{D}$ in sè stesso: notiamo che

$$|z - a|^2 = |z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + |a|^2$$

$$|\overline{a}z - 1|^2 = |a|^2|z|^2 - a\overline{z} - \overline{a}z + 1$$

sottraendo membro a membro

$$|z-a|^2 - |\overline{a}z-1|^2 = (1-|a|^2)(|z|^2-1) < 0 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1\,.$$

Quindi $|z - a| < |\overline{a}z - 1|$, da cui

$$|z^\star| = \frac{|z-a|}{|\overline{a}z-1|} < 1 \quad \text{quando} \quad |z| < 1, |a| < 1\,.$$

e quindi $z^\star$ sta dentro il disco unitario $\mathbb{D}$.

Problemi

Problema 20.1. □ Si consideri la multifunzione $f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt[3]{z-i}$. Dove sono i punti di diramazione e qual è il loro ordine? Perchè non è possibile usare un solo taglio per definire i rami della multifunzione?

Problema 20.2. □ Si consideri la multifunzione $f(z) = \sqrt{z^2-1}$. Trovare i punti di diramazione e il loro ordine. L'infinito è un punto di diramazione? Quali tagli si possono fare per definire i rami della multifunzione su tutto il piano?

Problema 20.3. □ Si considerino le multifunzioni

(a) $\sin\sqrt{z}$

(b) $\sqrt{\sin z}$

(c) $\sqrt{z}\sin\sqrt{z}$

(d) $\sqrt{\sin z^2}$.

Trovare i punti di diramazione e il loro ordine.

Problema 20.4. □ Trovare i punti di diramazione di $f(z) = \sqrt[3]{z^3-z}$. Introdurre i tagli.

Problema 20.5. □ Costruire un ramo di $f(z) = \sqrt[3]{z^2+1}$ tale che $f(0) = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$

Problema 20.6. □ Trovare i punti di diramazione sul piano complesso esteso ($\mathbb{C}\cup\infty$) delle multifunzioni

$$(a)\ \log(z^2-1), \quad (b)\ \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

e introdurre tagli per rendere le funzioni ad un solo valore.

Problema 20.7. □ Determinare e classificare tutte le singolarità di

(a) $\dfrac{z}{(z^2+4)^2}$,

(b) $\sec\dfrac{1}{z}$,

(c) $\dfrac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$,

(d) $\dfrac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

Problema 20.8. □ Calcolare

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

$[2\pi/\sqrt{3}\,]$

Problema 20.9. □ Dimostrare che

(I)
$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin p\pi},\ 0<p<1$$

(II)
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$$

(III)
$$\int_0^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \pi\ln 2$$

Problema 20.10. □ Sviluppare

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

in serie di Laurent valevole per

(a) $0<|z+1|<2$

(b) $|z|<1$

Problema 20.11. □ Dimostrare che la serie

$$1+z+z^2+z^4+z^8+\ldots = 1+\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

non può essere prolungata analiticamente oltre $|z|=1$ (il cerchio $|z|=1$ è la barriera naturale della serie).

Problema 20.12. □ Sia

$$F_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt}dt$$

(i) Dimostrare che $F_1(z)$ è analitica in tutto il semipiano destro $\mathrm{Re}(z)>0$.

(ii) Determinate una funzione $F(z)$ che prolunga analiticamente $F_1(z)$ nel semipiano sinistro $\mathrm{Re}(z)<0$.

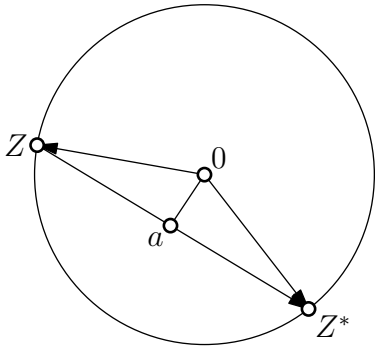
Problema 20.13. □ Dimostrare che l'inversione complessa $z\mapsto 1/z$ è conforme.

Problema 20.14. □ Dimostrare che le trasformazioni di Möbius sono conformi. (Si veda il problema 1.14).

PROBLEMA 20.15. □ Mostrare che per effetto della trasformazione (20.25),

$$Z^\star = \frac{Z - a}{\bar{a}Z - 1}\,, \qquad |a| < R = 1\,,$$

un punto Z sul cerchio di raggio 1 si trasforma nel punto $Z^\star$, estremo delle corda che passa per Z e per a, secondo la costruzione geometrica in figura.

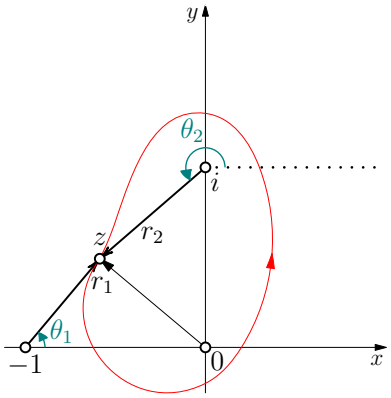


Soluzioni

Problema 20.1. □ La multifunzione

$$f(z) = \sqrt{z+1}\sqrt[3]{z-i}$$

è il prodotto di 2 multifunzioni $Z \mapsto \sqrt{Z}$ e $W \mapsto \sqrt[3]{W}$. È quindi ragionevole supporre che $Z = 0$, cioè $z = -1$ e $W = 0$, cioè $z = i$ siano punti di diramazione di f.



Con riferimento alla figura a lato, poniamo

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z = i + r_2 e^{i\theta_2}$$

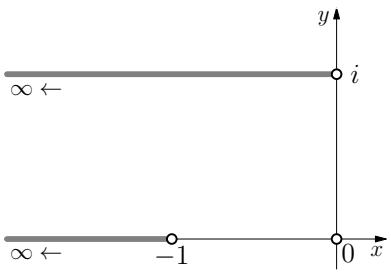
da cui

$$f(z) = w = \sqrt{z+1}\sqrt[3]{z-i} = \sqrt{r_1}\sqrt[3]{r_2}e^{i(\theta_1/2+\theta_2/3)} = \sqrt{r_1}\sqrt[3]{r_2}e^{i\theta_1/2}e^{i\theta_2/3}$$

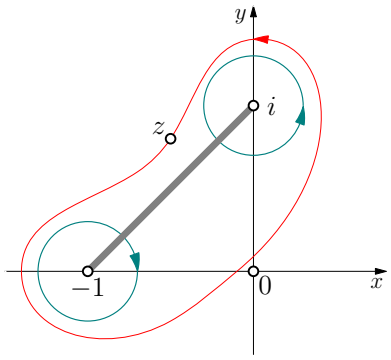
questo corrisponde alla scelta di uno dei valori di f in z. Per dimostrare che i è un punto di diramazione, consideriamo un cammino chiuso attorno a i. I dettagli della curva sono irrilevanti: conta soltanto la variazione angolare (cerchio rosso della figura). Dopo un giro completo si ha

$$e^{i\theta_2/3} \quad \rightsquigarrow \quad e^{i(\theta_2/3+2\pi/3)},$$

cioè la radice ha cambiato valore ed è passata nel suo secondo ramo. Mentre z compie un giro attorno a i, l'angolo θ_1 va avanti e indietro: raggiunge un valore massimo a sinistra e poi, quando z ritorna al suo valore iniziale, anch'esso ritorna al suo valore iniziale. Quindi complessivamente $f(z)$ varia in un giro completo per la sola variazione dovuta alla sola radice cubica. Fine della dimostrazione che i è un punto di diramazione. Analogo ragionamento per -1 porta alla conclusione che anche -1 è un punto di diramazione. Poiché ci vogliono due giri per tornare al valore iniziale, $z = -1$ è un punto di diramazione semplice; per i ce ne voglio tre e dunque è dunque è di ordine 2.



I tagli standard per ottenere rami ad un sol valore dalla funzione di partenza sono mostrati nella figura a lato. Non è possibile ottenere rami ad un sol valore con il solo taglio congiungente il punti di diramazione perchè pur essendo le le "velocità angolari" opposte in senso di rotazione sono di diverso modulo (una è $1/2$ e l'altra è $1/3$), e non ci può essere compensazione dopo un giro completo. Si veda la figura a lato.



Problema 20.2. □ $f(z) = \sqrt{z^2-1} = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}$, al finito, ha due punti di diramazione semplici in $z = \pm 1$. Per valutare se $f(z)$ ha un punto di diramazione all'infinito, si considera $F(z) = f(1/z)$ per $z = 0$. Ma

$$F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{1}{z^2}-1} = \sqrt{\frac{1}{z^2}}\sqrt{1-z^2} = \frac{1}{z}\sqrt{1-z^2}.$$

Quindi $z = 0$ non è un punto di diramazione di F e di conseguenza $z = \infty$ non è un punto di diramazione di f.

PROBLEMA 20.3. □ (a) $f(z) = \sin\sqrt{z}$. Se si considera un giro attorno a 0 lungo il cerchio unitario $|z| = 1$, partendo, per esempio, da $\theta = 0$, si ha:

$$\sin e^{i(\theta=0)/2} = \sin(1) \quad \Longrightarrow \quad \sin e^{i(\theta=2\pi)/2} = \sin e^{i\pi} = \sin(-1) = -\sin(1)$$

Quindi $\sin\sqrt{z}$ ha un punto di diramazione semplice nello zero. Poichè un giro lungo $|z| = 1$ è anche un giro attorno all'infinito, anche l'infinito è un punto di diramazione della funzione.

(b) $f(z) = \sqrt{\sin z}$. Il seno si annulla per $z = n\pi$ ed è singolare all'infinito Ci potrebbero essere dei punti di diramazione in questi punti. Consideriamo il punto $z = n\pi$. Possiamo scrivere

$$\sin z = (z - n\pi)\frac{\sin z}{z - n\pi}\,.$$

La funzione

$$g(z) = \frac{\sin z}{z - n\pi}$$

è non nulla e non ha una "vera" singolarità in $z = n\pi$, in quanto[2]

$$\lim_{z\to n\pi} \frac{\sin z}{z - n\pi} = \lim_{z\to n\pi} \frac{\cos z}{1} = (-1)^n$$

[2] Quando la singolarità è solo apparente e può essere "eliminata" si dice appunto *singolarità eliminabile.*

Allora, in un piccolo intorno di $n\pi$ si ha

$$\sin z = (z - n\pi)(-1)^n$$

Quindi, poiché $\sqrt{z - n\pi}$ ha un un punto di diramazione semplice per $z = n\pi$ anche $\sqrt{\sin z}$ avrà un punto di diramazione semplice per $z = n\pi$.

Poiché tutti i punti di diramazione $z = n\pi$ vanno fino all'infinito, l'infinito non è una singolarità isolata, ma un punto di accumulazione di singolarità. Un punto di diramazione deve essere una singolarità isolata e quindi l'infinito non è un punto di diramazione.

(c) $f(z) = \sqrt{z}\sin\sqrt{z}$. La funzione è a un sol valore. Dimostrazione veloce:

$$\begin{aligned} z^{1/2}\sin z^{1/2} &= \pm\sqrt{z}\sin(\pm\sqrt{z}) \\ &= \pm\sqrt{z}(\pm\sin(\sqrt{z}) \\ &= \sqrt{z}\sin\sqrt{z} \end{aligned}$$

(d) $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$. Poiché $\sin z^2 = 0$ per $z = (n\pi)^{1/2}$, questi potrebbero essere punti di diramazione. Possiamo scrivere

$$\sin z^2 = z^2\frac{\sin z^2}{z^2}$$

dove la funzione $\sin z^2/z^2$ è non nulla e ha una singolarità eliminabile per $z = 0$: per $z \to 0$ la funzione tende a 1. Poichè $\sqrt{z^2}$ non ha un punto di diramazione in 0, lo stesso vale per $f(z)$. Consideriamo adesso il punto $z = (n\pi)^{1/2}$,

$$\sin z^2 = \left(z - \sqrt{n\pi}\right) \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}}$$

$\sin z^2/(z - \sqrt{n\pi})$ è non nulla e ha una singolarità eliminabile per $z = \sqrt{n\pi}$

$$\lim_{z\to\sqrt{n\pi}} \frac{\sin z^2}{z - \sqrt{n\pi}} = \lim_{z\to\sqrt{n\pi}} \frac{2z\cos z^2}{1} = 2\sqrt{n\pi}(-1)^n$$

Poiché $\left(z - \sqrt{n\pi}\right)^{1/2}$ ha un punto di diramazione in $z = \sqrt{n\pi}$, anche $\sqrt{\sin z^2}$ lo avrà. Quindi $f(z) = \sqrt{\sin z^2}$ ha punti di diramazione semplici in $z = \sqrt{n\pi}$ per $n = \pm 1, \pm 2 \pm 3, \ldots$. Il punto all'infinito non è una singolarità isolata.[3]

[3] E poichè non è neanche un polo, è una singolarità essenziale (le definizioni di polo e di singolarità essenziale saranno date in una lezione successiva).

PROBLEMA **20.4.** □ Per trovare i punti di diramazione di

$$f(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$$

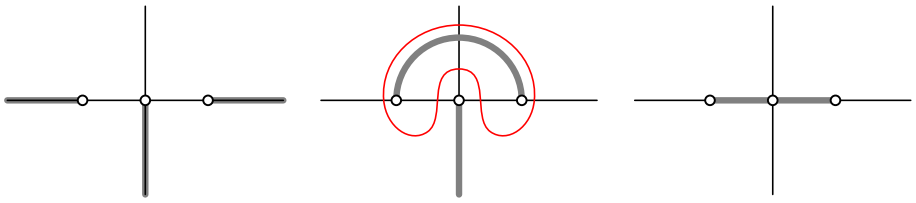
espandiamo $f(z)$,

$$f(z) = z^{1/3}(z-1)^{1/3}(z+1)^{1/3}$$

Ci sono punti di diramazione di ordine 2 in $z = -1, 0, 1$. Facendo la sostituzione $z \mapsto 1/z$ si vede che non ci sono punti di diramazione all'infinito in quanto

$$F(z) = f(1/z) = \frac{1}{z}(1-z)^{1/3}(1+z)^{1/3}$$

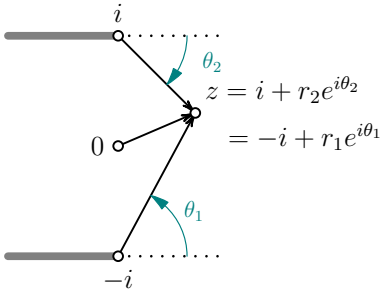
Ci sono tre possibili tagli:



Si vede facilmente che il primo taglio va bene e trasforma la multifunzione in una funzione a un solo valore. Il secondo taglio NON va bene perché permette un giro intorno ai punti ± 1. Un giro intorno a questi due punti fa variare il valore di partenza della funzione di un fattore $e^{i4\pi/3}$, quindi la funzione così ottenuta non è a un sol valore. Il terzo taglio va bene: girando intorno ai tre punti la funzione non cambia ($e^{i6\pi/3} = e^{i2\pi} = 1$); si osservi che questo è anche conseguenza diretta del fatto che l'infinito non è un punto di diramazione.

PROBLEMA 20.5. □ Per prima cosa fattorizziamo $f(z)$,

$$f(z) = (z-i)^{1/3}(z+i)^{1/3}\,.$$



Ci sono punti di diramazione(di ordine 2) in $z = \pm i$. Scegliamo in tagli secondo la convenzione standard, come nella figura a lato. Si ha

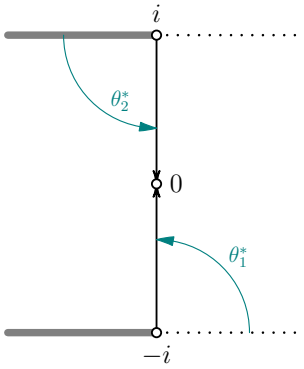
$$f(z) = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^{1/3}\left(r_2 e^{i\theta_2}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{r_1 r_2}\, e^{i(\theta_1+\theta_2)/3}$$

Si vuole determinare il ramo in cui

$$f(0) = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = e^{i(2\pi/3+2\pi n)}\,,$$

cioè il ramo in cui gli angoli θ_1^* e θ_2^* che individuano $z = 0$ (vedere figura a lato) soddisfano

$$\sqrt[3]{1}\, e^{i(\theta_1^*+\theta_2^*)/3} = e^{i(2\pi/3+2\pi n)},$$



dunque, per avere il ramo richiesto, deve valere la relazione

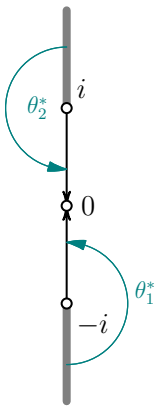
$$\theta_1^* + \theta_2^* = 2\pi + 6\pi n$$

Il ramo suggerito dalla figura con $\theta_1^* = -\pi/2$ e $\theta_2^* = \pi/2$ non va bene. Una scelta possibile è

$$-\pi < \theta_1 \le \pi\,, \quad 5\pi < \theta_2 < 7\pi$$

che corrisponde a $n = 1$. Naturalmente, altre scelte sono possibili.

È possibile anche fare una differente scelta dei tagli. Per esempio, per la scelta di tagli della figura a lato, si può scegliere il ramo



$$\frac{\pi}{2} < \theta_1 \le \frac{5\pi}{2}\,, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_2 \le \frac{3\pi}{2}$$

che corrisponde a $n = 0$.

PROBLEMA 20.6. □

$$(a) \qquad f(z) = \log(z^2-1) = \log(z-1) + \log(z+1)$$

Ci sono punti di diramazione in $z = \pm 1$. Per sapere che cosa succede all'infinito, consideriamo il comportamento nello zero di

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) = \log(z^{-2}) + \log(1-z^2)$$

$\log(z^{-2})$ ha un punto di diramazione in $z = 0$,

$$\log(z^{-2}) = \ln|z^{-2}| + i\arg(z^{-2}) = \ln|z^{-2}| - i2\arg(z)$$

Ogni volta che giriamo intorno allo zero il valore della funzione $F(z)$ cambia di $-4\pi i$. Allora $z = \infty$ è un punto di diramazione di $f(z)$.

Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da $z = \pm 1$ e vanno all'infinito.

$$(b) \qquad f(z) = \log\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \log(z+1) - \log(z-1)$$

Ci sono punti di diramazione in $z = \pm 1$.

$$F(z) = f(1/z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$F(z)$ non ha punti di diramazione nello zero, quindi $f(z)$ non ha punti di diramazione all'infinito.

Possiamo rendere la funzione ad un sol valore introducendo due tagli che partono da $z = \pm 1$ e vanno all'infinito. Possiamo anche rendere la funzione ad un sol valore introducendo un solo taglio che collega i punti $z = \pm 1$. Questo perché $\log(z+1)$ e $-\log(z-1)$ cambiano rispettivamente di $2\pi i$ e $-2\pi i$ quando si percorre un giro completo intorno ai due punti di diramazione nella direzione positiva.

PROBLEMA **20.7.** □

(a)

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2} = \frac{z}{[(z+2i)(z-2i)]^2}$$

È chiaro "a vista" che $2i$ e $-2i$ sono poli di ordine 2 (i poli sono gli zeri della funzione inversa). Questi due poli sono le sole singolarità e dunque la $f(z)$ è meromorfa.

(b)

$$f(z) = \sec(1/z) \equiv \frac{1}{\cos(1/z)}$$

Si hanno singolarità quando $\cos(1/z) = 0$, cioè in $1/z = (2n+1)\pi/2$ o

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Poiché $f(z)$ non è definita in $z = 0$ anche $z = 0$ è una singolarità.

Sulla base di quanto visto a lezione, usiamo la regola che permette di decidere in generale se una singolarità è un polo di ordine m per una funzione analitica con singolarità in $z = a$. Partiamo con $k = 1$:

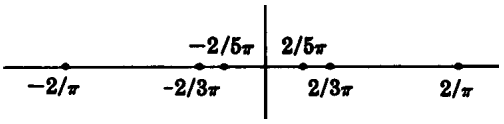
$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2/[(2n+1)\pi]} \left[z - \frac{2}{(2n+1)\pi}\right] f(z) &= \lim_{z\to 2/[(2n+1)\pi]} \frac{z - 2/[(2n+1)\pi]}{\cos(1/z)} \\
&= \lim_{z\to 2/[(2n+1)\pi]} \frac{1}{-\sin(1/z)(-1/z^2)} \quad \text{(Hospital)} \\
&= \frac{\{2/[(2n+1)\pi]\}^2}{\sin[(2n+1)\pi/2]} \\
&= \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2} \neq 0
\end{aligned}$$

Quindi le singolarità

$$z = \frac{2}{(2n+1)\pi} \quad \text{dove} \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

sono *poli di ordine uno*, cioè *poli semplici*. Si osservi che questi poli sono sull'asse reale in

$$z = \pm\frac{2}{\pi}\,,\ \pm\frac{2}{3\pi}\,,\ \pm\frac{2}{5\pi}\ \ldots$$



Ciascuno di questi può essere circondato da un cerchio di raggio δ, e quindi questi punti sono singolarità isolate (come deve essere per un polo); naturalmente, δ diventa sempre più piccolo man mano che ci si avvicina allo zero. Ma lo zero non ha questa proprietà: non esiste alcun cerchio di raggio δ, centrato nello zero, all'interno del quale non ci siano singolarità della funzione. Lo zero non è una singolarità isolata, è una *singolarità essenziale*. Equivalentemente, potremmo applicare la regola nel quadro sopra e verificare che non esiste alcun k tale $\lim_{z\to 0} z^k f(z) = c$,

$$\lim_{z\to 0} z^k \frac{1}{\cos(1/z)} = \infty\,, \quad \forall k$$

(c)

$$f(z) = \frac{\ln(z-2)}{(z^2+2z+2)^2}$$

Il punto $z = 2$ è un punto di diramazione ed è una singolarità isolata. Le radici di (z^2+2z+2) sono $z = -1 \pm i$, da cui $z^2+2z+2 = (z+1+i)(z+1-i)$. Quindi $z = -1 \pm i$ sono poli di ordine 2 (che sono singolarità isolate).

(d)

$$f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

A prima vista, sembra che $z = 0$ sia un punto di diramazione. Per verifica, sia $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)}$, dove $0 \le \theta < 2\pi$.

Se $z = re^{i\theta}$, si ha

$$f(z) = \frac{\sin\left(\sqrt{r}e^{i\theta/2}\right)}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Se $z = re^{i(\theta+2\pi)}$, si ha

$$f(z) = \frac{\sin\left(\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i}\right)}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}e^{\pi i}} = \frac{\sin -\left(\sqrt{r}e^{i\theta/2}\right)}{-\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{\sin\left(\sqrt{r}e^{i\theta/2}\right)}{\sqrt{r}e^{i\theta/2}}$$

Quindi, in realtà, la funzione è a un sol valore e $z = 0$ non può quindi essere un punto di diramazione. Poiché

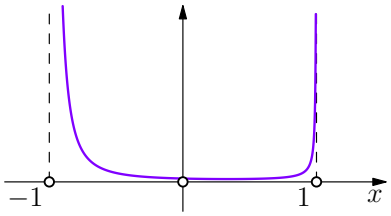
$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1\,,$$

ne segue che $z = 0$ è una singolarità eliminabile.

Problema 20.8. □

Si vuole dimostrare che

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,.$$



La funzione integranda è singolare in -1 e $+1$ (figura a lato). Passando alla multifunzione complessa

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+z)^2(1-z)}}$$

si vede che essa ha punti di diramazione in -1 e 1. Con riferimento alla figura a lato, sia

$$z = -1 + r_1 e^{i\theta_1} = 1 + r_2 e^{i\theta_2}$$

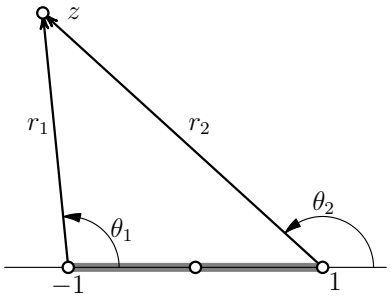


Figura 20.25: Punti di diramazione e taglio.

e scegliamo un ramo in cui

$$f(z) = {r_1}^{-2/3} {r_2}^{-1/3} e^{-i(2/3)\theta_1} e^{-i(1/3)\theta_2}\,.$$

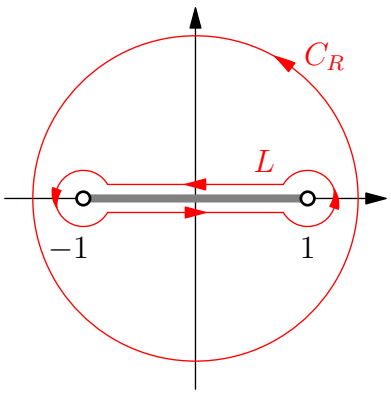
Osserviamo che un giro intorno ad entrambi i punti di diramazione non fa cambiare ramo (perché $(2/3)(\theta_1 + 2\pi) + (1/3)(\theta_2 + 2\pi) = (2/3)\theta_1 + (1/3)\theta_2 + 2\pi$). Possiamo quindi scegliere come taglio il segmento tra -1 e 1, con $0 \le \theta_1 < 2\pi$ e $-\pi < \theta_2 \le \pi$. In questo ramo, nel limite da sopra a $x \in (-1, 1)$, si ha $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ e quindi

$$f(x + i\epsilon) = {r_1}^{-2/3} {r_2}^{-1/3} e^{-i\pi/3} = \frac{e^{-i\pi/3}}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

Nel limite da sotto, si ha $\theta_1 = 2\pi$ e $\theta_2 = -\pi$ e quindi

$$f(x - i\epsilon) = e^{-i4\pi/3} e^{i\pi/3} {r_1}^{-2/3} {r_2}^{-1/3} = e^{-i\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$$

Possiamo allora integrare la funzione $f(z)$ lungo il cammino L della figura 20.17, riportata qui a lato.



Osserviamo che, pur essendo la funzione singolare, non ci sono residui nei punti di diramazione: questo segue dal fatto generale che

$$\oint \frac{1}{z^p} dz$$

è nullo per $p < 1$. Infatti, per un cammino circolare di raggio ϵ

$$\oint \frac{1}{z^p} dz = \int_0^{2\pi} e^{-ip\theta} \epsilon^{-p} \epsilon e^{i\theta} d\theta \propto \epsilon^{1-p} \to 0 \quad \text{per} \quad \epsilon \to 0$$

Essendo nulli gli integrali lungo i piccoli cerchi , si ha

$$\oint_L f(z)dz = -e^{-i\pi/3}I + e^{-i\pi}I = e^{-i\pi}\left(-e^{i2\pi/3}+1\right)I$$
$$= \left(e^{i2\pi/3}-1\right)I\,,$$

(i segni sono dovuti all'orientazione di L: sopra il taglio, il cammino da 1 a -1, sotto il taglio, da -1 a 1). Ne segue che

$$I = \frac{1}{e^{i2\pi/3}-1}\oint_L f(z)dz\,.$$

Poiché non ci sono singolarità tra L e C_R, possiamo deformare il contorno d'integrazione da L a C_R, un cerchio di raggio $R>1$, come mostrato in figura, e ottenere

$$I = \frac{1}{e^{i2\pi/3}-1}\oint_{C_R} f(z)dz\,.$$

Essendo la funzione integranda regolare in ogni regione finita al di fuori dal cerchio, calcoliamo questo integrale in termini di residuo della funzione all'infinito. Dalla sezione 7.8,

$$I = (2\pi i)\frac{1}{e^{i2\pi/3}-1}\mathsf{Res}\left\{\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w}\right),0\right\}.$$

Ma

$$\begin{aligned}\frac{1}{w^2}f\left(\frac{1}{w^2}\right) &= \frac{1}{w^2}(1+\frac{1}{w})^{-2/3}(1-\frac{1}{w})^{-1/3}\\ &= \frac{1}{w^2}w^{2/3}w^{1/3}(1+w)^{-2/3}(1-w)^{-1/3}\\ &= \frac{1}{w}(w+1)^{-2/3}(w-1)^{-1/3}\\ &= \frac{1}{w}\left(1-\frac{2}{3}w+\ldots\right)(-1)^{-1/3}\left(1+\frac{1}{3}w+\ldots\right)\end{aligned}$$

Poiché il coefficiente di $1/w$ è $(-1)^{-1/3}$, questo è il residuo cercato. Dalla figura 20.25, $z-1 = r_2e^{i\theta_2}$, da cui $(-1)^{-1/3} = e^{-i\pi/3}$ nel piano z. Nel piano $w=1/z$, si avrà $(-1)^{-1/3} = e^{i\pi/3}$. Quindi

$$I = (2\pi i)\frac{1}{e^{i2\pi/3}-1}e^{i\pi/3} = \pi\frac{2i}{e^{i\pi/3}-e^{-i\pi/3}} = \frac{\pi}{\sin\pi/3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

N. B. Si tenga presente questo fatto anche per altri problemi.

N. B. Calcolare il residuo in un polo a significa *sempre* estrarre il coefficiente di $1/(z-a)$.

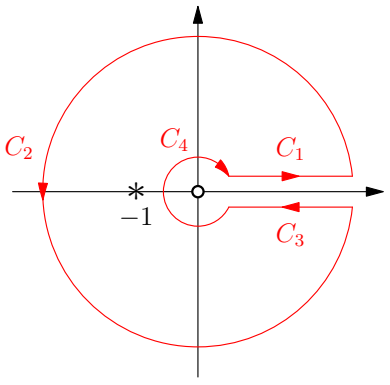
Problema 20.9. □

(I) Si consideri

$$\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}dz\,.$$

Poichè $z=0$ è un punto di diramazione, consideriamo il contorno C nella figura a lato. L'integrando ha un polo semplice in $z=-1=e^{i\pi}$, il cui residuo è $e^{i(p-1)\pi}$. Quindi

$$\oint_C = \int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4} = 2\pi i e^{(p-1)\pi}$$



Gli integrali $\oint_{C_2}$ e $\oint_{C_4}$, rispettivamente lungo cerchi di raggi ϵ e R vanno a zero per $\epsilon \to 0$ (p tra 0 e 1) e $R \to \infty$ (poiché p è strettamente tra 0 e 1). Detta $z = x$ la variabile lungo C_1, la variabile lungo C_3 sarà $z = e^{2\pi i}x$, dato che l'argomento di z cresce di 2π dopo un giro completo. Allora, detto

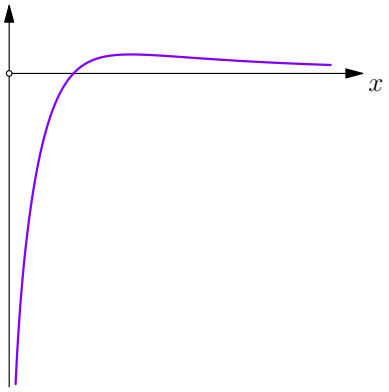
$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}dx$$

l'integrale che si vuole calcolare, nel limite si ha

$$\int_{C_1} + \int_{C_3} = I - e^{2\pi i(p-1)}I = 2\pi i e^{i(p-1)\pi},$$

da cui

$$I = \frac{2\pi i e^{i(p-1)\pi}}{1-e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{\pi}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

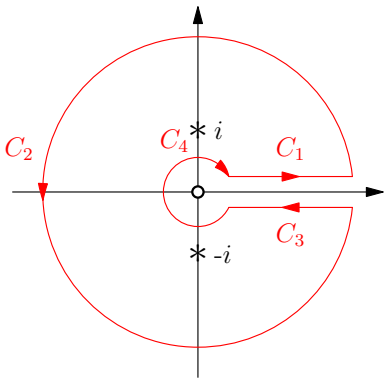


(II) Il grafico della funzione $\ln x/(1+x^2)$ è riportato a lato. Viene chiesto di mostrare che c'è esatta cancellazione tra contributo positivo e negativo all'area.

Un modo (un po' indiretto) di calcolare l'integrale è di considerare

$$\oint_C \frac{\mathrm{Log}(z)^2}{1+z^2}dz$$

per il percorso in figura a lato. La ragione è che l'integrazione lungo C_3 coinvolge un $(\mathrm{Log}x + i2\pi)^2$, da cui, sviluppando il qudrato si ottiene il termine Log che si vuole calcolare.



Più precisamente, dopo aver calcolato i residui in i e $-i$, che sono rispettivamente

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2i}\left(\frac{3i\pi}{2}\right)^2,$$

e aver valutato che gli integrali lungo il cerchio piccolo e quello grande non contribuiscono nei limiti $\epsilon \to 0$ e $R \to \infty$, per l'integrale di contorno si ottiene

$$\oint_C \frac{\mathrm{Log}(z)^2}{1+z^2}dz = \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(x)^2}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \frac{(\mathrm{Log}x + i2\pi)^2}{1+x^2}dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\{=\}2\pi^3.$$

Ma

$$\int_0^\infty \frac{(\mathrm{Log}x + i2\pi)^2}{1+x^2}dx = \int_0^\infty \frac{(\mathrm{Log}x)^2}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{i2\pi\mathrm{Log}x}{1+x^2}dx + \int_0^\infty \frac{-4\pi^2}{1+x^2}dx$$

Quindi,

$$-\int_0^\infty \frac{i2\pi\mathrm{Log}x}{1+x^2}dx + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = 2\pi^3.$$

L'integrale reale vale $\pi/2$, quindi l'uguaglianza risulta verificata se la parte immaginaria a primo membro è nulla, cioè se

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}x}{1+x^2}dx = 0$$

(III) È tempo di fare mente locale sul seguente fatto:

> Mente il logaritmo, come multifunzione, preserva la proprietà fondamentale del logaritmo reale
>
> $$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)\,,$$
>
> la sua parte principale
>
> $$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\,(z)$$
>
> non gode in generale di questa proprietà,
>
> $$\mathrm{Log}(ab) \neq \mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}(b)$$
>
> ($a = -1$ e $b = i$ fornisce un controesempio).

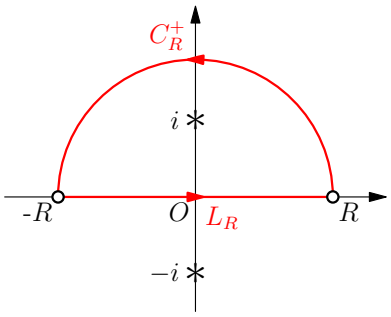
Tuttavia, si ha

$$\mathrm{Log}(i-x) + \mathrm{Log}(i+x) = \mathrm{Log}(i^2 - x^2) = \mathrm{Log}(x^2+1) + \pi i \tag{20.26}$$

Questa identità suggerisce di considerare l'integrale di contorno

$$\oint_C \frac{\mathrm{Log}(z+i)}{z^2+1}dz$$

per il contorno C in figura a lato. Il residuo in i è



$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\mathrm{Log}(z+i)}{z^2+1} = \frac{\mathrm{Log}(2i)}{2i}$$

e dunque

$$\oint_C \frac{\mathrm{Log}(z+i)}{z^2+1}dz = 2\pi i\frac{\mathrm{Log}(2i)}{2i} = \pi\left[\mathrm{Log}2 + i\frac{\pi}{2}\right] = \pi\mathrm{Log}2 + \frac{1}{2}\pi^2 i\,.$$

L'integrale su C_{R^+} tende a zero quando R va all'infinito. Quindi

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{Log}(x+i)}{x^2+1}dx + \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(x+i)}{x^2+1}dx = \pi\mathrm{Log}2 + \frac{1}{2}\pi^2 i\,.$$

cambiando x in $-x$ nel primo integrale, si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(i-x)}{x^2+1}dx + \int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(x+i)}{x^2+1}dx = \pi\mathrm{Log}2 + \frac{1}{2}\pi^2 i\,.$$

tenuto conto della (20.26),

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(x^2+1)}{x^2+1} + i\pi \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \pi \mathrm{Log}2 + \frac{1}{2}\pi^2 i\,.$$

Poiché il secondo integrale a primo membro è pari a $\pi/2$, uguagliando parti reale e immaginaria della precedente equazione, si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Log}(x^2+1)}{x^2+1} = \pi \mathrm{Log}2$$

PROBLEMA **20.10.** □

(a) Sia $z+1=u$. Allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z+1)(z+3)} &= \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} \\ &= \frac{1}{2u}\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \ldots\end{aligned}$$

valevole per $|u|<2$, cioè $0<|z+1|<2$.

(b) Per $|z|<1$, si ha la serie di Taylor ottenuta sottraendo dalla serie di Taylor per $(1/2)/(z+1)$ quella per $(1/2)/(z+3)$ già ottenuta al punto (a). Il risultato è

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \ldots$$

PROBLEMA **20.11.** □ Osserviamo che

$$F(z) = 1+z+z^2+z^4+z^8+z^{16}+z^{32}\ldots = z + \left[1+z^2+z^4+z^8+z^{16}\ldots\right].$$

Allora

$$\begin{aligned}F(z) &= z + F(z^2)\\ F(z) &= z + z^2 + F(z^4)\\ F(z) &= z + z^2 + z^4 + F(z^8)\\ \ldots &= \ldots\end{aligned}$$

Da queste relazioni risulta che i valori di z tali che $z=1$, $z^2=1$, $z^4=1,\ldots$ sono tutti singolarità di $F(z)$ in quanto $F(1)=\infty$. Ma queste singolarità riempiano densamente il cerchio unitario $|z|=1$ e impediscono il prolungamento analitico oltre di esso della funzione.

PROBLEMA **20.12.** □

(i) Integrando per parti (trasformata di Laplace), si ottiene

$$F_1(z) = \int_0^\infty t^3 e^{-zt} dt = \frac{6}{z^4} \quad se \quad \mathrm{Re}\,(z) > 0$$

(ii) La funzione $F_2(z) = 6/z^4$ è analitica ovunque eccetto in $z = 0$ e coincide con $F_1(z)$ per $\mathrm{Re}\,(z) > 0$. Quindi è il prolungamento analitico di F_1.

PROBLEMA **20.13.** □ Perché analitica (oppure perché composizione di due trasformazioni anti-conformi).

PROBLEMA **20.14.** □ Si veda il problema 1.14.

PROBLEMA **20.15.** □ Risolviamo l'esercizio con i metodi della geometria analitica. Dobbiamo trovare l'intersezione tra la retta che passa per i punti Z e a e il cerchio di raggio 1. L'equazione della retta è

$$(\overline{Z} - \overline{a})z - (Z - a)\overline{z} - (a\overline{Z} - \overline{a}Z) = 0$$

e naturalmente l'equazione del cerchio è $\overline{z}z = 1$. Moltiplichiamo l'equazione della retta per z, teniamo conto dell'equazione del cerchio, e riconduciamo l'equazione algebrica di secondo grado così ottenuta alla forma standard con coefficiente quadratico uguale a 1. Otteniamo

$$z^2 - \frac{a\overline{Z} - \overline{a}Z}{\overline{Z} - \overline{a}} z - (Z - a) = 0$$

Sappiamo che Z è soluzione, possiamo dunque abbassare di grado l'equazione ricordando che la somma delle radici è pari al coefficiente lineare cambiato di segno; chiamiamo $Z^\star$ la radice che cerchiamo. Allora

$$Z + Z^\star = \frac{a\overline{Z} - \overline{a}Z}{\overline{Z} - \overline{a}},$$

da cui

$$Z^\star = \frac{a\overline{Z} - \overline{a}Z}{\overline{Z} - \overline{a}} - Z = \frac{a\overline{Z} - \overline{a}Z - 1 + \overline{a}Z}{\overline{Z} - \overline{a}} = \frac{a\overline{Z} - 1}{\overline{Z} - \overline{a}} = \frac{(-Z)}{(-Z)} \frac{(a\overline{Z} - 1)}{(\overline{Z} - \overline{a})} = \frac{Z - a}{\overline{a}Z - 1},$$

che è quanto si voleva dimostrare.

21
Miscellanea di applicazioni

Indice

21.1 ***Serie di Fourier, Taylor e Laurent*** 497

21.2 ***Trasformate di Fourier*** 502

21.3 ***Trasformate di Laplace*** 504

21.4 ***Segnali a banda limitata e teorema di Whittaker-Shannon*** 507

21.5 ***Formule di Poisson e relazioni di Kramers–Kronig*** 510

21.6 ***Il problema di Dirichlet per funzioni armoniche nel piano*** 513

21.7 ***Soluzione di Sommerfeld del problema di Keplero*** 516

21.8 ***Equazione delle onde*** 518

21.9 ***Flussi irrotazionali di fluidi perfetti nel piano*** 521

PROBLEMI 522

SOLUZIONI 523

21.1 Serie di Fourier, Taylor e Laurent

Fin che si resta nel campo delle variabili reali, le serie di Fourier si distinguono nettamente dalle serie di Taylor: per determinare i coefficienti di uno sviluppo di Taylor occorre conoscere i valori assunti dalla funzione e da tutte le sue derivate in un solo punto. Ciò significa che, nel suo intervallo di convergenza, la serie di Taylor definisce una funzione che è determinata solamente dal suo andamento in un intorno comunque piccolo di un unico punto, il punto di espansione delle serie. La funzione così definita è una struttura rigida e inalterabile, nel senso che nessun sviluppo di Taylor è in grado di rappresentare una funzione che sia identica ad una data serie di Taylor in una parte dell'intervallo di convergenza e diversa in un'altra

parte. Le funzioni definite da serie di Taylor costituiscono una classe importante di funzioni, ma sono evidentemente una classe molto ristretta fra tutte le funzioni pensabili.

Al contrario, per conoscere lo sviluppo di Fourier associato a una funzione data è necessario conoscere l'andamento globale di questa funzione in tutto l'intervallo che ne definisce il periodo. Purché la funzione soddisfi le condizioni appropriate, è possibile trovare la serie di Fourier che la rappresenti. L'andamento della funzione, inoltre, può essere modificato abbastanza arbitrariamente in intervalli finiti, senza che per questo la funzione cessi di essere sviluppabile in serie di Fourier. Se si resta nel campo reale, le serie di Fourier sembrano dunque definire una classe di funzioni più vasta di quelle definibili mediante serie di Taylor. Tuttavia, la distinzione scompare quando si passa al piano complesso, dove emerge un legame profondo tra questi due tipi di serie.

Si consideri una funzione $w = f(z)$ analitica nel disco unitario $\mathbb{D}$ centrato nell'origine. Allora, per il teorema di Taylor (20.9), $w = f(z)$ è sviluppabile in serie di potenze,

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(Z)}{Z^{n+1}} dZ\,.$$

N.B. Questa non è una restrizione: per cambiamento di scala si può sempre ricondurre un disco di raggio R al disco unitario.

Dette u e v rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di w e r e θ rispettivamente il modulo e l'argomento di z, possiamo scrivere la relazione tra w e z nella forma

$$w = u + iv = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$$

Consideriamo ora $r < 1$ fissato. La precedente relazione, sul cerchio di raggio r, definirà la funzione complessa $w_r(\theta) = f(re^{i\theta})$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ e le due funzioni reali $u_r(\theta)$ e $v_r(\theta)$ tali che

$$w_r = u_r(\theta) + iv_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}\,. \tag{21.1}$$

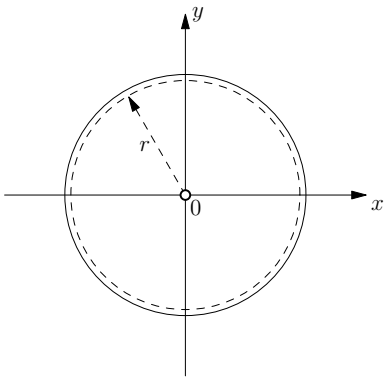


Figura 21.1: Cerchio di raggio r (tratteggiato) minore del cerchio di convergenza di raggio $R = 1$.

Prendendone adesso le parte reali e immaginarie si ottengono gli sviluppi in serie di Fourier rispettivamente di u_r e v_r.

ESEMPIO 21.1. Si consideri la serie geometrica

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\,, \quad |z| < 1$$

e si ponga $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r < 1$. Allora

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-\bar{z}}{1-2\mathrm{Re}\, z + |z|^2} = \frac{1 - r\cos\theta + ir\sin\theta}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + re^{i\theta} + r^2 e^{i2\theta} + r^3 e^{i3\theta} + \ldots$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie, si ottiene

$$\frac{1-r\cos\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} = 1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + r^3\cos 3\theta + \dots$$
$$\frac{r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta} = r\sin\theta + r^2\sin 2\theta + r^3\sin 3\theta + \dots$$

Per esempio, per $r = 1/2$, si ottengono gli sviluppi in serie di Fourier

$$\frac{4-2\cos\theta}{5-4\cos\theta} = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2^2}\cos 2\theta + \frac{1}{2^3}\cos 3\theta + \dots$$
$$\frac{2\sin\theta}{5-4\cos\theta} = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2^2}\sin 2\theta + \frac{1}{2^3}\sin 3\theta + \dots$$

ESEMPIO 21.2. Altri sviluppi di Fourier interessanti si ottengono dalla funzione

$$\begin{aligned}\frac{1+z}{1-z} &= \frac{1}{1-z} + \frac{z}{1-z}\\ &= 1 + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)\\ &= 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \dots\end{aligned}$$

Procedendo come nell'esempio precedente, abbiamo

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2+i2\operatorname{Im} z}{1-2\operatorname{Re} z+|z|^2} = \frac{1-r^2+i2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$$
$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2re^{i\theta} + 2r^2e^{i2\theta} + 2r^3e^{i3\theta} + \dots$$

Uguagliando parti reali e parti immaginarie, si ottengono gli sviluppi di Fourier corrispondenti. Si osservi che quello per la parte reale

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta} = 1 + 2\left(r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + r^3\cos 3\theta + \dots\right)$$

è proprio lo sviluppo di Fourier del nucleo di Poisson (problema 10.7). Per $r = 1/2$,

$$\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\theta} = \frac{3}{5-4\cos\theta} = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2^2}\cos 2\theta + \frac{1}{2^3}\cos 3\theta + \dots\right),$$

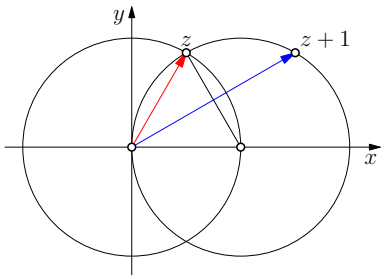
si ottiene la soluzione del problema 12.7.

ESEMPIO 21.3. Consideriamo la serie della parte principale del logaritmo

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \dots \qquad (20.7)$$

Questa serie è convergente per $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq -\pi$ (esempio 20.4). Ora,

$$\operatorname{Log}(1+z) = \ln|1+z| + i\operatorname{Arg}(1+z)$$



dove $\Theta = \operatorname{Arg}(1+z)$ è la parte principale dell'angolo di $1+z$, dove, per definizione, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, varia nell'intervallo $-\pi < \theta \leq \pi$.

Ragionando sulla figura a lato, si vede che l'angolo di $z+1$ è la metà dell'angolo di z,

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\theta\,, \quad -\pi < \theta \leq \pi\,,$$

da cui

$$\operatorname{Im}\operatorname{Log}(1+z) = \frac{1}{2}\theta\,,$$

Quindi, per confronto con lo sviluppo in serie di $\operatorname{Log}(1+z)$ per $z = e^{i\theta}$, si ottiene lo sviluppo di Fourier

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{2}\theta = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots$$

che è quello dell'onda dente di sega con pendenza $1/2$.

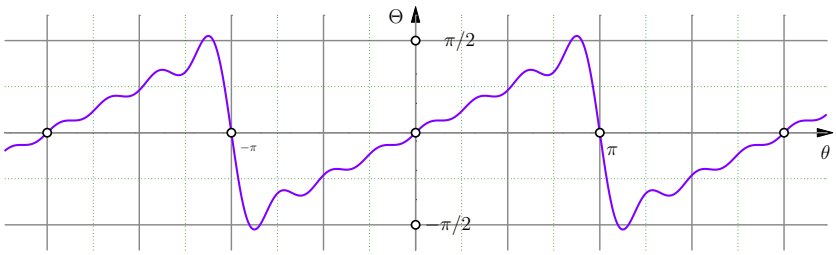


Figura 21.2: Somma dei primi 8 termini della serie del dente di sega con pendenza $1/2$.

L'idea sfruttata negli esempi precedenti è stata quella di pensare la funzione $f(\theta)$ di cui si vuole calcolare la serie di Fourier come la restrizione ad un cerchio di una funzione $g(z)$ di variabile complessa che è analitica in un disco che contiene tale cerchio. La serie di Fourier è quandi ottenuta dallo sviluppo di Taylor di $g(z)$. La richiesta che $g(z)$ sia analitica in un disco è tuttavia troppo restrittiva e non necessaria.

Grazie al teorema di Laurent, possiamo ottenere sviluppi in serie di Fourier anche di funzioni che non sono analitiche solo in un anello, di spessore piccolo a piacere. Chiariamo con un esempio. come sia possibile usare il teorema di Laurent per ottenere sviluppi di Fourier.

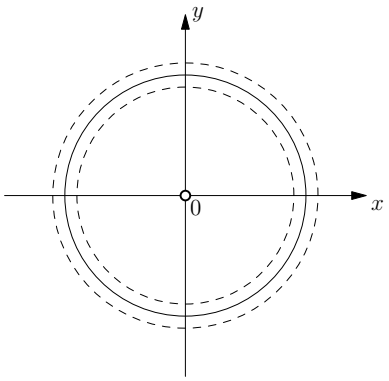


Figura 21.3: Funzione analitica in un anello attorno al disco unitario

---

Esempio 21.4. Cerchiamo lo sviluppo in serie di Fourier della funzione

$$f(\theta) = \frac{1}{3+\cos\theta}$$

pensando $f(\theta$ come la restrizione al cerchio unitario di una funzione di variabile complessa $g(z)$ che è analitica sul cerchio e che quando è

ristretta al cerchio unitario coincide con $f(\theta)$, nel senso che $f(\theta) = g(e^{i\theta})$. In effetti, abbiamo già imparato come fare questo: usando la sostituzione (19.17), si ottiene

$$\frac{1}{3+\cos\theta} = \frac{1}{3+(z+z^{-1})/2} = \frac{2z}{z^2+6z+1} \equiv g(z)$$

Le radici del denominatore sono

$$b = -3-\sqrt{8} \quad \text{e} \quad a = -3+\sqrt{8}\,.$$

Poiché $|a| < 1 < |b|$, la funzione $g(z)$ è analitica nell'anello $|a| < |z| < |b|$ che contiene il cerchio unitario. Procedendo come nell'esempio 20.6, decomponiamo $g(z)$ in fratti semplici

$$g(z) = \frac{2z}{(z-a)(z-b)} = \frac{2z}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} + \frac{-1}{z-b}\right)$$

Per $|z| > a$, vale quanto trovato nell'esempio 20.5,

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a^3}{z^4} + \dots\,.$$

Per $|z| < b$,

$$\begin{aligned}\frac{-1}{z-b} = \frac{1}{b-z} &= \left(\frac{1}{b}\right)\frac{1}{1-(z/b)} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{z}{b} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{z^3}{b^3} + \dots\right)\\ &= \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \frac{z^3}{b^4} + \dots\end{aligned}$$

Sommando le due serie,

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{2z}{a-b}\left(\frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \frac{z^3}{b^4} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2} + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a^3}{z^4} + \dots\right)\\ &= \frac{2}{a-b}\left(\frac{z}{b} + \frac{z^2}{b^2} + \frac{z^3}{b^3} + \dots + 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \frac{a^3}{z^3} + \dots\right)\end{aligned}$$

Ma $b = 1/a$ (essendo a e b radici di un'equazione di secondo grado con coefficiente del termine quadratico pari a 1) e quindi lo sviluppo di $g(z)$ può essere riscritto come

$$g(z) = \frac{2a}{a^2-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\right], \quad 2a/(a^2-1) = 1/\sqrt{8}\,.$$

Allora sul cerchio $z = e^{i\theta}$ si ha

$$g(e^{i\theta}) = f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{8}}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(-3+\sqrt{8}\right)^n \cos n\theta\right]$$

che è lo sviluppo di Fourier cercato.

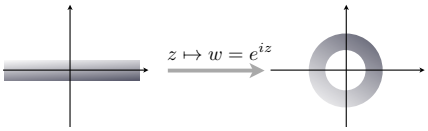
M Gli esempi di questa sezione mostrano la relazione profonda tra serie di Fourier e serie di Laurent (le serie di Taylor sono un caso particolare di serie di Laurent). I tratti salienti di questa relazione sono trattati nella nota a margine.

Da Laurent a Fourier

DEFINIZIONE. *Una funzione analitica $f(z)$ nella striscia $S = \{z : |Imz| < a\,, a > 0\}$ è detta periodica di periodo 2π se per tutti gli z nella striscia si ha $f(z+2\pi) = f(z)$.*

ESEMPI. Le funzioni elementari $\sin nz$, $\cos nz$ e $e^{\pm inz}$ hanno periodicità 2π. Se $h = \sum_0^\infty a_n z^n$ è una funzione intera, allora $f(z) = h(e^{iz}) = \sum_{n=0}^\infty a_n e^{inx}$ ha periodicità 2π.

TEORIA GENERALE. Si consideri la trasformazione



che trasforma la striscia S nell'anello $A = \{w : e^{-a} < |w| < e^a\}$. Le pre-immagini dei punti $w = e^{i\theta}$ sono i punti $z = \theta + 2\pi n$. La trasformazione avvolge l'asse reale infinite volte attorno al cerchio unitario nel piano w e realizza la corrispondenza uno-a-uno $f(z) = g(e^{iz})$ tra funzioni analitiche sull'anello A e funzioni analitiche periodiche in S.

TEOREMA. *Se $f(z)$ è una funzione analitica periodica di periodo 2π nella striscia S, allora ha una rappresentazione di Fourier*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}\,,$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta\,,$$

uniformemente convergente in ciascuna striscia sempre più piccola.

Dimostrazione. Si usi lo sviluppo di Laurent

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n\,,$$
$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=1}\frac{g(w)}{w^{n+1}}dw,$$

uniformemente convergente in ciascun sub-anello. Poiché $f(z) = g(e^{iz})$, si ha

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (e^{iz})^n \qquad \text{e}$$
$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(e^{i\theta})}{w^{n+1}}iwd\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{g(e^{i\theta})}{e^{i(n+1)\theta}}e^{i\theta}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta\end{aligned}$$

□

21.2 *Trasformate di Fourier*

In questa sezione intendiamo studiare le proprietà di analiticità delle trasformate di Fourier e Laplace e loro mutue relazioni. Incominciamo col fissare le notazioni. Denotiamo con $g(\omega)$ la trasforma di Fourier di $f(t)$ usando la convenzione

$$g(\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} f(t) dt\,, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t} g(\omega) d\omega\,. \tag{21.2}$$

(Si osservi lo scambio di segni degli esponenziali nella definizione della trasformata e nella formula di inversione, nonché l'uso delle variabili ω e t, abbiamo in mente applicazioni a segnali dipendenti dal tempo e ad analisi in frequenza degli stessi.)

In primo luogo, osserviamo che le trasformata di Fourier ammette di solito una naturale estensione analitica in una certa regione del piano complesso. Per esempio, se $f(t) = e^{-|t|}$ allora $g(\omega) = 1/(1+\omega^2)$ si estende alla funzione meromorfa

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2}\,.$$

Questo fatto non dovrebbe sorprendere più di tanto: per ogni reale t, la funzione e^{itz} che compare sotto il segno di integrale è una funzione intera, e quindi ci si aspetta che ci siano delle condizioni su f per cui g sarà analitica in certe regioni del piano complesso.

Adesso, restringiamo la nostra attenzione a funzioni $f(t)$ che si annullano per $t < 0$. È utile avere un nome per tali funzioni. Interpretando la variabile t come tempo, conveniamo di chiamare *causale* una funzione di questo tipo. Vogliamo stabilire quali siano le proprietà di analiticità della trasformata di Fourier di una funzione causale.

Per $f(t)$ causale e assolutamente integrabile, estendiamo $g(\omega)$ al piano delle frequenze complesse $z = \omega + i\sigma$, consideriamo cioè la funzione

$$g(z) = \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt \tag{21.3}$$

e domandiamoci dove questa funzione è sicuramente analitica. Si vede immediatamente che se $\sigma = \mathrm{Im}\,(z) > 0$, allora $|e^{izt}| = e^{-\sigma t}$ e quindi l'integrale (21.3) è assolutamente convergente nel semipiano superiore Π^+. Allora per ogni curva semplice chiusa C tutta contenuta nel semipiano superiore si ha

$$\oint_C g(z) dz = \oint_C \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt dz = \int_0^\infty \left[\oint_C e^{itz} dz \right] f(t) dt = 0\,.$$

Quindi, per il teorema di Morera, $g(z)$ è analitica nel semipiano superiore. Risulta così dimostrato il seguente teorema.

> La trasformata di Fourier di una funzione causale (integrabile) è analitica nel sempiano superiore Π^+. (21.4)

Definizione alternativa di trasformata di Laplace.

Si osservi che si potrebbe definire la trasformata di Laplace semplicemente come il continuamento analitico della trasformata di Fourier:

$$\widehat{f}(z) \equiv g(z) = \int_0^\infty f(t) e^{itz} dt\,, \quad \mathrm{Im}\, z > 0$$

Così definita,la trasformata di Laplace mantiene le sue usuali proprietà che la rendono utile per le applicazioni alle equazioni lineari, per esempio,

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(z) &= \int_0^\infty f'(t) e^{itz} dt \\
&= f(t) e^{itz}\Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty f(t)(iz) e^{itz} dt \\
&= -f(0) - iz\widehat{f}(z) \\
\widehat{f''}(z) &= -z^2 \widehat{f}(z) + izf(0) - f'(0)\,.
\end{aligned}$$

Vediamone alcune applicazione ad equazioni lineari.

1. Particella in un fluido: equazione per la velocità $\dot{v} + \gamma v(t) = 0$. Quindi $-iz\widehat{v}(z) - v_0 + \gamma\widehat{v}(z) = 0$, da cui $\widehat{v}(z) = \frac{i}{z+i\gamma} v_0$. Come ci aspettavamo, la singolarità è nel semipiano inferiore. Nel semipiano superiore la funzione è analitica. Invertiamo, $v(t) = e^{-\gamma t} v_0$.

2. Se la particella è soggetta ad una forza esterna $f(t)$, l'equazione per la velocità è $\frac{dv}{dt} + \gamma v(t) = f(t)$. Quindi $-iz\widehat{v}(z) - v_0 + \gamma\widehat{v}(z) = \widehat{f}(z)$, da cui $\widehat{v}(z) = \frac{i}{z+i\gamma} v_0 + \frac{i}{z+i\gamma}\widehat{f}(z)$. Allora

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-u)} f(u) du$$

3. Equazione del calore $\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ con condizione iniziale $f_0(x)$. Sia $\widehat{f}(k,z)$, la trasformata di Fourier usuale rispetto allo spazio e la trasformata di Laplace rispetto al tempo (= Fourier con opposta convenzione sul segno) della funzione $f(x,t)$, che assumiamo nulla per $t < 0$. Allora $-iz\widehat{f}(k,z) - \widehat{f_0}(k) = -k^2 D\widehat{f}(k,z)$. da cui

$$\widehat{f}(k,z) = \frac{i}{z + iDk^2}\widehat{f_0}(k)\,.$$

Insomma, con questa definizione non si perde nulla dei vantaggi della trasformata di Laplace, ma si ha il vantaggio che risulta molto più diretto e trasparente il collegamento con la trasformata di Fourier.

Se si assume che $f(t)$ sia L^2, si può ottenere un risultato più informativo. Riscriviamo la (21.3) nella forma

$$g(\omega + i\sigma) = \int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{i\omega t}dt \tag{21.5}$$

e consideriamo σ come fissato. Allora $g(z)$ è la trasformata di Fourier della funzione $f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t}$, cioè

$$g(\omega + i\sigma) = \mathscr{F}\{f(t)e^{-\sigma t}\}(\omega)\,. \tag{21.6}$$

Se adesso applichiamo l'identità di Parseval-Plancherel a $f_\sigma(t)$, otteniamo la seguente disuguaglianza

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|g(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 e^{-2\sigma t}dt \le \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt$$

per ogni $\sigma > 0$, e quindi il seguente teorema.

$g(z) = \int_0^\infty f(t)e^{itz}dt$ è analitica nel semipiano superiore Π^+ e le sue restrizioni a linee orizzontali in Π^+ hanno norma L^2 limitata dalla norma L^2 di f. (21.7)

È un fatto notevole che vale l'inverso di questo teorema

Si supponga che $g(z)$ sia una funzione analitica nel semipiano superiore Π^+ e che
$$\sup_{0<\sigma<\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g}(\omega + i\sigma)|^2 d\omega = C < \infty$$
Allora esiste una funzione $f(t)$ in $L^2(0,\infty)$ tale che
$f(z) = \int_0^\infty f(t)e^{itz}dt$ e $\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = C$ (21.8)

Questo teorema è noto come teorema di Paley-Wiener.

FORMULA DI INVERSIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER Se applichiamo il teorema di inversione di Fourier alla (21.6), otteniamo

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}g(\omega + i\sigma)d\omega\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}e^{\sigma t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}g(\omega + i\sigma)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega+i\sigma)t}g(\omega + i\sigma)d\omega \end{aligned}$$

e infine

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}e^{-izt}g(z)dz\,. \tag{21.9}$$

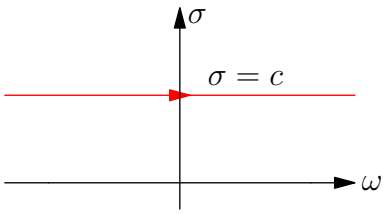


Figura 21.4: Cammino per l'integrale $\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma}e^{-izt}g(z)dz$.

L'integrazione è ben definita per qualunque retta $\sigma = c$ parallela all'asse ω, purché non ci siano singolarità lungo il cammino. Questo è garantito se scegliamo la retta nel semipiano superiore, cioè prendiamo $c \geq 0$. Se poi la funzione è meromorfa Il cammino può essere deformato come mostrato in figura 21.5 e l'integrale è pari a $2\pi i \times$ la somma dei residui.

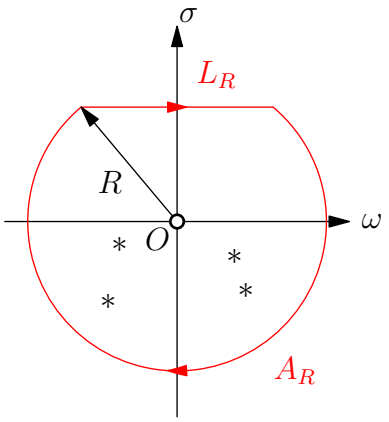


Figura 21.5: Deformazione del cammino per il calcolo di $\int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-izt} g(z) dz$.

21.3 *Trasformate di Laplace*

Consideriamo la trasformata di Laplace

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{17.2}$$

Come la trasformata di Fourier, anche la trasformata di Laplace, originariamente definita per s reale, si estende direttamente a valori complessi se l'integrale

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt. \tag{21.10}$$

converge. Ad esempio, per z complesso, la trasformata di Laplace di e^t è

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} e^t dt = \frac{1}{z-1}$$

e l'integrale è convergente a patto che $\mathrm{Re}\{z\} > 1$. Ma la funzione $1/(z-1)$ è analitica in tutti i punti del piano complesso eccetto $z = 1$. Quindi, per l'unicità del prolungamento analitico, è possibile estendere la funzione anche nei punti dove l'integrale non converge come continuazione analitica di $\int_0^\infty e^{-zt} e^t dt$. In effetti, quando si dice che $1/(z-1)$ è la trasformata di Laplace di e^t, senza specificare la condizione $\mathrm{Re}\{z\} > 1$, si sottintende che si sta considerando la continuazione analitica della trasformata di Laplace (che, per $\mathrm{Re}\{z\} < 1$, non è più data dalla (17.2), perché in tale regione l'integrale diverge).

FORMULA DI INVERSIONE DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE A pag. 373 abbiamo già evidenziato che la trasformata di Laplace è la trasformata di Fourier nel piano delle frequenze complesse $z = \omega + i\sigma$ ruotato di $\pi/2$, cioè ponendo $s = iz$ nella formula per g, cioè

$$g(iz) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = F(z),$$

ossia $g(z) = F(-iz)$. Allora per cambiamento di variabili $w = -iz$ nella (21.9), si ottiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} e^{-izt} F(-iz) dz = \frac{i}{2\pi} \int_{\infty i+\sigma}^{-\infty i+\sigma} e^{wt} F(w) dw \\ &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty i+\sigma}^{\infty i+\sigma} e^{wt} F(w) dw \end{aligned}$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zt}F(z)dz\,, \tag{21.11}$$

dove L è una qualunque retta $z = c \geq 0$ parallela all'asse immaginario, *a destra di tutte le singolarità*.

Se F è meromorfa, il cammino L può essere deformato come in figura 21.6, ottenendo così la formula

$$f(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{A_R+L_R} e^{zt}F(z)dz - \int_{A_R} e^{zt}F(z)dz\right]. \tag{21.12}$$

Se

$$\int_{A_R} e^{zt}F(z)dz \;\to\; 0 \;\text{ per }\; R\to\infty\,. \tag{21.13}$$

nel limite $R \to \infty$, si ottiene la formula di inversione della trasformata di Laplace:

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum \mathsf{Res}\{F(z)e^{zt}\} \tag{21.14}$$

Si osservi che la (21.13) è sempre garantita se $F(z) = P(z)/Q(z)$ con $P(z)$ e $Q(z)$ polinomi tali che il grado di P sia minore del grado di Q, una situazione che si incontra spesso nello studio dei sistemi lineari.

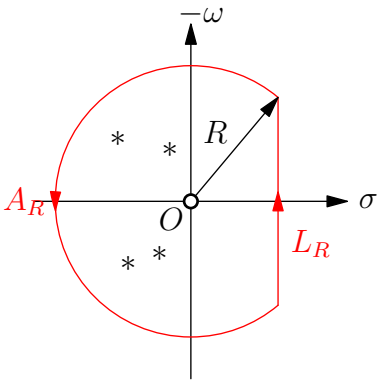


Figura 21.6: Deformazione del cammino per il calcolo di $\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zt}f(z)dz$.

Esempio 21.5. Calcolare

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}\,, \quad F(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\,.$$

usando la formula di inversione (21.14). I poli sono: $s = -1$ polo semplice, $s = 2$, polo doppio.

$$\mathsf{Res}\{F(z)e^{zt}, -1\} = \frac{e^{-t}}{9}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Res}\{F(z)e^{zt}, 2\} &= \lim_{s\to 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left\{(s-2)^2\left[\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right]\right\}\\ &= \lim_{s\to 2}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right]\\ &= \lim_{s\to 2}\frac{(s+1)te^{st} - e^{st}}{(s+1)^2}\\ &= \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}\end{aligned}$$

Allora

$$f(t) = \mathsf{Res}\{F(z)e^{zt}, -1\} + \mathsf{Res}\{F(z)e^{zt}, 2\} = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

Se $f(z)$ presenta punti di diramazione, la (21.11) continua a valere, ma il contorno va deformato in modo appropriato per poter applicare il teorema dei residui. Illustriamo come fare considerando un esempio.

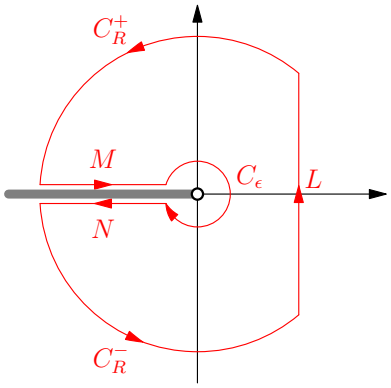
ESEMPIO 21.6. Calcolare

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\}$$

Soluzione. Essendo $s = 0$ un punto di diramazione, si può applicare la formula di inversione

$$F(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zt} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz\,,$$

a patto di usare il contorno della figura lato.



Si osservi che il taglio per la radice è tra $-\infty$ e 0: appena sopra il taglio, lungo M, $z = e^{i\pi}|x|$ e $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{|x|}$; appena sotto il taglio, lungo N, $z = e^{-i\pi}|x|$ e $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{|x|}$.

Poiché la funzione è analitica all'interno del contorno, si ha

$$\oint_L = -\left[\int_{C_R^+} + \int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N + \int_{C_R^-}\right]$$

Nel limite $R \to \infty$ i due integrali $\int_{C_R^+}$ e $\int_{C_R^-}$ danno contributo nullo. Valutiamo i tre integrali rimanenti, nel limite $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$.

$$\int_M \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz = \int_\infty^0 \frac{e^{xe^{i\pi}-a(xe^{i\pi})^{1/2}}}{x}dx = -\int_\infty^0 \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}dx$$

$$\int_N \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz = \int_\infty^0 \frac{e^{xe^{-i\pi}-a(xe^{-i\pi})^{1/2}}}{x}dx = \int_\infty^0 \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}dx$$

$$\int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz = i\int_\pi^{-\pi} e^{(\epsilon e^{i\theta})t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}d\theta \quad \to \quad -2\pi i \quad \text{per} \quad \epsilon \to 0$$

Ne segue che

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L = \frac{-1}{2\pi i}\left[\int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N\right] = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}dx\,.$$

Poniamo

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}dx\,.$$

Mediante sostituzione $x = u^2$, I diventa

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2t}\sin au}{u}du\,.$$

Derivando rispetto a a, otteniamo

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2t}\cos au du = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-a^2/4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}\,.$$

Quindi, usando la condizione $I = 0$ per $a = 0$,

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/(2\sqrt{t})} e^{-u^2} du = \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right).$$

Allora

$$F(t) = 1 - \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$$

□

21.4 *Segnali a banda limitata e teorema di Whittaker-Shannon*

Incominciamo col considerare segnali limitati nel tempo, cioè segnali descritti da una funzione $f(t)$ che è nulla al di fuori di un intervallo temporale $[-T, T]$. Assumiamo che la funzione sia L^2. Allora la sua trasformata di Fourier è

$$g(z) = \int_{-T}^{T} f(t) e^{itz} dt$$

dove $0 < T < \infty$ e $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$. Questa funzione è intera e soddisfa la condizione di crescita

$$|g(z)| \leq \int_{-T}^{T} |f(t)| e^{-\sigma} dt \leq e^{T|\sigma|} \int_{-T}^{T} |f(t)| dt$$

Funzioni intere che soddisfano questa condizione di crescita sono dette di *ordine esponenziale*. Se C è la costante che denota l'ultimo integrale dell'equazione precedente, la condizione di crescita implica che $|g(z)| \leq Ce^{T|z|}$. Si ha quindi il teorema:

Se $g(z)$ è una funzione della forma
$$g(z) = \int_{-T}^{T} f(t) e^{itz} dt$$
allora è una funzione intera di ordine esponenziale e le sue restrizioni a linee orizzontali nel piano complesso sono in $L^2(-\infty, \infty)$. (21.15)

Anche in questo caso vale un teorema inverso, anche questo noto come teorema di Paley-Wiener.

Si supponga che T e C siano costanti positive e che $g(z)$ sia una funzione intera tale che $|g(z)| \leq Ce^{T|z|}$ per tutti $z = \omega + i\sigma \in \mathbb{C}$ e che $\int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega < \infty$. Allora esiste una funzione $f(t)$ in $L^2(0, \infty)$ tale che $g(z) = \int_{-T}^{T} f(t) e^{itz} dt$. (21.16)

Un segnale è detto a *banda limitata* se $g(\omega)$ è assolutamente integrabile e se esiste una frequenza $\Omega > 0$ tale che $g(\omega) = 0$ per tutti gli

Calude Shannon (1916–2001) è stato un matematico americano. È riconosciuto come il padre della teoria dell'informazione, dove, importandola dalla fisica, introdusse la nozione di entropia come misura della quantità di informazione. Nella sua tesi del 1937, a 21 anni, gettò le basi per la costruzione di un computer digitale, dimostrando che con l'implementazione elettrica dell'algebra booleana si poteva risolvere qualunque relazione logica e numerica. Durante la seconda guerra mondiale, contribuì anche notevolmente allo sviluppo della crittografia. In questo, il suo lavoro fu parallelo a quello svolto nello stesso periodo dal matematico inglese Alan Turing sull'altra sponda dell'oceano Atlantico.

$|\omega| > \Omega$. La frequenza Ω è chiamata *larghezza di banda*. Un segnale di questo tipo è allora dato da

$$f(t) = \int_{-\Omega}^{\Omega} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \, .$$

Naturalmente, poiché non importano i nomi delle variabili, si applicano le stesse considerazioni che abbiamo fatto sopra: la funzione $f(t)$ può essere estesa ad una funzione $f(\zeta)$ nel piano complesso (adesso del tempo) che è analitica e intera (per le stesse ragioni di prima). Anche $f(\zeta)$ è di ordine esponenziale, nel senso che la sua condizione di crescita è

$$|f(\zeta)| \leq e^{\Omega |\mathrm{Im}\zeta|} \int_{-\Omega}^{\Omega} |g(\omega)| d\omega$$

per tutti $\zeta \in \mathbb{C}$.

L'analiticità dei segnali a banda limitata ha conseguenze singolari. Una è il risultato contro-intuitivo che la conoscenza del segnale $f(t)$ in un breve intervallo di tempo $[a, b]$, *arbitrariamente piccolo*, sull'asse reale, determina i suoi valori a tutti i tempi. Questa è una conseguenza dell'unicità del prolungamento analitico delle funzioni analitiche. Ed emerge anche un paradosso ....

Uno dei teoremi più interessanti e antichi per i segnali a banda limitata stabilisce che il segnale può essere recuperato progressivamente mediante un campionamento ad intervalli di tempo regolari. Questo fatto fu scoperto da Whittaker nel 1915 e riscoperto da Shannon nel 1949.

Paradosso. *È una pratica sperimentale standard che non si possono generare onde di lunghezza d'onda arbitrariamente piccola. Quindi tutti i segnali generati in laboratorio sono a banda limitata. È altresì una pratica sperimentale standard che non ci sono segnali che si estendono infinitamente lontano nel passato. Quindi c'è un $T > 0$ tale che $f(t) = 0$ quando t è reale e $t < -T$. Queste due pratiche sperimentali standard implicano che i segnali sono funzioni analitiche intere che si annullano nell'intervallo $(-\infty, -T) \subset \mathbb{R}$. L'unicità del continuamento analitico implica che tutti i segnali di questo tipo debbano essere identicamente nulli. Perciò il solo segnale che soddisfa la pratica sperimentale standard è $f(t) = 0$.*

Si provi a cercare da soli una via d'uscita prima di continuare a leggere.

Soluzione (?) Mentre è vero che in laboratorio si può controllare lo spettro in una banda limitata $-\Omega < \omega < \Omega$, si creano in ogni caso, indipendentemente dal nostro controllo, frequenze fuori da questa banda.

Sia $f(t)$ un segnale a banda limitata con larghezza di banda Ω e sia

$$T < \frac{\pi}{\Omega} \, .$$

Allora f può essere ricostruita da un campionamento dei suoi valori ai tempi nT, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, come la serie convergente

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}\left(\frac{t - nT}{T}\right) f(nL) \qquad (21.17)$$

(La funzione "sinc" è $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$, per $t = 0$ il valore è definito pari a 1.) La dimostrazione di questo teorema è un esercizio istruttivo di analisi complessa.

Dimostrazione. Scegliamo unità di misura tali che $T = 1$. Allora

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi t}{\pi (n - t)} f(n) \, .$$

Questa è la formula che dimostriamo. Per $t \notin \mathbb{Z}$ consideriamo la funzione di variabile complessa z

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-t)\sin \pi z}\,.$$

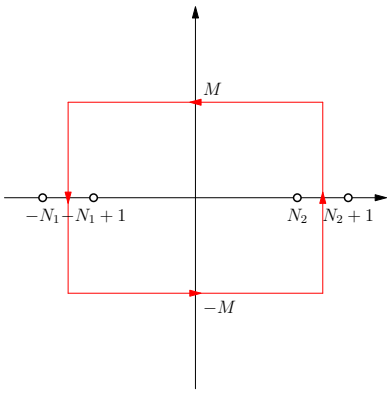
g è analitica in tutti i punti del piano complesso eccetto t e le radici, n di $\sin \pi z$. Queste radici sono poli semplici con residui

$$\mathsf{Res}\{g, n\} = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi(n-t)}\,.$$

La funzione $g(z)$ ha anche un polo semplice in t con residuo

$$\mathsf{Res}\{g, t\} = \frac{f(t)}{\sin \pi t}\,.$$

Per interi positivi N_1, N_2 e M si consideri il rettangolo



$$R_{N_1,N_2,M} = \left\{ z \in \mathbb{C} : -N_1 - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < N_2 + \frac{1}{2} \; texte \; |\operatorname{Im} z| < M \right\}$$

illustrato nella figura a lato. Il lato verticale a destra passa a metà strada tra i punti di campionamento N_2 e $N_2 + 1$; il lato a sinistra è a metà strada tra $-N_1$ e $-N_1 + 1$.

Si fissi t e si consideri N_1, N_2 e $M > |t| + 1$. Il contorno $C_{N_1,N_2,M}$ del rettangolo non passa per nessuna delle singolarità di g, quindi il teorema dei residui implica , per $t \notin \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{N_1,N_2,M}} g(z)dz = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi(n-t)} + \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi(n-t)}$$

Su $C_{N_1,N_2,M}$ si ha, con costanti indipendenti da N_1, N_2 e M,

$$\left|\frac{1}{\sin \pi z}\right| \le C e^{-\pi |\operatorname{Im} z|}\,, \quad |f(z)| \le C e^{|\operatorname{Im} z|\Omega}\,, \quad \left|\frac{1}{z-t}\right| \le \frac{C}{\min\{N_1, N_2, M\}}\,. \tag{21.18}$$

Si faccia adesso tendere M all'infinito. I lati orizzontali del rettangolo $R_{N_1,N_2,M}$ hanno lunghezza finita e l'integrando tende a zero poiché il decadimento di $1/\sin \pi z$ vince la crescita di f perché per ipotesi $\pi > \Omega$. Gli integrandi sui lati verticali decadono esponezialmente per la stessa ragione. Passando al limite, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\operatorname{Re} z = N_2 + \frac{1}{2}} g(z)dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\operatorname{Re} z = -N_1 - \frac{1}{2}} g(z)dz = \frac{(-1)^n f(n)}{\pi(n-t)} + \sum_{n=-N_1}^{N_2} \frac{(-1)^n f(n)}{\pi(n-t)}$$

Per completare la dimostrazione del teorema è sufficiente mostrare che ciascun integrale a sinistra tende a zero quando N_1 e N_2 tendono all'infinito. Dalla (21.18), il valore assoluto dell'integrale è superiormente limitato da

$$\frac{C}{\min\{N_1, N_2, M\}}\,.$$

Il criterio di campionamento $\pi > \Omega$ implica che questi integrali tendono a zero. Questo completa la dimostrazione. □

21.5 *Formule di Poisson e relazioni di Kramers–Kronig*

Se di una funzione $f = u + iv$ sappiamo che è analitica nel semipiano superiore Π^+ (incluso l'infinito e l'asse reale) e sono noti i valori di u e v sull'asse reale, abbiamo dati sufficienti per ricostruire la funzione nel semipiano superiore. Questo perché u e v sono armoniche nel semipiano superiore e il problema appena posto è un problema di Dirichlet.

Possiamo arrivare alla stessa conclusione con i metodi dell'analisi complessa. Per determinare f applichiamo la formula di Cauchy al circuito C in figura 21.7 per un punto z dentro C e per il punto $\overline{z}$ (che è fuori):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z - z} dZ \tag{21.19}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(Z)}{Z - \overline{z}} dZ \tag{21.20}$$

Sottraendo membro a membro, si ottiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(Z) \left[\frac{1}{Z - z} - \frac{1}{Z - \overline{z}} \right] dZ = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(Z) \frac{z - \overline{z}}{(Z - z)(Z - \overline{z})} .$$

Essendo $z = x + iy$ e $Z = X + iY$, esplicitando il contorno in figura, si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-R}^{R} \frac{y f(X)}{(X - x)^2 + y^2} dX + \int_{C_R} \frac{y f(Z)}{(Z - z)(Z - \overline{z})} dZ ,$$

dove C_R è il semicerchio di raggio R. Avendo assunto che $f(z)$ analitica nel semipiano superiore (incluso l'infinito), nel limite $R \to \infty$ l'integrale lungo C_R dà contributo nullo e si ottiene

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(X)}{(X - x)^2 + y^2} dX , \tag{21.21}$$

Poiché entrambi i lati di (21.21) contengono solo coefficienti reali, questa equazione vale separatamente per u e v, le parti reale e immaginaria di f,

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X, 0)}{(X - x)^2 + y^2} dX \tag{21.22}$$

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X, 0)}{(X - x)^2 + y^2} dX \tag{21.23}$$

Le formule (21.22) e (21.23) sono dette *formule integrali di Poisson per il semipiano*. Esse danno i valori di una funzione armonica

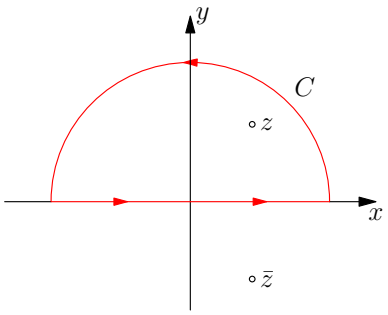


Figura 21.7: Significato elettrostatico delle formule (21.19) e (21.20). Il problema è di trovare il potenziale nel semipiano superiore, quando è noto il potenziale sulla linea $y = 0$. Il metodo delle immagini è l'artificio usato in elettrostatica per risolvere problemi di questo tipo. Possiamo pensare che il fattore $1/(Z - z)$ nell'integrale di Cauchy rappresenti una "carica" nel punto $z = x + iy$. Introducendo una carica immagine negativa in $\overline{z} = x - iy$ forziamo le desiderate condizioni al contorno sull'asse reale.

nel semipiano superiore, ad esempio il potenziale elettrostatico, in termini dei suoi valori sull'asse delle x (il bordo) del semipiano (naturalmente, a patto che $f(z)$ sia analitica nel semipiano superiore).

Per ottenere una relazione tra u e v, sommiamo membro a membro (21.19) e (21.20),

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X-x}{(X-x)^2+y^2} f(X)dX\,. \tag{21.24}$$

Uguagliando parti reali e immaginarie, otteniamo

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)v(X,0)}{(X-x)^2+y^2}dX \tag{21.25}$$

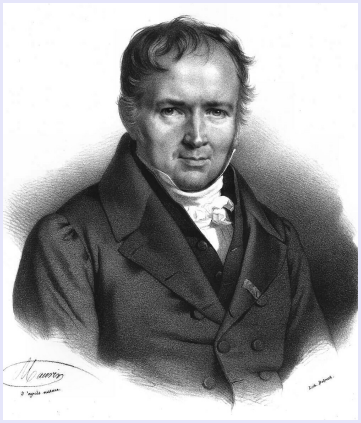
$$v(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X-x)u(X,0)}{(X-x)^2+y^2}dX \tag{21.26}$$

Queste equazioni possono essere usate per determinare il comportamento di u e v sul contorno stesso, cioè per $y = 0$. Dalla (19.31) si ottiene

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X,0)}{X-x}dX \tag{21.27}$$

$$v(x,0) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X,0)}{X-x}dX \tag{21.28}$$

Queste relazioni compaiono nella teorie delle trasformate di Hilbert e in fisica sono note come *relazioni di dispersione di Kramers-Kronig*.



Siméon Denis Poisson (1781–1840) è stato un matematico e fisico francese. Come fisico, fu un sostenitore della teoria corpuscolare (newtoniana) della luce. Studente di Lagrange e Laplace, fu il maestro, tra gli altri, di Dirichlet e Liouville.

RELAZIONI DI DISPERSIONE DI KRAMERS-KRONIG Le equazioni appena ottenute possono essere usate per determinare il comportamento di u e v sul contorno stesso, cioè per $y = 0$. Dalla (19.31) si ottiene

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(X,0)}{X-x}dX \tag{21.29}$$

$$v(x,0) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X,0)}{X-x}dX \tag{21.30}$$

Queste relazioni compaiono nella teorie delle trasformate di Hilbert e in fisica sono note come *relazioni di dispersione di Kramers-Kronig*.

Nelle applicazioni alla fisica, $z = \omega + i\sigma$ è la frequenza complessa, con parte reale ω e parte immaginaria σ, e la funzione $f(z)$ è di solito denotata $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$. Con queste notazioni, si riscrivono le relazioni sopra nel seguente modo

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \tag{21.31}$$

$$\chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'-\omega}d\omega' \tag{21.32}$$

Si osservi che le relazioni di dispersione di Kramers-Kronig possono anche essere ottenute come conseguenza immediata della formula di Cauchy (19.31) per punti su C. Infatti, quando $\chi(z)$ è analitica nel semipiano superiore e si considera il cammino in figura 21.8 dove ω è sull'asse reale, la formula (19.31) diventa

$$\chi(\omega) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \tag{21.33}$$

Separando adesso parte reale e parte immaginaria di questa uguaglianza si ottengono (21.31) e (21.32).

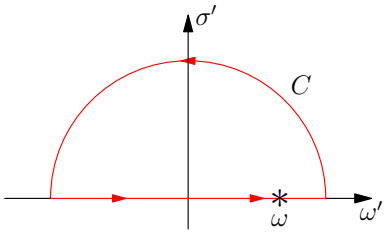


Figura 21.8: Polo lungo il cammino d'integrazione nell'integrale (21.33).

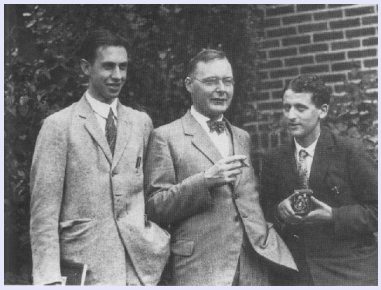
Per chiarire l'importanza in fisica delle relazioni di dispersione, occorre rispondere alle domande seguenti:

(a) Quali grandezze fisiche soddisfano le relazioni di dispersione?

(b) Perché tali grandezze soddisfano le relazioni di dispersione?

(c) Qual è il significato fisico delle relazioni di dispersione?

Si tratta di domande importanti a cui qui possiamo solo dare una risposta sommaria.


Hans Kramers (1894–1952) è stato un fisico danese. Studente di Niels Bohr è noto per l'approssimazione semiclassica della meccanica quantistica detta approssimazione WKB ("W" sta per Wentzel, "K" per Kramers e "B" per Brillouin) e per il suo lavoro con Kronig sulle relazioni di dispersione. Nella foto (del 1928 circa) è al centro con George Uhlenbeck e Samuel Goudsmit, famosi per la scoperta dello spin dell'elettrone.

(a) Tipicamente, la grandezza fisica $\chi(z) = \chi'(z) + i\chi''(z)$ è la continuazione analitica della trasformata di Fourier di una funzione che rappresenta come una certa proprietà y di un sistema fisico risponde a una forza f (intesa in senso generalizzato). Se l'intensità della forza è piccola, la risposta è lineare

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-u) f(u) du \quad \longleftrightarrow \quad \widehat{y}(z) = \chi(z) \widehat{f}(z) \, .$$

χ rappresenta una *suscettività* o un'*ammettenza* ed è detta anche la *funzione di risposta complessa* del sistema. La situazione paradigmatica è quella dell'esempio 19.7 dove

$$\chi(z) = \frac{-1}{-\omega_0^2 + z^2 + i2\beta z}$$

e

$$K(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{-\omega_0^2 + \omega^2 + i2\beta\omega} d\omega = e^{-\beta t} \frac{\sin \Omega_0 t}{\Omega_0} u(t) \, .$$

In effetti, questo è il modello che si usa per studiare la risposta di un atomo ad una radiazione elettromagnetica incidente di frequenza ω. Le relazioni di Kramer-Kronig in questo caso forniscono la relazione tra parte reale e parte immaginaria dell'indice di rifrazione complesso.

(b) Per ragioni fisiche, $K(t-u)$ deve essere zero per $t < u$. Infatti, la risposta del sistema al tempo t deve essere successiva alla forza applicata al tempo u (per $t < u$ la risposta del sistema è zero, perché

la forza non è stata ancora applicata). Nella sezione precedente abbiamo visto che la trasformata di Fourier di una funzione $f(t)$ nulla per $t < 0$ è analitica nel semipiano superiore Π^+. La sola ipotesi su cui si basano le relazioni di dispersione (che la funzione sia analitica nel semipiano superiore) è dunque soddisfatta.

(c) Per quel che riguarda il significato fisico delle relazioni di dispersione, ci limitiamo a questo: la parte immaginaria delle funzione di risposta $\chi(\omega)$ descrive come il sistema dissipa energia, essendo sfasato con la forzante. Le relazioni di Kramers-Kronig implicano che la risposta dissipativa (resistenza, per i circuiti elettrici) è sufficiente a determinare la risposta in fase reattiva (reattanza, per i circuiti elettrici) e viceversa.

Ralph Kronig (1904–1995) è stato un fisico tedesco. Noto principalmente per il modello cristallino di Kronig-Penney e per le relazioni di dispersione, insieme con Rabi diede la prima soluzione dell'equazione di Schrödinger per un rotatore rigido (1927) e anticipò l'idea di Pauli dello spin.

NOTA Per le applicazioni, è utile riscrivere le formule (21.31) e (21.32) in termini di integrali solo sulle frequenze positive. Essendo $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ è la trasformata di Fourier di una funzione reale, $\chi(-\omega) = \overline{\chi(\omega)}$, $\chi'(\omega)$ è una funzione pari e $\chi''(\omega)$ è una funzione dispari. Allora il dominio di integrazione può essere portato da $(-\infty, +\infty)$ a $[0, +\infty)$: si moltiplichi numeratore e denominatore della funzione integranda a secondo membro della (21.31) per $(\omega + \omega')$ e si separino i contributi,

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' + \frac{\omega}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

Poiché $\chi''(\omega)$ è dispari, il secondo integrale si annulla e resta

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_{0}^{\infty} \frac{\omega' \chi''(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \tag{21.34}$$

Lo stesso argomento per la parte immaginaria fornisce

$$\chi''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_{0}^{\infty} \frac{\chi'(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \tag{21.35}$$

Le equazioni (21.34) e (21.35) sono in effetti le relazioni derivate originariamente da Kramers e Kronig.

21.6 *Il problema di Dirichlet per funzioni armoniche nel piano*

Nel problema 8.9 abbiamo ottenuto la formula di Poisson

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} f(\theta) d\theta \,. \tag{21.36}$$

per $a = re^{i\phi}$, $r < 1$, dentro al cerchio unitario $\mathbb{T}$ e $f(\theta) \equiv f(Re^{i\theta})$, il valore di f sul cerchio, applicando la formula di Green. La stessa

formula può essere ottenuta mediante metodi di analisi complessa in modo analogo a come si sono ottenute le formule di Poisson per il semipiano mediante metodo delle immagini. Ponendo una carica immagine in $1/\bar{a}$, si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}} \frac{f(Z)}{Z-a} dZ \tag{21.37}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}} \frac{f(Z)}{Z-1/\bar{a}}\, dZ \tag{21.38}$$

Sottraendo membro a membro, posto $Z = e^{i\theta}$, e tenuto conto che $dZ = iZd\theta$, si ottiene la (21.36).

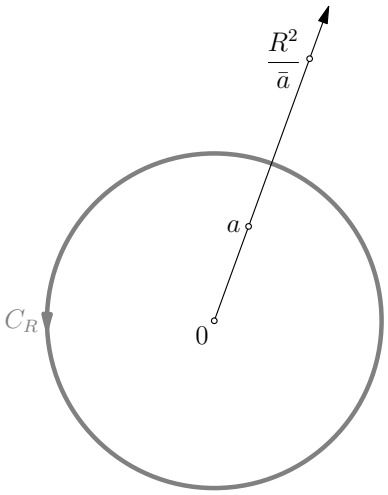


Figura 21.9: Carica immagine nel punto $R^2/\bar{a}$ per un cerchio di raggio R. Questo punto è l'inversione geometrica di a rispetto al cerchio di raggio R.

TEOREMA DI SCHWARTZ È importante aver chiaro quel che si compra e quel che NON si compra con la formula di Poisson. Questa formula stabilisce che per una funzione analitica dentro al cerchio e SUL cerchio, il valore della funzione dentro al cerchio è la media pesata (21.43) dei valori della funzione sul cerchio. Nel problema di Dirichlet, invece, è ASSEGNATA un funzione f sul bordo $\partial\mathcal{R}$ e il problema consiste nel determinare una funzione armonica dentro $\mathcal{R}$ che assume il valore assegnato sul bordo quando ci si avvicina al bordo.

Per affrontare questo problema, si *definisca* la funzione a *valori reali*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2}\right] f(\theta) d\theta\,. \tag{21.39}$$

f è la condizione al contorno che vogliamo assegnare più o meno arbitrariamente. Si osservi che non si sta assumendo che che u e f coincidano sul cerchio unitario $\mathbb{T}$, ma, assegnata f su $\mathbb{T}$, si vuole stabilire se esista una funzione armonica u nel disco unitario. Vale il seguente teorema

Teorema di Schwartz. La funzione a *valori reali*
$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2}\right] f(\theta) d\theta\,.$$
è armonica per qualunque funzione integrabile reale f su $\mathbb{T}$. (21.40)

Questo teorema e il teorema (10.26) forniscono la soluzione rigorosa completa del problema di Dirichlet per funzioni armoniche nel disco unitario.

PROBLEMA GENERALE DI DIRICHLET PER FUNZIONI ARMONICHE NEL PIANO Se si sa risolvere il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel disco unitario

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) = 0\,, & \mathbf{r} \in \mathbb{D} \\ u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})\,, & \mathbf{r} \in \mathbb{T}\,, \end{cases} \tag{21.41}$$

Dimostrazione di (21.40). Per $a = re^{i\phi} \in \mathbb{D}$ $(r<1)$ e $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ si ha

$$\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{(e^{i\theta}+a)(e^{-i\theta}-\bar{a})}{|e^{i\theta}-a|^2}\right) = \frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2}\,.$$

Quindi il nucleo di Poisson (21.42) è la parte reale di una funzione analitica. Come si può verificare, dalle relazioni di Cauchy-Riemann segue che la funzione

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta}+a}{e^{i\theta}-a}\right) f(\theta) d\theta$$

è analitica in $\mathbb{D}$ per *qualunque* funzione integrabile reale f su $\mathbb{T}$. L'equazione sopra è detta *formula di Schwartz* e permette di ricostruire la funzione analitica completa $g(z)$ nel disco $\mathbb{D}$ a partire dalla sua parte reale su $\mathbb{T}$. Ma

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2}\right] f(\theta) d\theta$$

è la parte reale di g. Dunque, la funzione $u(a)$ è armonica per qualunque funzione integrabile reale f su $\mathbb{T}$. □

per il teorema delle rappresentazioni di Riemann (20.23), si sa anche risolvere il problema

$$\begin{cases} \Delta u(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R} \\ u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{R} \end{cases}$$

per qualunque regione $\mathcal{R}$ la cui frontiera $\partial\mathcal{R}$ è una curva semplice chiusa. Si lascia come (facile) esercizio dimostrare perché.

SIGNIFICATO FISICO-GEOMETRICO DELLA FORMULA DI POISSON
Interpretiamo la funzione armonica in un disco (unitario, per semplicità) come la distribuzione di temperatura a regime in una piastra circolare, le cui facce sono isolate e che sul bordo è mantenuta ad una data temperatura $T(\theta) \equiv T(e^{i\theta})$.

La temperatura $T(a)$ in un generico punto $a = re^{i\phi}$ della piastra è data dalla convoluzione del nucleo di Poisson

$$P_r(\phi - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\phi - \theta) + r^2} = \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} \equiv P_a(\theta)\,, \qquad (21.42)$$

con il valore al bordo $T(\theta)$, vale a dire

$$T(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_a(\theta)T(\theta)d\theta\,. \qquad (21.43)$$

La formula dice che $T(a)$ è una *media pesata* della temperatura sul bordo, con la temperatura di ciascun elemento del bordo che contribuisce a $T(a)$ in proporzione al suo peso dato nucleo di Poisson. Più lontano è l'elemento sul bordo da a, inferiore è il suo peso. Quando a è nel centro si ritrova il teorema della media di Gauss

$$T(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(\theta)d\theta\,,$$

che esprime il lampante fatto fisico che la temperatura nel centro è la media dei valori sul bordo circolare.

Ora, una media pesata si può sempre far diventare una media non pesata mediante una trasformazione il cui Jacobiano sia il peso: sia $\theta^\star = F(\theta)$ tale che

$$\left|\frac{d\theta^\star}{d\theta}\right| = P_a(\theta) = \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2}\,, \qquad (21.44)$$

allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(\theta)P_a(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} T^\star(\theta^\star)d\theta^\star = \int_{-\pi}^{\pi} T^\star(\theta)d\theta\,, \qquad (21.45)$$

(essendo $\theta^\star$ una variabile "muta" di integrazione). Ne segue che in conseguenza della trasformazione F della piastra, la temperatura trasformata è $T^\star(\theta) = T(F^{-1}(\theta))$.

Il bordo forma un tutt'uno con la piastra circolare, si dovrà quindi considerare $\theta^\star = F(\theta)$ come il valore al bordo di una trasformazione $z^\star = F(z)$ del disco unitario in se stesso. Se si richiede che F sia analitica, di modo che $T^\star(\theta)$ sia armonica, si trova chela trasformazione cercata è la trasformazione "swap" (20.25),

$$z^\star = F(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}\,.$$

Mostriamo che la (21.44) è soddisfatta per

$$z^\star = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}, \quad |z| = 1$$

(cioè sulla circonferenza di raggio 1). Osserviamo che $dz = izd\theta$ e $dz^\star = iz^\star d\theta^\star$, per cui

$$\frac{d\theta^\star}{d\theta} = \frac{z}{z^\star}\frac{dz^\star}{dz}\,.$$

Ma

$$\frac{dz^\star}{dz} = \frac{-1+|a|^2}{(\bar{a}z-1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{z}{z^*} = z\frac{\bar{a}z-1}{z-a}$$

Poiché per $|z| = 1$, $|\bar{a}z-1| = |z-a|$, ne segue la formula (21.44).

Applicando adesso il teorema della media alla temperatura trasformata, dalla (21.45) otteniamo

$$T(a) = T^*(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T^*(\theta)d\theta\,,$$

In questo modo, abbiamo ricondotto la soluzione del problema originario al calcolo della media di Gauss della distribuzione di temperatura trasformata.

Per capire il significato geometrico di questa trasformazione, consideriamo la distribuzione di temperatura in cui la metà superiore del cerchio è a 0^0 e quella inferiore a 100^0. L'effetto della trasformazione sui punti che stanno sul cerchio è quello mostrato in figura 21.10: un punto Z si trasforma nel punto $Z^\star$, estremo delle corda che passa per Z e per a (per una dimostrazione di questo, si veda l'esercizio 20.15). Con questa costruzione, il contributo della parte lontana risulta correttamente ricalibrato: per trovare la temperatura in $z = a$ si trasporti ciascuna temperatura sul cerchio unitario nel punto direttamente opposto come visto da $z = a$, quindi si prenda la media della distribuzione di temperatura così ottenuta; vedere la figura 21.11.

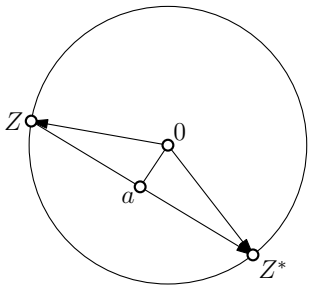


Figura 21.10: Costruzione geometrica di $z \to z^\star$ sul cerchio.

21.7 *Soluzione di Sommerfeld del problema di Keplero*

Il problema di Keplero del moto di un corpo di massa m in un campo centrale $-k/r$ può essere risolto in termini di variabili azione-angolo. Risolvendo l'equazione di Hamilton-Jacobi in coordinate sferiche

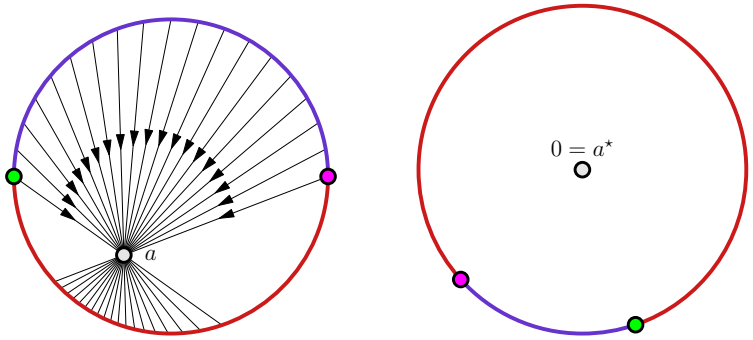


Figura 21.11: *A sinistra*: la metà superiore del bordo del cerchio è a 0^0 e quella inferiore a 100^0. Le temperature della metà superiore del cerchio sono trasportate in quella inferiore secondo la regola descritta nella figura 21.10. *A destra*: la temperatura in a per la data distribuzione (metà superiore del cerchio a 0^0, metà inferiore a 100^0 è la temperatura media (cioè la temperatura nel centro del disco) della distribuzione sul cerchio ottenuta con la costruzione della figura a sinistra.

(r, θ, ϕ), e separando le variabili, si ottiene una forma integrale delle variabili d'azione J_ϕ, J_θ e J_r. Per la variabile d'azione radiale si trova

$$J_r = \oint p_r dr = \oint \sqrt{2mE + \frac{2mk}{r} - \frac{(J_\theta + J_\phi)^2}{4\pi^2 r^2}} dr \qquad (21.46)$$

dove E è l'energia, assunta negativa (stato legato), l'integrazione è su un orbita con perielio r_1 e afelio r_2. L'interesse in questo integrale sta nel fatto che se riusciamo ad esprimere l'energia E in termini delle variabili d'azione, cioè se determiniamo l'hamiltoniana $H = E$ in funzione di J_ϕ, J_θ e J_r, possiamo determinare le frequenze del moto, sulla base dell'equazione

$$\nu_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}$$

Sommerfeld, che contribuì molto allo sviluppo della "vecchia" meccanica quantistica *à la* Bohr, basata su condizioni di quantizzazione $\oint p_i dq_i = n_i h$ per gli integrali d'azione , risolse l'integrale (21.46), con i metodi dell'analisi complessa.

1. Siete in grado di fare altrettanto ? (Come aiuto, si tenga presente che perielio e afelio sono punti di diramazione e che conviene prendere un taglio tra di loro e ...)

2. Fatto questo, dovreste poter verificare che c'è una sola frequenza del moto e che il periodo è dato da

$$T = \pi k \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}$$

[Si veda il libro di Goldstein di meccanica classica.]

21.8 Equazione delle onde

Consideriamo l'equazione delle onde nel caso in cui una forza esterna $f(x,t)$ è applicata alla corda ed è presente un termine di smorzamento (equazione del telegrafista (6.13)). Allora l'equazione del moto per lo spostamento verticale $y = u(x,t)$ soddisfa l'equazione non omogenea

Nel caso di onde acustiche o onde elettromagnetiche , il termine forzante $f(x,t)$ è interpretato come sorgente del campo $u(x,t)$.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta\frac{\partial u}{\partial t} + f(x,t) \tag{21.47}$$

Per semplicità, usiamo unità di misura in cui $c = 1$.

Come nel caso delle equazioni lineari ordinarie, data una soluzione particolare della (21.47), è possibile ottenere un'altra soluzione aggiungendo una soluzione dell'equazione omogenea (6.12). La procedura per trovare una soluzione della (21.47) è la seguente. Si fissino i dati iniziali

$$u(x,0) = q(x) \quad \text{e} \quad \partial_t u(x,0) = p(x)\,.$$

Quindi si trovi una *qualunque* soluzione $u_p(x,t)$ della (21.47). Si osservi che non c'è bisogno che $u_p(x,t)$ soddisfi i dati iniziali. A questo punto, si risolva l'equazione omogenea associata con dati iniziali

$$u_o(x,0) = a(x) - u_p(x,0) \quad \text{e} \quad \partial_t o(x,0) = b(x) - \partial_t p(x,0)\,.$$

L'*unica soluzione* della (21.47) che soddisfa i dati iniziali è

$$u(x,t) = u_o(x,t) + u_p(x,t)\,.$$

Si osservi che è sbagliato parlare di "la" soluzione particolare: ce ne sono quante vogliamo! Il metodo sopra descritto dà unicità per la soluzione u, ma non per u_o e u_p presi individualmente.

Sappiamo come trovare la soluzione dell'omogenea per date condizioni iniziali (equazione (11.2)). Concentriamoci dunque sul problema di trovare una soluzione particolare. Un metodo comune per trovare una soluzione particolare $u(x,t)$ della (21.47) è mediante analisi di Fourier (per comodità, eliminiamo il pedice p).

Usando le convenzioni (16.5) e (16.6),

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,\omega)e^{i(kx-\omega t)}\,d\omega dk\,, \tag{21.48}$$

$$U(k,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i(kx-\omega t)}dxdt \tag{21.49}$$

trasformando secondo Fourier la (21.47) rispetto allo spazio e al tempo, otteniamo

$$-\omega^2 U(k,\omega) = -k^2 U(k,\omega) + i2\beta\omega + F(k,\omega)\,,$$

da cui

$$U(k,\omega) = \frac{F(k,\omega)}{-\omega^2 - i2\beta\omega + k^2}\,. \tag{21.50}$$

Per il teorema di convoluzione,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{G}(x-y,t-s)F(y,s)dyds\,, \tag{21.51}$$

dove

$$\mathscr{G}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i2\beta\omega + k^2}\,\frac{d\omega}{2\pi}\right] e^{ikx}\,\frac{dk}{2\pi}\,. \tag{21.52}$$

L'integrale

$$\widehat{\mathscr{G}}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i2\beta\omega + k^2}\,\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{21.53}$$

è è l'integrale (16.41) per $\omega_0 = |k|$, che è stato risolto nell'esempio 19.7. Dalla (19.22) otteniamo

$$\widehat{\mathscr{G}}(k,t) = e^{-\beta t}\frac{\sin|k|t}{|k|}\mathfrak{u}(t) = e^{-\beta t}\frac{\sin kt}{k}\mathfrak{u}(t)\,.$$

Usando l'esempio 16.4 possiamo invertire la trasformata di Fourier rispetto a k e ottenere

$$\mathscr{G}(x,t) = \frac{1}{2}e^{-\beta t}\mathfrak{u}(t)\chi_{[-t,t]}(x)\,.$$

Se ripristiamo unità di misura standard con velocità di propagazione delle onde $c \neq 1$, allora

$$\mathscr{G}(x,t) = \frac{1}{2c}e^{-\beta c^2 t}\mathfrak{u}(t)\chi_{[-ct,ct]}(x) \tag{21.54}$$

A parole: $\mathscr{G}(x,t)$ è la funzione che vale 0 per $t \leq 0$ e vale $1/(2c)e^{-\beta c^2 t}$ per $t > 0$ e x compreso tra $-ct$ e ct. Sostituendo nella (21.51), troviamo la soluzione particolare cercata come integrale di convoluzione $u(x,t) = \mathscr{G} \star c^2 f(x)$.

Analizziamo questa soluzione nel caso in cui la dissipazione sia trascurabile, cioè nel caso in cui $\beta = 0$ e u è soluzione dell'equazione non omogenea delle onde

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,. \tag{21.55}$$

Allora

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-c(t-s),c(t-s)]}(x-y)f(y,s)dyds \tag{21.56}$$

$$= \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{t}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dyds\,. \tag{21.57}$$

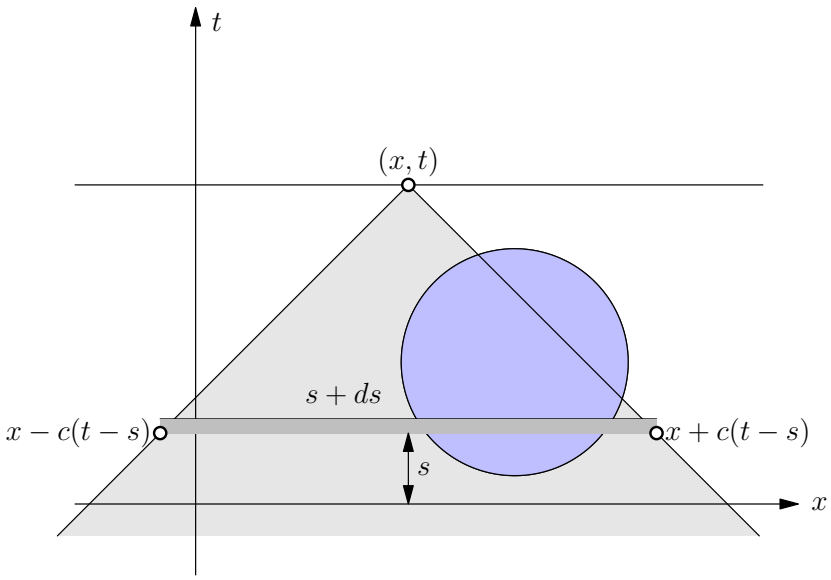


Figura 21.12: Il campo

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{t} ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dy$$

in un dato punto (x,t) dello spaziotempo dipende soltanto dai valori del termine forzante (o sorgente) nei punti che si trovano nel "cono d'ombra" passato del punto. Questo cono o *regione di influenza* è delimitato dalle rette caratteristiche di pendenza $1/c$ e $-1/c$ che passano per il punto (x,t): nella figura è la regione colorata in grigio. Questo cono è il dominio di integrazione. La regione colorata in blu è dove la sorgente $u(x,t)$ è non nulla, cioè il supporto spaziotemporale della sorgente. Contribuisce al valore del campo nel punto (x,t) soltanto quella parte del supporto della sorgente che è nella regione di influenza. Il contributo

$$ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dy$$

all'integrale è quello di una striscia di spessore ds (colorata in grigio scuro in figura). Sommando i contributi di tutte le striscie, per s che varia tra $-\infty$ e t, si ottiene il valore del campo p nel punto (x,t). Naturalmente, il contributo delle striscie sotto il supporto della sorgente è nullo.

Si lascia come esercizio il mostrare che quando questa espressione è sostituita nella (21.55), l'equazione risulta soddisfatta.

Il significato geometrico della soluzione trovata è illustrato in figura 21.12.

Determiniamo adesso la soluzione completa della (21.55). Supponiamo che la sorgente $f(x,t)$ venga accesa ad un qualche istante, in modo tale che per t minore di un qualche tempo t_0 sia nulla. Chiaramente, da un punto di vista fisico, questa non è una restrizione significativa. Per comodità scegliamo questo tempo t_0 come origine per l'asse dei tempi, esattamente come in figura 21.12.

Allora, essendo $f(x,t) = 0$ per $t \leq 0$, si avrà anche che per $t \leq 0$ $p(x,t)$ è nulla ed è nulla sua derivata (per $t \leq 0$ la funzione è identicamente nulla, si veda la figura 21.13). Possiamo allora prendere, come soluzione dell'omogenea associata, la soluzione

$$u_o(x,t) = \frac{1}{2}\left[q(x-ct) + q(x+vt)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{x-ct}^{x+ct} p(x)\,dx\right]$$

scaricando in questo modo i dati iniziali $q(x)$ e $p(x)$ sulla soluzione dell'omogenea. La soluzione completa della (21.55) è dunque

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}\left[q(x-ct) + q(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[\int_{x-vt}^{x+ct} p(x)\,dx\right] \\ &+ \frac{c}{2}\int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dy\,, \end{aligned} \tag{21.58}$$

Il limite inferiore d'integrazione è stato posto a zero perché abbiamo assunto che la funzione f sia nulla per $t < 0$.

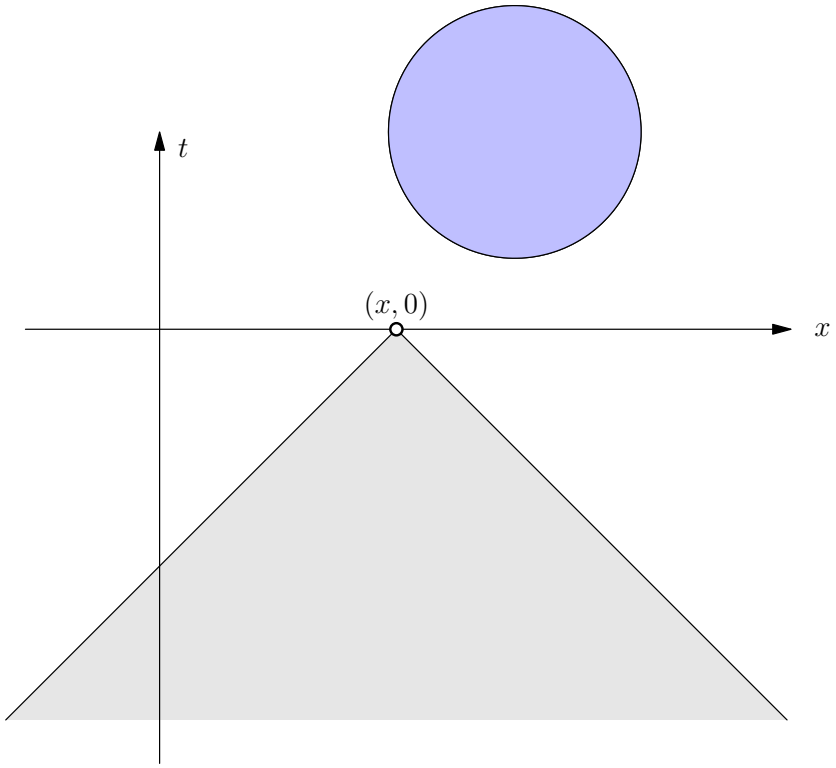


Figura 21.13: Se la sorgente è nel futuro ($t > 0$), la funzione $u_p(x, 0)$ è identicamente nulla (per cui, in particolare, è nulla anche la sua derivata rispetto al tempo).

Come si verifica facilmente, la funzione

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\int_0^t ds \int_{-x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)dy$$

si annulla per $t = 0$ e così fa la sua derivata $\partial_t u(x, 0)$, anche quando $f(x, t) \neq 0$ per $t \leq 0$. Ma allora (21.58) è in effetti la soluzione completa della (21.55) per un termine forzante $f(x, t)$ generico.

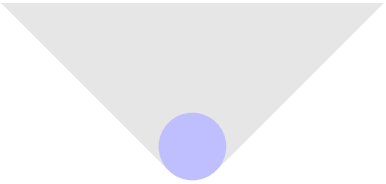


Figura 21.14: Se la sorgente (o forzante) è localizzata spaziotemporalmente nella regione colorata in blu, la sua regione di influenza è il cono (colorato in grigio) nel futuro. Questo è l'effetto causale determinato da $\mathcal{G}(x, t)$.

21.9 *Flussi irrotazionali di fluidi perfetti nel piano*

Problemi

Problema 21.1. □ Usando la formula di inversione della trasformata di Laplace, calcolare:

1.
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$
$$\left[\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)\right]$$

2.
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\}$$
$$\left[1 - \operatorname{erf}\left(a/2\sqrt{2}\right)\right]$$

Soluzioni

Problema 21.1. □

(I) Dobbiamo calcolare

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

Si ha

$$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2}\,.$$

La trasformata di Laplace inversa è la somma dei residui di

$$\frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}$$

nei poli $\pm i$ che sono ciascuno di ordine 2. Il residuo in $s = i$ è

$$\lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[(s-i)^2\frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}\,.$$

Il residuo in $s = -i$ è

$$\lim_{s\to i}\frac{d}{ds}\left[(s+i)^2\frac{e^{st}}{(s^2+1)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}ie^{-it}\,.$$

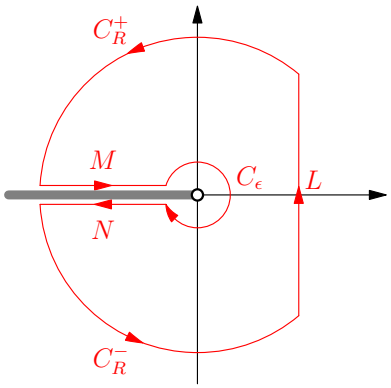
(che si sarebbe potuto anche ottenere direttamente dal residuo in $s = i$, sostituendo i con $-i$). Allora

$$\begin{aligned}\sum \text{Res} &= -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it} - \frac{1}{4}te^{-it} - \frac{1}{4}ie^{-it}\\ &= \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\left(\sin t - t\cos t\right)\end{aligned}$$

(II) Essendo $s = 0$ un punto di diramazione, si può applicare la formula di inversione

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zt}f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz\,,$$

a patto di usare il contorno della figura **??**, che riportiamo a lato.



Si osservi che il taglio per la radice è tra $-\infty$ e 0: appena sopra il taglio, lungo M, $z = e^{i\pi}|x|$ e $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{i\pi/2} = i\sqrt{|x|}$; appena sotto il taglio, lungo N, $z = e^{-i\pi}|x|$ e $\sqrt{z} = \sqrt{|x|}e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{|x|}$.

Poiché la funzione è analitica all'interno del contorno, si ha

$$\oint_L = -\left[\int_{C_R^+} + \int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N + \int_{C_R^-}\right]$$

Nel limite $R \to \infty$ i due integrali $\int_{C_R^+}$ e $\int_{C_R^-}$ danno contributo nullo. Valutiamo i tre integrali rimanenti, nel limite $R \to \infty$ e $\epsilon \to 0$.

$$\int_M \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz = \int_\infty^0 \frac{e^{xe^{i\pi}-a(xe^{i\pi})^{1/2}}}{x}dx = -\int_\infty^0 \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}dx$$
$$\int_N \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz = \int_\infty^0 \frac{e^{xe^{-i\pi}-a(xe^{-i\pi})^{1/2}}}{x}dx = \int_\infty^0 \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}dx$$
$$\int_{C_\epsilon} \frac{e^{zt-a\sqrt{z}}}{z}dz = i\int_\pi^{-\pi} e^{(\epsilon e^{i\theta})t-a\sqrt{\epsilon}e^{i\theta/2}}d\theta \quad \to \quad -2\pi i \quad \text{per} \quad \epsilon \to 0$$

Ne segue che

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L = \frac{-1}{2\pi i}\left[\int_M + \int_{C_\epsilon} + \int_N\right] = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}dx\,.$$

Poniamo

$$I = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}dx\,.$$

Mediante sostituzione $x = u^2$, I diventa

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-u^2t}\sin au}{u}du\,.$$

Derivando rispetto a a, otteniamo

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2t}\cos au du = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-a^2/4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}\,.$$

Quindi, usando la condizione $I = 0$ per $a = 0$,

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/(2\sqrt{t})} e^{-u^2}du = \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\,.$$

Allora

$$F(t) = 1 - \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$$